应用概率统计　第 36 卷
第 5 期　2020 年 10 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Oct., 2020, Vol. 36, No. 5, pp. 453-466
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2020.05.002

带马氏切换扩散过程的指数遍历速率 *

王玲娣[1,3]★　　任盼盼[2,1]

([1]河南大学数学与统计学院, 475004, 开封; [2]夏邑县第一高级中学, 476400, 商丘)

([3]河南大学博士后, 475004, 开封)

摘　要: 本文讨论带马氏切换扩散过程的指数遍历性问题, 给出了原点为反射边界时该过程的一类 f-指数遍历的判别条件. 当在固定环境下一维扩散过程随机保序时, 借助耦合方法给出了原点为反射边界的带马氏切换扩散过程指数遍历速率的显式估计.

关键词: Lyapunov 函数; 带马氏切换扩散过程; M-矩阵; 随机保序

中图分类号: O211.6

英文引用格式: WANG L D, REN P P. Exponential ergodic rates of Markov switching diffusion processes [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2020, 36(5): 453–466. (in Chinese)

§1.　背景介绍

带切换的扩散过程是一类具有广泛应用的随机过程, 在储存模型[1]、生物学[2,3]等方面有着广泛的应用, 相比较经典的扩散过程, 带切换的扩散过程能够更为贴切的描述某些随机现象, 例如, 雨季和旱季相互切换的环境下植物生长情况, 牛市和熊市切换的金融市场中期权定价问题等. 这类 Markov 过程的离散框架为随机函数迭代[4]或者随机环境中的随机分支模型[5]. 设 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant0},\mathsf{P})$ 为一个带流的概率空间, 其中 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant0}$ 满足通常条件 (右连续, $\mathscr{F}_0$ 包含所有的 P 零测集). 设 $\mathbb{S}=\{1,2,\cdots,N\}$ $(N<\infty)$. 任给 $i\in\mathbb{S}$, $(\ell(t,i))_{t\geqslant0}$ 为实值连续的关于 t 非降适应过程满足 $\ell(0,i)=0$ 且仅在 $X(t)=0$ 时关于 t 增加, 若存在 $(\ell(t,i))_{t\geqslant0}$ 使得 $(X(t),\Lambda(t))$ 满足下列 (1) 式, 则称 $(X(t),\Lambda(t))$ 为 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$ 上原点反射边界的带切换扩散过程:

$$\begin{cases}X(t)=\displaystyle\int_0^t b(X(s),\Lambda(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma(X(s),\Lambda(s))\mathrm{d}B_s+\ell(t,\Lambda(t)),\\ (X(0),\Lambda(0))=(x_0,i)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S},\end{cases}\tag{1}$$

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11771327、11771123、11971149) 和河南省高等学校重点科研项目 (批准号: 16A110010) 资助.

★通讯作者, E-mail: wangld_2013@163.com.

本文 2019 年 3 月 28 日收到, 2019 年 7 月 4 日收到修改稿.

其中, $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 适应的取值于 $\mathbb{R}_+$ 的 Brownian 运动, $(\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 为 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 适应的取值于 $\mathbb{S}$ 的连续时间过程, 当 $\delta\downarrow 0$ 时,

$$\mathsf{P}(\Lambda(t+\delta)=l\,|\,\Lambda(t)=k,\,X(t)=x)=\begin{cases}q_{kl}(x)\delta+o(\delta), & k\neq l;\\ 1+q_{kk}(x)\delta+o(\delta), & k=l\end{cases} \tag{2}$$

在 $x\in\mathbb{R}_+$ 上一致成立.

记 $Q(x)=(q_{ij}(x))_{i,j\in\mathbb{S}}$. 当 Q 不依赖于 x 时, 称 (1) 为原点反射边界的状态独立扩散过程或者原点反射边界的带马氏切换扩散过程, 否则, 称 (1) 为原点为反射边界的状态依赖的带切换扩散过程.

带切换扩散过程吸引了许多专家学者的关注, 对该过程长时间行为 (如解的存在性和正则性, 不变测度存在性, 次椭圆性等) 的研究参考文献 [6–12]. 关于该模型的稳定性 (例如, 常返性、指数遍历性、全变差距离遍历、Wassestein 遍历等) 参考文献 [13–16]. 当前研究主要关注了带切换扩散过程稳定性的判别条件, 对该过程指数遍历的收敛速率定量估计研究还很有限. 文献 [17] 讨论了一类特殊情形下带切换扩散过程具有对称测度时特征值估计问题, 就目前作者所知对一般的切换扩散过程指数收敛速率的估计还鲜有研究. 近年来, 关于无切换的扩散过程和生灭过程的稳定性和指数收敛速率估计问题研究已经非常完善[18–20], 特别的关于原点为反射边界 (即 Neumman 边界) 的一维过程的收敛速率估计问题有较为丰富的研究成果[19, 21–24], 某些情况下反射边界条件使得耦合方法更易运用, 其研究意义可参考上述文献. 文献 [25] 讨论了带跳扩散过程的指数收敛速率估计, 受其启发, 本文讨论带切换扩散过程的 f - 指数遍历 (详见定义 2) 的判别和收敛速率估计, 主要讨论切换机制不依赖于 x 的情形, 即带马氏切换的扩散过程, 且要求在零点为反射边界.

本文总假设 $b(x,i)$, $\sigma(x,i)$ 关于 x 连续. 为了保证带切换扩散过程解的存在性和正则性, 本文有如下一些基本的假设:

H1. 存在常数 $K_1>0$ 使得 $|b(x,i)-b(y,i)|+|\sigma(x,i)-\sigma(y,i)|\leqslant K_1|x-y|$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}_+$, $i\in\mathbb{S}$;

H2. 给定 $i\in\mathbb{S}$, $a(x,i):=\sigma^2(x,i)>0$ 关于 x 一致成立.

这些假设条件中, H1 保证了 (1) 和 (2) 有唯一的非爆炸解; H2 保证了过程的强 Feller 性质. 记 $\partial V(0,i)/\partial x=\partial V(x,i)/\partial x|_{x=0}$, 根据文献 [26], 零点反射的带切换扩散过程生成元 $\mathscr{A}$ 有如下形式:

$$\mathscr{A}V(x,i)=L^{(i)}V(\cdot,i)(x)+QV(x,\cdot)(i),\qquad V\in C^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}),\quad \frac{\partial V(0,i)}{\partial x}=0,\ i\in\mathbb{S},$$

其中

$$L^{(i)}V(\cdot,i)(x)=b(x,i)\frac{\partial V(x,i)}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2(x,i)\frac{\partial^2 V(x,i)}{\partial x^2},$$

$$QV(x,\cdot)(i)=\sum_{j\neq i}q_{ij}(x)(V(x,j)-V(x,i)).$$

记 $\mathscr{D}(\mathscr{A})=\{V\in C^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}):\partial V(0,i)/\partial x=0,\,i\in\mathbb{S}\}$ 为 $\mathscr{A}$ 的定义域. 设 ν 为 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$ 上符号测度, V 为 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$ 上可测函数, 记

$$\nu(V)=\sum_{i\in\mathbb{S}}\int_{\mathbb{R}_+}V(x,i)\nu(\mathrm{d}x,i).$$

定义 1 (马氏过程的 Lyapunov 函数)　设 $V:\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}\to[1,\infty)$ 满足 $V\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$. 若存在常数 $a,\,\kappa>0$, 紧集 $C\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$, 有限集合 $N\subset\mathbb{S}$ 使得马氏过程 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant0}$ 的生成元 $\mathscr{A}$ 满足

$$\mathscr{A}V(x,i)\leqslant-\kappa V(x,i)+a\mathbf{1}_{C\times N}(x,i),\qquad(x,i)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S},$$

则称 V 为马氏过程 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant0}$ 的指数为 κ 的 Lyapunov 函数.

该定义与文献 [25,27] 中略有不同, 与文献 [28] 中所述 Forster-Lyapunov 函数类似. 下面给出 f-变差范数 (记为 $\|\cdot\|_f$) 的定义. 设 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$ 上符号测度 ν, 若 $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}\to[1,\infty)$ 为 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$ 上可测函数, 则 ν 的 f-变差范数为

$$\|\nu\|_f:=\sup\{\nu(g):|g|\leqslant f,\,g\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{S})\}.$$

可见, $f\equiv1$ 时, $\|\cdot\|_f$ 为全变差范数. 因此, f-变差范数推广了全变差范数的思想. 当 $\mu(f)<\infty$ 时, 这本质上为全变差范数 [29].

定义 2 (f-指数遍历)　设 $(P^t)_{t\geqslant0}$ 为 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant0}$ 的转移半群. 称马氏过程 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant0}$ 是 f-指数遍历的, 且遍历速率为 k, 若存在唯一的平稳分布 π 和常数 D 使得

$$\|P^t((x,i),\cdot)-\pi(\cdot)\|_f\leqslant Df(x,i)\mathrm{e}^{-kt},\qquad(x,i)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S},\ t\geqslant0.$$

注记 3　本文 “f-指数遍历” 采用了文献 [28] 中术语, 文献 [25] 也称类似上述定义为 f-一致指数遍历.

定义 4 (全不可约)　设 $(P^t)_{t\geqslant0}$ 为 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant0}$ 的转移半群. 称马氏过程 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant0}$ 是全不可约的, 若 $A\subset\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$ 为正的 Lebesgue 可测集合, 即 $\forall\,t>0$, $(x,i)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$ 有 $P^t((x,i),A)>0$.

命题 5 (文献 [25] 命题 3.1)　设马氏过程是全不可约的, 且存在 Lyapunov 函数 V, 则该过程 V 指数遍历, 且唯一的平稳分布 π 满足 $\pi(V)<\infty$.

§2.　指数收敛的判别条件

本节主要定性给出原点反射边界的马氏切换扩散过程 f-指数遍历的判别条件. 记

$$K(\lambda,x,i)=\widehat{K}(\lambda,x,i)+\frac{Q\xi(i)}{\xi_i},$$

其中 $\xi:\mathbb{S}\to\mathbb{R}_+$, $\lambda>0$, $\widehat{K}(\lambda,x,i)=b(x,i)\lambda+\sigma^2(x,i)\lambda^2/2$.

定理 6 设马氏过程 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 满足假设 H1 – H2, 且全不可约. 若存在 $\lambda>0$ 以及 $\xi:\mathbb{S}\to\mathbb{R}_+$ 使得

$$\varlimsup_{x\to\infty}\sup_{i\in\mathbb{S}}K(\lambda,x,i)<0,$$

则马氏过程 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 是 V_λ 指数遍历的且有唯一的平稳分布 π 满足 $\pi(V_\lambda)<\infty$, 其中 $V_\lambda(x,i)=\mathrm{e}^{\lambda x}\xi_i$.

由于 $V_\lambda(x,i)=\mathrm{e}^{\lambda x}\xi_i$ 不满足 $\partial V_\lambda(0,i)/\partial x=0$, 为了使用 Lyapunov 函数理论证明定理 6, 需要对函数 $V_\lambda(x,i)$ 适当修改. 给定 $x_0>0$, 易知存在函数[25] $\phi(x)\leqslant x$ 使得 $\overline{V}_\lambda(x,i)=\mathrm{e}^{\lambda\phi(x)}\xi_i$ 满足

(i) $\partial\overline{V}_\lambda(0,i)/\partial x=0$;

(ii) $\overline{V}_\lambda(x,i)=V_\lambda(x,i)$, $x\geqslant x_0$, $i\in\mathbb{S}$;

(iii) $\overline{V}_\lambda(x,i)$ 关于 x 光滑且在下列意义下与 $V_\lambda(x,i)$ 等价: 存在 $0<c_1<c_2<\infty$ 使得

$$0<c_1\leqslant\frac{\overline{V}_\lambda(x,i)}{V_\lambda(x,i)}<c_2<\infty.$$

进而, 马氏过程 $\overline{V}_\lambda$ 指数遍历等价于 V_λ 指数遍历. 事实上, 由于

$$\|P^t((x,i),\cdot)-\pi(\cdot)\|_f=\sup\{(P^t((x,i),\cdot)-\pi(\cdot))(g):|g|\leqslant f,\ g\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{S})\},$$

以及任意常数 c 有 $(P^t((x,i),\cdot)-\pi(\cdot))(cg)=c(P^t((x,i),\cdot)-\pi(\cdot))(g)$, 根据 (iii) 知

$$\|P^t((x,i),\cdot)-\pi(\cdot)\|_{V_\lambda}\leqslant\frac{1}{c_1}\|P^t((x,i),\cdot)-\pi(\cdot)\|_{\overline{V}_\lambda}\leqslant\frac{c_2}{c_1}\|P^t((x,i),\cdot)-\pi(\cdot)\|_{V_\lambda}.$$

又由 f - 指数遍历的定义为存在唯一的平稳分布 π 和常数 D 使得

$$\|P^t((x,i),\cdot)-\pi(\cdot)\|_f\leqslant Df(x,i)\mathrm{e}^{-kt},\qquad (x,i)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S},\ t\geqslant 0,$$

易知 $\overline{V}_\lambda$ 指数遍历等价于 V_λ 指数遍历.

若 $\varlimsup\limits_{x\to\infty}\sup\limits_{i}K(\lambda,x,i)<0$, 则存在 $x_0>0$, 使得 $k_0(\lambda):=-\sup\limits_{x\geqslant x_0,i\in\mathbb{S}}K(\lambda,x,i)>0$, 且有界. 由于 b, σ 关于 x 连续以及 $\mathbb{S}$ 有限, 易知有如下结论:

引理 7 给定 $\lambda>0$, 对于上述 $k_0(\lambda)$, $x_0>0$ 以及 $\overline{V}_\lambda(x,i)=\mathrm{e}^{\lambda\phi(x)}\xi_i$, $\phi(x)\leqslant x$, 有

$$c_0:=\sup_{x\in[0,x_0],i\in\mathbb{S}}(\mathscr{A}\overline{V}_\lambda(x,i)+k_0(\lambda)\overline{V}_\lambda(x,i))<\infty.$$

定理 6 的证明: 由上面的论述, 为证过程 V_λ 指数遍历只需证明过程 $\overline{V}_\lambda$ 遍历. 由于

$$k_0(\lambda) = -\sup_{x \geqslant x_0, i \in \mathbb{S}} K(\lambda, x, i) > 0,$$

根据引理 7 简单计算得,

$$\begin{aligned} \mathscr{A}\overline{V}_\lambda(x,i) &= \mathscr{A}V_\lambda(x,i) = K(\lambda,x,i)\overline{V}_\lambda(x,i) \\ &\leqslant -k_0(\lambda)V_\lambda(x,i) = -k_0(\lambda)\overline{V}_\lambda(x,i), \qquad x \geqslant x_0,\ i \in \mathbb{S}; \\ \mathscr{A}\overline{V}_\lambda(x,i) &\leqslant -k_0(\lambda)\overline{V}_\lambda(x,i) + c_0, \qquad x \leqslant x_0,\ i \in \mathbb{S}. \end{aligned}$$

综上, $\mathscr{A}\overline{V}_\lambda(x,i) \leqslant -k_0(\lambda)\overline{V}_\lambda(x,i) + c_0\mathbf{1}_{[0,x_0]\times\mathbb{S}}$. 由命题 5 知结论成立. □

文献 [30] 利用 M-矩阵理论研究了带切换扩散过程在原点的渐近稳定性. 为借助这一工具讨论马氏切换扩散过程的 f-指数遍历判别, 先介绍下 M-矩阵理论, 详见文献 [31]. 矩阵或者向量 $x \gg 0$ 表示 x 的每一个元素大于零, $x \ll 0$ 表示 $-x \gg 0$.

命题 8 [31] 下列叙述是等价的.

(a) A 是一个非奇异 $n \times n$ 的 M-矩阵.

(b) A 所有的主子式是正定的, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0,$$

对 $k = 1, 2, \cdots, n$ 成立.

(c) A 的每个特征值是正的.

(d) A 是半正定的, 即 $\exists x \in \mathbb{R}^n$ 且 $x \gg 0$ 使得 $Ax \gg 0$.

为叙述定理, 作以下假设:

(A1) 存在 $x_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$, $\beta_i(\lambda_0) \in \mathbb{R}$ 使得

$$\widehat{K}(\lambda_0, x, i) = b(x,i)\lambda_0 + \frac{1}{2}\sigma^2(x,i)\lambda_0^2 \leqslant \beta_i(\lambda_0), \qquad x \geqslant x_0,\ i \in \mathbb{S}.$$

记 $\beta(\lambda) = \mathrm{diag}(\beta_1(\lambda), \beta_2(\lambda), \cdots, \beta_N(\lambda))$, 即 $\beta_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 生成的对角矩阵.

命题 9 若存在 $\lambda_0 > 0$ 使得 $-(Q + \beta(\lambda_0))$ 是一个非奇异的 M-矩阵且 (A1) 成立, 则存在 $\xi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}_+$ 使得

$$\varlimsup_{x\to\infty} \sup_i K(\lambda_0, x, i) < 0.$$

进而, 设假设 H1−H2 成立且马氏过程全不可约, 则带马氏切换的扩散过程 V_{λ_0} 指数遍历.

命题 10 (文献 [14] 定理 2.3) 设 H1 − H2 成立, 若存在 $\lambda_0 > 0$ 使得 $-(Q+\beta(\lambda_0))$ 是一个非奇异的 M - 矩阵且 (A1) 成立, 则马氏过程 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ (全变差) 指数遍历.

文献 [14] 中的定理 2.3 关于全变差指数遍历的判别条件可以得到本文定理 6 中的条件成立, 进而根据定理 6 得到带切换扩散过程的 f - 指数遍历性. 可见相比较全变差指数遍历条件, 定理 6 所给条件某些程度上减弱了.

命题 9 的证明: 由于 $-(Q+\beta(\lambda_0))$ 是一个非奇异的 M - 矩阵, 根据命题 8 存在向量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)^{\mathsf{T}} \gg 0$ 使得 $(Q+\beta(\lambda_0))\boldsymbol{\xi} \ll 0$, 即每个元素小于 0,

$$\begin{aligned} K(\lambda_0,x,i) &= \widehat{K}(\lambda_0,x,i)+\frac{Q\xi(i)}{\xi_i} \\ &\leqslant \beta_i(\lambda_0)+\frac{Q\xi(i)}{\xi_i}=\frac{(Q+\beta(\lambda_0))\xi(i)}{\xi_i}<0, \qquad x\geqslant x_0,\ i\in\mathbb{S}. \end{aligned}$$

不等式的右边与 x 无关, 因此结论成立. □

命题 11 假设 H1 − H2 成立且马氏过程全不可约, $\mu=(\mu_i)_{i\in\mathbb{S}}$ 是 $(\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 的不变测度, 若存在 $\lambda_0>0$ 使得 (A1) 成立且 $\sum\limits_{i\in\mathbb{S}}\mu_i\beta_i(\lambda_0)<0$, 则存在 $\xi:\mathbb{S}\to\mathbb{R}_+$ 以及 $p_0>0$ 使得过程是 $V_{p_0}(x,i)=\mathrm{e}^{p_0x}\xi_i$ 指数遍历的.

命题 11 的证明: 记 $Q_p=Q+p\beta(\lambda_0)$,

$$\eta_p=-\max_{\gamma\in\mathrm{Spec}(Q_p)}\mathrm{Re}\gamma,$$

其中, $\mathrm{Spec}(Q_p)$ 指 Q_p 的谱. 根据文献 [14] 中定理 2.4 的证明方式 (或者文献 [7] 中命题 4.1) 结合 Perro-Frobenius 定理知, η_p 是 Q_p 的简单特征值且它对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}\gg 0$. 由于 $\sum\limits_{i\in\mathbb{S}}\mu_i\beta_i(\lambda_0)<0$, 根据文献 [7] 中命题 4.2, 知存在 $p_1>0$ 使得 $\eta_p>0$ 对 $0<p<p_1$ 成立. 固定 $p\in(0,\min\{1,p_1\})$ 和 $\boldsymbol{\xi}\gg 0$ 满足 $Q_p\boldsymbol{\xi}=(Q+p\beta(\lambda_0))\boldsymbol{\xi}=-\eta_p\boldsymbol{\xi}\ll 0$, 即每个元素小于 0. 对于如上取定的 p 和 $\boldsymbol{\xi}$, 取 $V_{\lambda_0p}(x,i)=\mathrm{e}^{p\lambda_0x}\xi_i$, $p\in(0,\min\{1,p_1\})$, 设 $\overline{V}_{\lambda_0p}$ 为 $V_{\lambda_0p}(x,i)$ 按照引理 7 前面论述修改的函数, 满足 $\overline{V}_{\lambda_0p}=V_{\lambda_0p}$, $x\geqslant x_0$, 则

$$\begin{aligned} \mathscr{A}\overline{V}_{\lambda_0p}(x,i) &= \mathscr{A}V_{\lambda_0p}(x,i) \\ &= \Big[pb(x,i)\lambda_0+\frac{1}{2}\sigma^2(x,i)p^2\lambda_0^2\Big]V_{\lambda_0p}(x,i)+QV_{\lambda_0p}(x,i) \\ &\leqslant p\Big[b(x,i)\lambda_0+\frac{1}{2}\sigma^2(x,i)\lambda_0^2\Big]V_{\lambda_0p}(x,i)+Q\xi(i)\cdot\mathrm{e}^{p\lambda_0x} \qquad (\text{因 } 0<p<1) \\ &\leqslant p\beta_i(\lambda_0)V_{\lambda_0p}(x,i)+Q\xi(i)\cdot\mathrm{e}^{p\lambda_0x} \qquad (\text{由 (A1)}) \\ &\leqslant (Q+p\beta(\lambda_0))\xi(i)\cdot\mathrm{e}^{p\lambda_0x} \\ &= -\eta_p\xi_i\cdot\mathrm{e}^{p\lambda_0x}=-\eta_pV_{\lambda_0p}(x,i)<0, \qquad x\geqslant x_0,\ i\in\mathbb{S}, \end{aligned}$$

即 $\overline{V}_{\lambda_0p}(x,i)$ 为 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 的 Lyapunov 函数, 令 $p_0=\lambda_0p$, 结论成立. □

设 $\xi:\mathbb{S}\to\mathbb{R}_+$, 记

$$\Delta(x,i)=b^2(x,i)-2\sigma^2(x,i)\frac{Q\xi(i)}{\xi_i}.$$

推论 12　设假设 H1−H2 成立且马氏过程全不可约. 若存在 $\xi:\mathbb{S}\to\mathbb{R}_+$, x_0 充分大使得

(a) $\sup\limits_{x\geqslant x_0}\inf\limits_{i\in\mathbb{S}}\dfrac{Q\xi(i)}{\xi_i}<0$;

(b) $\Delta(x,i)>0$ 且 $\inf\limits_{i\in\mathbb{S}}\dfrac{-b(x,i)+\sqrt{\Delta(x,i)}}{\sigma^2(x,i)}\geqslant\sup\limits_{i\in\mathbb{S}}\dfrac{-b(x,i)-\sqrt{\Delta(x,i)}}{\sigma^2(x,i)}$, $x\geqslant x_0$.

则存在 $\lambda>0$ 使得 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant0}$ 是 $V_\lambda(x,i)=\mathrm{e}^{\lambda x}\xi_i$ 指数遍历的且有唯一的平稳分布 π 满足 $\pi(V_\lambda)<\infty$.

推论 12 的证明:　根据定理 6, 只需要保证 $\varlimsup\limits_{x\to\infty}\sup\limits_{i}K(\lambda,x,i)<0$. 由于

$$K(\lambda,x,i)=b(x,i)\lambda+\frac{1}{2}\sigma^2(x,i)\lambda^2+\frac{Q\xi(i)}{\xi_i},$$

为了使得表达式小于零, 作为 λ 的函数, 令判别式 $\Delta(x,i)$ 大于零, 且要求在正半轴有大于零的公共解. 设 $y_1(x,i)<y_2(x,i)$ 分别为二次方程 $K(\lambda,x,i)=0$ 的两个解, 即需 $\inf\limits_{i\in\mathbb{S}}y_2(x,i)>0$, $\sup\limits_{i\in\mathbb{S}}y_1(x,i)\leqslant\inf\limits_{i\in\mathbb{S}}y_2(x,i)$, 整理即得.　□

例 13　考虑取值于 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$ 原点反射的带马氏切换扩散过程 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant0}$ 满足 $b(x,i)=b_ix$, $\sigma(x,i)=\sigma_i$, $(x,i)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$, $(\Lambda(t))_{t\geqslant0}$ 对应的 Q-矩阵保守不可约. 若 $\max\limits_{i\in\mathbb{S}}b_i<0$, 则过程 $V_\lambda(x,i)=\mathrm{e}^{\lambda x}\xi_i$ 指数遍历, 其中 $\lambda>0$, $\xi:\mathbb{S}\to\mathbb{R}_+$.

事实上, 由于

$$K(\lambda,x,i)=b_ix\lambda+\frac{\lambda^2}{2}\sigma_i^2+\frac{Q\xi(i)}{\xi_i},$$

显然, 对于任意给定的 $\lambda>0$, $\xi\gg0$, 总是存在 $x_0>0$ 使得

$$\sup_{x\geqslant x_0,i\in\mathbb{S}}K(\lambda,x,i)<0.$$

根据定理 6 知结论成立.

例 14　考虑取值于 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$ 原点反射的带马氏切换扩散过程 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant0}$ 满足 $b(x,i)=b_i$, $\sigma(x,i)=\sigma_i$, $(x,i)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$, $(\Lambda_t)_{t\geqslant0}$ 对应的 Q-矩阵保守不可约. 易见

$$K(\lambda,x,i)=b_i\lambda+\frac{\lambda^2}{2}\sigma_i^2+\frac{Q\xi(i)}{\xi_i}.$$

取 $\beta_i(\lambda)=b_i\lambda+\lambda^2\sigma_i^2/2$, 则该过程满足假设 (A1) 对任意给定的 $\lambda>0$ 成立, 因此, 设 $\mu=(\mu_i)_{i\in\mathbb{S}}$ 为 $(\Lambda(t))_{t\geqslant0}$ 的不变测度, 根据命题 11, 若存在 $\lambda_0>0$ 使得 $\sum\limits_{i\in\mathbb{S}}\mu_i\beta_i(\lambda_0)<0$, 则存在 $\xi:\mathbb{S}\to\mathbb{R}_+$ 以及 $p_0>0$ 使得过程 $V_{p_0}(x,i)=\mathrm{e}^{p_0x}\xi_i$ 指数遍历.

§3. 指数收敛速率估计

本节通过耦合方法讨论原点反射的带切换扩散过程 f-指数遍历速率估计, 首先对 Lyapunov 函数做修正.

定义 15 设 $\tau<\infty$ 为一个停时. 称函数 $V:\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}\to[1,\infty)$ 是马氏过程 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 指数为 $\kappa>0$ 的修正的 Lyapunov 函数, 若任给定 $(X_0,\Lambda_0)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$, 下列过程是上鞅:

$$M(t):=V(X(t\wedge\tau),\Lambda(t\wedge\tau))+\kappa\int_0^{t\wedge\tau}V(X(s),\Lambda(s))\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant 0.$$

注记 16 定义 15 中马氏过程的指数 $\kappa>0$ 修正的 Lyapunov 函数可以看作是定义 1 中指数 $\kappa>0$ 的 Lyapunov 函数的推广, 即若函数 V 是定义 1 中指数 $\kappa>0$ 的 Lyapunov 函数, 可以直接证明 V 是马氏过程的指数 $\kappa>0$ 的修正的 Lyapunov 函数.

事实上, 由于 $\mathscr{A}$ 是 $Z(t):=(X(t),\Lambda(t))$ 的生成元, 则下面的过程是局部鞅:

$$A(t):=V(Z(t))-\int_0^t\mathscr{A}V(Z(s))\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant 0.$$

由定义 1 知, 存在常数 a, $\kappa>0$, 紧集 $C\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$, 有限集合 $N\subset\mathbb{S}$ 使得

$$\mathscr{A}V(x,i)\leqslant-\kappa V(x,i)+a\mathbf{1}_{C\times N}(x,i),\qquad (x,i)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}.$$

考虑过程

$$\overline{M}(t):=V(Z(t))-\int_0^t[-\kappa V(Z(s))+a\mathbf{1}_{C\times N}(Z(s))]\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant 0.$$

由于

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\overline{M}(t)\,|\,\mathscr{F}_s)&=\mathsf{E}(A(t)+\overline{M}(t)-A(t)\,|\,\mathscr{F}_s)\\
&=A(s)+\mathsf{E}\Big(\int_0^t\mathscr{A}V(Z(u))\mathrm{d}u-\int_0^t[-\kappa V(Z(u))+a\mathbf{1}_{C\times N}(Z(u))]\mathrm{d}u\,\Big|\,\mathscr{F}_s\Big)\\
&=A(s)+\int_0^s\{\mathscr{A}V(Z(u))-[-\kappa V(Z(u))+a\mathbf{1}_{C\times N}(Z(u))]\mathrm{d}u\}\\
&\quad+\mathsf{E}\Big(\int_s^t\{\mathscr{A}V(Z(u))-[-\kappa V(Z(u))+a\mathbf{1}_{C\times N}(Z(u))]\}\mathrm{d}u\,\Big|\,\mathscr{F}_s\Big)\\
&=\overline{M}(s)+\mathsf{E}\Big(\int_s^t\{\mathscr{A}V(Z(u)-[-\kappa V(Z(u))+a\mathbf{1}_{C\times N}(Z(u))]\}\mathrm{d}u\,\Big|\,\mathscr{F}_s\Big)\\
&\leqslant\overline{M}(s).
\end{aligned}$$

因此, $\overline{M}(t)$ 是局部上鞅. 由 $\overline{M}(t)$ 有下界, 根据 Fatou 引理知 $\overline{M}(t)$ 是上鞅. 取 $\tau=\inf\{t\geqslant 0:(X(t),\Lambda(t))\in C\times N\}$, 则 τ 为停时, 由停时定理可知过程 $M(t)=\overline{M}(t\wedge\tau)$, $t\geqslant 0$ 也是上鞅, 即证得 V 为修正的 Lyapunov 函数.

定义 17 称随机变量 X_1 随机大于随机变量 X_2 若 $\mathsf{P}(X_1 \leqslant x) \leqslant \mathsf{P}(X_2 \leqslant x)$ 对任给的 $x \in \mathbb{R}$ 成立. 设 $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ 为初始状态分别为 X_1, X_2 的 $(Z(t))_{t\geqslant 0}$ 的两个版本, 若 X_1 随机大于 X_2, 则任意给定的 t, $Z_1(t)$ 总是随机大于 $Z_2(t)$, 称随机过程 $(Z(t))_{t\geqslant 0}$ 关于它的初始状态是随机保序的.

许多常见的过程满足关于初始状态随机保序, 例如, $M/G/1$ 排队模型、生灭过程、存储模型等[29]. 本文后面总假设固定环境下扩散过程是正常返且关于出发点随机保序.

设
$$C(x,i)=\int_0^x \frac{2b(u,i)}{\sigma^2(u,i)}\mathrm{d}u, \qquad \mu_i[x,y]=\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{C(u,i)}}{\sigma^2(u,i)}\mathrm{d}u,$$
根据文献 [18] 知固定环境 $i \in \mathbb{S}$ 下扩散过程正常返的充要条件是
$$\int_0^\infty \mu_i[0,x]\mathrm{e}^{-C(x,i)\mathrm{d}u}=\infty, \qquad \mu_i[0,\infty)<\infty$$
同时成立. 对原点反射边界的带切换扩散过程, 当固定环境下扩散过程常返时, 关于其指数收敛速率有如下结论:

定理 18 假设 $((X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}$ 上是原点为反射边界带马氏切换的扩散过程, 固定环境下扩散过程是随机保序且常返的. $(P^t)_{t\geqslant 0}$ 为该过程对应的 Feller 连续的强马氏半群. 若 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 存在指数为 $k>0$ 的修正的 Lyapunov 函数 V, 则

(a) $\forall\, x_1,x_2 \in \mathbb{R}_+$, $i,j\in\mathbb{S}$ 有
$$\|P^t((x_1,i),\cdot)-P^t((x_2,j),\cdot)\|_V \leqslant [V(x_1,i)+V(x_2,j)]\mathrm{e}^{-kt}, \qquad t\geqslant 0.$$

(b) $\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$ 上的初始分布 μ_1,μ_2 满足 $\mu_1(V)<\infty$ 和 $\mu_2(V)<\infty$, 则有
$$\|\mu_1P^t-\mu_2P^t\|_V \leqslant [\mu_1(V)+\mu_2(V)]\mathrm{e}^{-kt}, \qquad t\geqslant 0.$$

(c) 如果马氏过程 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 有平稳分布 π 满足 $\pi(V)<\infty$, 则这个平稳分布是唯一的, 且过程是 V 指数遍历的, 指数收敛速率为 k. 进一步有
$$\|P^t((x,j),\cdot)-\pi\|_V \leqslant [\pi(V)+V(x,j)]\mathrm{e}^{-kt}, \qquad t\geqslant 0.$$

定理 18 证明: (a) 考虑 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 的两个版本 $(X_1(t),\Lambda_1(t))_{t\geqslant 0}$, $(X_2(t),\Lambda_2(t))_{t\geqslant 0}$ 分别满足 $(X_1(0),\Lambda_1(0))=(x_1,i)$, $(X_2(0),\Lambda_2(0))=(x_2,j)$. 构造 $(X_1(t),\Lambda_1(t))_{t\geqslant 0}$ 与 $(X_2(t),\Lambda_2(t))_{t\geqslant 0}$ 的耦合如下 (详见文献 [13]):

(i) $i\neq j$ 时, $(X_1(t),\Lambda_1(t))_{t\geqslant 0}$ 与 $(X_2(t),\Lambda_2(t))_{t\geqslant 0}$ 独立的按照各自的轨道演变直到二者跳到同一个环境, 即 $\tau_0=\inf\{t\geqslant 0:\Lambda_1(t)=\Lambda_2(t)\}$ 时刻.

(ii) 由于 $\tau_0 = \inf\{t \geqslant 0 : \Lambda_1(t) = \Lambda_2(t)\}$, 则 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$, $t \geqslant \tau_0$ 为相同子环境下的两个扩散过程, 按照通常扩散过程独立耦合进行. 由于扩散过程关于出发点随机保序, 若 $X_1(\tau_0) \leqslant X_2(\tau_0)$, 则 $X_1(t) \leqslant X_2(t)$, $t \geqslant \tau_0$, 否则 $X_1(t) \geqslant X_2(t)$, $t \geqslant \tau_0$. 相遇后按照相同的轨道演变.

定义停时 $\tau_i = \inf\{t \geqslant \tau_0 : X_i(t) = 0\}$, $i = 1, 2$, 以及

$$\widehat{\tau}(0) = \tau_1 \mathbf{1}_{\{X_1(\tau_0) \geqslant X_2(\tau_0)\}} + \tau_2 \mathbf{1}_{\{X_1(\tau_0) < X_2(\tau_0)\}}.$$

由于固定环境下每个过程正常返且关于初始点随机保序, 若 $X_1(\tau_0) \leqslant X_2(\tau_0)$, 则 $X_1(\widehat{\tau}(0)) \leqslant X_2(\widehat{\tau}(0)) = X_2(\tau_2) = 0$, 若 $X_2(\tau_0) \leqslant X_1(\tau_0)$, 则 $X_2(\widehat{\tau}(0)) \leqslant X_1(\widehat{\tau}(0)) = X_1(\tau_1) = 0$, 又由于 0 点为反射边界, 因此 $\widehat{\tau}(0)$ 为随机耦合的时间. 取可测函数 $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}$, 使得 $|g| \leqslant V$, 为证明结论成立, 需要估计下式上界:

$$|\mathsf{E}g(X_1(t), \Lambda_1(t)) - \mathsf{E}g(X_2(t), \Lambda_2(t))|.$$

由于 $((X_1(t), \Lambda_1(t))_{t \geqslant \widehat{\tau}(0)}$ 和 $((X_2(t), \Lambda_2(t))_{t \geqslant \widehat{\tau}(0)}$ 的轨道与分布相同. 因此,

$$\mathsf{E}|g(X_1(t), \Lambda_1(t))| \mathbf{1}_{\{t \geqslant \widehat{\tau}(0)\}} = \mathsf{E}|g(X_2(t), \Lambda_2(t))| \mathbf{1}_{\{t \geqslant \widehat{\tau}(0)\}}. \tag{3}$$

由于

$$\begin{aligned} &|\mathsf{E}g(X_1(t), \Lambda_1(t)) \mathbf{1}_{\{t \leqslant \widehat{\tau}(0)\}} - \mathsf{E}g(X_2(t), \Lambda_2(t)) \mathbf{1}_{\{t \leqslant \widehat{\tau}(0)\}}| \\ \leqslant\ & \mathsf{E}|g(X_1(t), \Lambda_1(t))| \mathbf{1}_{\{t \leqslant \widehat{\tau}(0)\}} + \mathsf{E}|g(X_2(t), \Lambda_2(t))| \mathbf{1}_{\{t \leqslant \widehat{\tau}(0)\}}. \end{aligned} \tag{4}$$

只需对上式不等式右边第一项进行估计, 由 $|g| \leqslant V$ 得

$$\mathsf{E}|g(X_1(t), \Lambda_1(t))| \mathbf{1}_{\{t \leqslant \widehat{\tau}(0)\}} \leqslant \mathsf{E}V(X_1(t), \Lambda_1(t)) \mathbf{1}_{\{t \leqslant \widehat{\tau}(0)\}}. \tag{5}$$

记

$$\widetilde{M}(t) = \mathrm{e}^{k(t \wedge \widehat{\tau}(0))} V(X_1(t \wedge \widehat{\tau}(0)), \Lambda_1(t \wedge \widehat{\tau}(0))), \qquad t \geqslant 0.$$

则

$$\mathrm{e}^{kt} \mathsf{E}V(X_1(t), \Lambda_1(t)) \mathbf{1}_{\{t \leqslant \widehat{\tau}(0)\}} \leqslant \mathsf{E}[\widetilde{M}(t)].$$

可以证明 $\widetilde{M}(t)$ 是上鞅, 进而

$$\mathsf{E}\widetilde{M}(t) \leqslant \mathsf{E}\widetilde{M}(0) = V(x_1, i).$$

结合 (5), 可知关于 (4) 右边第一项有

$$\mathsf{E}|g(X_1(t), \Lambda_1(t))| \mathbf{1}_{\{t \leqslant \widehat{\tau}(0)\}} \leqslant \mathrm{e}^{-kt} V(x_1, i).$$

同理, 关于 (4) 右边第二项有

$$\mathsf{E}|g(X_2(t),\Lambda_2(t))|1_{\{t\leqslant\widehat{\tau}(0)\}}\leqslant \mathrm{e}^{-kt}V(x_2,j).$$

结合 (3) 和 (4) 得

$$|\mathsf{E}g(X_1(t),\Lambda_1(t))-\mathsf{E}g(X_2(t),\Lambda_2(t))|\leqslant [V(x_1,i)+V(x_2,j)]\mathrm{e}^{-kt},\qquad t\geqslant 0.$$

上式关于 $|g|\leqslant V$ 取上确界, 即得 (a).

最后补充证明 $\widetilde{M}(t)$ 是上鞅. 事实上, 由于 V 为修正的 Lyapunov 函数, 可知

$$M(t)=V(X_1(t\wedge\widehat{\tau}(0)),\Lambda_1(t\wedge\widehat{\tau}(0)))+k\int_0^{t\wedge\widehat{\tau}(0)}V(X_1(s),\Lambda_1(s))\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant 0$$

是上鞅. 对 $\widetilde{M}(t)(t\leqslant\widehat{\tau}(0))$ 用 Itô 公式, 得

$$\mathrm{d}\widetilde{M}(t)=k\mathrm{e}^{kt}V(X_1(t),\Lambda_1(t))\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{kt}\mathrm{d}V(X_1(t),\Lambda_1(t))=\mathrm{e}^{kt}\mathrm{d}M(t),\qquad t\leqslant\widehat{\tau}(0).\tag{6}$$

由于 $\widetilde{M}(t)$ 在 $[\widehat{\tau}(0),\infty)$ 为常数, (6) 式对 $t\geqslant\widehat{\tau}(0)$ 也成立. 根据 Doob-Mayer 分解定理以及 (6) 知, 存在局部鞅 $\widetilde{M_1}(t)$、非增的过程 $\widetilde{M_2}(t)$ 使得 $\widetilde{M}(t)=\widetilde{M_1}(t)+\widetilde{M_2}(t)$, 因此 $\widetilde{M}(t)$ 是局部上鞅. 由于 $\widetilde{M}(t)$ 有下界, 根据 Fatou 引理, $\widetilde{M}(t)$ 是上鞅.

(b) 下面式子以 $(x_1,i)\times(x_2,j)$ 为初始点关于 $\mu_1\times\mu_2$ 积分,

$$|\mathsf{E}g(X_1(t),\Lambda_1(t))-\mathsf{E}g(X_2(t),\Lambda_2(t))|\leqslant [V(x_1,i)+V(x_2,j)]\mathrm{e}^{-kt},\qquad t\geqslant 0.$$

再关于 $|g|\leqslant V$ 取上确界可得 (b).

(c) 运用 (b) 的结论, 令 $\mu_1=\pi$, $\mu_2=\delta_{(x,j)}$. □

定理 19 假设 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$ 上原点为反射边界的带马氏切换扩散过程, 满足假设 H1 – H2 成立. 若存在 $\lambda>0$ 以及 $\xi:\mathbb{S}\to\mathbb{R}_+$ 使得

$$K_{\max}(\lambda):=\sup_{x>0,i\in\mathbb{S}}K(\lambda,x,i)<0,$$

则马氏过程 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 是 $V_\lambda=\mathrm{e}^{\lambda x}\xi_i$ 指数遍历, 收敛速率为 $|K_{\max}(\lambda)|$, 且存在唯一的平稳分布 π 满足 $\pi(V_\lambda)<\infty$.

定理 19 的证明: 根据定理 6 知存在 $\lambda>0$ 以及 $\xi:\mathbb{S}\to\mathbb{R}_+$ 使得唯一的平稳分布 π 满足 $\pi(V_\lambda)<\infty$. 根据定理 18 知只需证明对于上述 λ, V_λ 是 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 指数为 $|K_{\max}(\lambda)|$ 修正的 Lyapunov 函数. 设 $\eta>0$, $\tau(\eta)=\inf\{t>0:X_t\leqslant\eta\}$. 记 $Z(t)=(X(t),\Lambda(t))$, 下面证明

$$M(t):=V_\lambda(Z(t\wedge\tau(\eta)))+|K_{\max}(\lambda)|\int_0^{t\wedge\tau(\eta)}V_\lambda(Z(s))\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant 0$$

是上鞅. 设 $\mathscr{A}$ 是 $(Z(t))_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元. 根据前面的论述知, 可以构造 $\overline{V}_\lambda$ 使得 $V_\lambda(x,i)=\overline{V}_\lambda(x,i)$, $x\geqslant\eta$, $i\in\mathbb{S}$ 成立, 并且

$$\mathscr{A}\overline{V}_\lambda(x,i)=K(\lambda,x,i)\overline{V}_\lambda(x,i)\leqslant K_{\max}(\lambda)\overline{V}_\lambda(x,i)=-|K_{\max}(\lambda)|\overline{V}_\lambda(x,i),\qquad x\geqslant\eta,\ i\in\mathbb{S}.$$

由于 $\mathscr{A}$ 是 $(Z(t))_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元, 则下面的过程是局部鞅:

$$\overline{V}_\lambda(Z(t))-\int_0^t\mathscr{A}\overline{V}_\lambda(Z(s))\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant 0.$$

利用注记 16 的论述, 可知

$$\overline{V}_\lambda(Z(t\wedge\tau(\eta)))+|K_{\max}(\lambda)|\int_0^{t\wedge\tau(\eta)}\overline{V}_\lambda(Z(s))\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant 0$$

是上鞅. 当 $t\geqslant\tau(\eta)$ 时, $Z(t\wedge\tau(\eta))=Z(\tau(\eta))=(\eta,i)$, $i\in\mathbb{S}$, 有

$$V_\lambda(Z(t\wedge\tau(\eta)))=V_\lambda(\eta,i)=\overline{V}_\lambda(\eta,i)=\overline{V}_\lambda(Z(t\wedge\tau(\eta))),\qquad t\geqslant\tau(\eta);$$

当 $t\leqslant\tau(\eta)$ 时, $Z(t\wedge\tau(\eta))=Z(t)$, $X(t)\geqslant\eta$, 有

$$V_\lambda(Z(t\wedge\tau(\eta)))=V_\lambda(Z(t))=\overline{V}_\lambda(Z(t))=\overline{V}_\lambda(Z(t\wedge\tau(\eta))),\qquad t\leqslant\tau(\eta).$$

故

$$M(t)=V_\lambda(Z(t\wedge\tau(\eta)))+|K_{\max}(\lambda)|\int_0^{t\wedge\tau(\eta)}V_\lambda(Z(s))\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant 0$$

是上鞅, 因此 V_λ 是指数为 $|K_{\max}(\lambda)|$ 的修正的 Lyapunov 函数. □

例 20 设 $Q=[0]$, 即无切换, 原点反射边界的切换过程退化为反射扩散过程 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 满足 $b(x,i)=b(x)$, $\sigma(x,i)=1$, $(x,i)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}$. 若 $\bar{b}:=-\sup\limits_{x>0}b(x)>0$, 则

$$K_{\max}(\lambda)=\sup_{x>0}\Big(b(x)\lambda+\frac{\lambda^2}{2}\Big)=-\bar{b}\lambda+\frac{\lambda^2}{2}.$$

根据定理 19, 反射过程 $V_{\bar{b}}=\mathrm{e}^{\bar{b}x}$ 指数遍历的收敛速率为 $\bar{b}^2/2$. 这一结论包含了文献 [29] 中关于半直线上具有负漂移项的反射布朗运动情形.

例 21 考虑例子 14 中原点反射边界的切换过程退化为反射扩散过程 $(X(t),\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 满足 $b(x,i)=b_i$, $\sigma(x,i)=\sigma_i$, $(x,i)\in\mathbb{R}_+\times\{1,2\}$. 设 $b_i=-2$, $\sigma_i=1$, $i=1,2$, $(\Lambda(t))_{t\geqslant 0}$ 对应的 Q- 矩阵满足 $q_{12}=-q_{11}=1$, $-q_{22}=q_{21}=q$, $q\in(0,3]$. 不妨取 $\xi_1=1$, 计算得

$$K(\lambda,x,1)=-2\lambda+\frac{\lambda^2}{2}+(-1+\xi_2);\qquad K(\lambda,x,2)=-2\lambda+\frac{\lambda^2}{2}+\Big(-1+\frac{q}{\xi_2}\Big),$$

因此, 存在 $\xi_2>0$ 以及 $0<\lambda<2+\sqrt{6-2\sqrt{q}}$ 使得过程 V_λ 指数遍历. 例如 $q=1$, 则可取 $\lambda=1$, $\xi_2=2$, 知 $V_1(x,1)=\mathrm{e}^x$, $V_1(x,2)=2\mathrm{e}^x$. 因此, 过程 V_1 指数遍历且收敛速率为 $1/2$.

致谢 本文作者王玲娣感谢邵井海教授对改进本文提出的宝贵建议.

参 考 文 献

[1] BOXMA O, KASPI H, KELLA O, et al. On/off storage systems with state-dependent input, output, and switching rates [J]. *Probab Engrg Inform Sci*, 2005, **19(1)**: 1–14.

[2] COLLET P, MARTÍNEZ S, MÉLÉARD S, et al. Stochastic models for a chemostat and long-time behavior [J]. *Adv Appl Probab*, 2013, **45(3)**: 822–836.

[3] CRUDU A, DEBUSSCHE A, MULLER A, et al. Convergence of stochastic gene networks to hybrid piecewise deterministic processes [J]. *Ann Appl Probab*, 2012, **22(5)**: 1822–1859.

[4] DIACONIS P, FREEDMAN D. Iterated random functions [J]. *SIAM Rev*, 1999, **41(1)**: 45–76.

[5] SMITH W L. Necessary conditions for almost sure extinction of a branching process with random environment [J]. *Ann Math Statist*, 1968, **39(6)**: 2136–2140.

[6] BAKHTIN Y, HURTH T. Invariant densities for dynamical systems with random switching [J]. *Nonlinearity*, 2012, **25(10)**: 2937–2952.

[7] BARDET J B, GUÉRIN H, MALRIEU F. Long time behavior of diffusions with Markov switching [J]. *ALEA Lat Am J Probab Math Stat*, 2010, **7**: 151–170.

[8] DE SAPORTA B, YAO J F. Tail of a linear diffusion with Markov switching [J]. *Ann Appl Probab*, 2005, **15(1B)**: 992–1018.

[9] GUYON X, IOVLEFF S, YAO J F. Linear diffusion with stationary switching regime [J]. *ESAIM Probab Stat*, 2004, **8**: 25–35.

[10] GHOSH M K, ARAPOSTATHIS A, MARCUS S I. Optimal control of switching diffusions with application to flexible manufacturing systems [J], *SIAM J Control Optim*, 1993, **31(5)**: 1183–1204.

[11] MAO X R, YUAN C G. *Stochastic Differential Equations with Markovian Switching* [M]. London: Imperial College Press, 2006.

[12] YIN G, ZHU C. *Hybrid Switching Diffusions: Properties and Applications* [M]. New York: Springer-Verlag, 2010.

[13] CLOEZ B, HAIRER M. Exponential ergodicity for Markov processes with random switching [J]. *Bernoulli*, 2015, **21(1)**: 505–536.

[14] SHAO J H. Criteria for transience and recurrence of regime-switching diffusion processes [J]. *Electron J Probab*, 2015, 20(63): 1–15.

[15] SHAO J H, XI F B. Strong ergodicity of the regime-switching diffusion processes [J]. *Stochastic Process Appl*, 2013, **123(11)**: 3903–3918.

[16] SHAO J H. Ergodicity of regime-switching diffusions in Wasserstein distances [J]. *Stochastic Process Appl*, 2015, **125(2)**: 739–758.

[17] ZHANG F X. Exponential convergence of coupled diffusion processes [J]. *J Math Phys*, 2005, **46(6)**: 063304, 8 pages.

[18] CHEN M F. *Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory* [M]. London: Springer, 2005.

[19] CHEN M F. Speed of stability for birth-death processes [J]. *Front Math China*, 2010, **5(3)**: 379–515.

[20] WANG F Y. *Functional Inequalities, Markov Semigroups and Spectral Theory* [M]. Beijing: Science Press, 2005.

[21] CHEN M F, WANG F Y. Estimation of spectral gap for elliptic operators [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1997, **349(3)**: 1239–1267.

[22] CHEN M F. Estimate of exponential convergence rate in total variation by spectral gap [J]. *Acta Math Sinica* (*New Ser*), 1998, **14(1)**: 9–16.

[23] CHEN M F. Eigenvalues, inequalities and ergodic theory (II) [J]. *Adv Math* (*China*), 1999, **28(6)**: 481–505.

[24] CHEN M F. Capacitary criteria for Poincaré-type inequalities [J]. *Potential Anal*, 2005, **23(4)**: 303–322.

[25] SARANTSEV A. Explicit rates of exponential convergence for reflected jump-diffusions on the half-line [J]. *ALEA Lat Am J Probab Math Stat*, 2016, **13(2)**: 1069–1093.

[26] SKOROKHOD A V. *Asymptotic Methods in the Theory of Stochastic Differential Equations* [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1989.

[27] DOWN D, MEYN S P, TWEEDIE R L. Exponential and uniform ergodicity of Markov processes [J]. *Ann Probab*, 1995, **23(4)**: 1671–1691.

[28] XI F B, ZHU C. On Feller and strong Feller properties and exponential ergodicity of regime-switching jump diffusion processes with countable regimes [J]. *SIAM J Control Optim*, 2017, **55(3)**: 1789–1818.

[29] LUND R B, MEYN S P, TWEEDIE R L. Computable exponential convergence rates for stochastically ordered Markov processes [J]. *Ann Appl Probab*, 1996, **6(1)**: 218–237.

[30] SHAO J H, WANG L D. Variational formula for the stability of regime-switching diffusion processes [J]. *Sci China Math*, 2018, **61(4)**: 659–676.

[31] BERMAN A, PLEMMONS R J. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences* [M]. Philadelphia: SIAM Press, 1994.

Exponential Ergodic Rates of Markov Switching Diffusion Processes

WANG Lingdi[1,3] REN Panpan[2,1]

([1] *School of Mathematics and Statistics, Henan University, 475004, Kaifeng, China*)

([2] *Xiayi No.1 High School, 476400, Shangqiu, China*)

([3] *Postdoctoral of Henan University, 475004, Kaifeng, China*)

Abstract: In this paper, we discuss the exponential ergodicity of Markov switching diffusion processes, presenting criteria of f-exponential ergodicity for the processes with reflecting boundary at origin. When the one-dimensional diffusion processes are stochastically ordered for any fixed environment, the explicit estimates of the exponential ergodic rate for the process are investigated by means of the coupling method.

Keywords: Lyapunov function; diffusion process with Markov switching; M-matrix; stochastically ordered

2010 Mathematics Subject Classification: 60K37; 60J10; 60J70