应用概率统计 第 37 卷
第 2 期 2021 年 4 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Apr., 2021, Vol. 37, No. 2, pp. 181-191
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2021.02.006

具马尔可夫切换和多个时滞脉冲的随机系统的稳定性 *

赵海清⋆ 潘立军

(岭南师范学院数学与统计学院, 湛江, 524048)

摘 要: 本文研究了具马尔可夫切换和多个时滞脉冲的随机系统 p 阶矩指数稳定, 状态变量的脉冲增益依赖于多个有限时变时滞. 利用随机分析和脉冲技巧, 得到系统新的稳定性准则, 并举例说明结果的有效性.

关键词: 马尔可夫链; 随机系统; 时滞; 脉冲

中图分类号: O211.63

英文引用格式: ZHAO H Q, PAN L J. Stability of stochastic systems with Markov switching and several delayed impulses [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2021, 37(2): 181–191. (in Chinese)

§1. 引 言

随机系统由于广泛应用于经济、物理和工程等多个领域而引起人们的兴趣[1,2]. 近年来, 随机系统动力学理论迅速发展, 出现许多随机系统稳定性的研究成果[3,4]. 然而, 生态环境中广泛存在有色噪声, 可以描述为两个或多个系统的切换, 如果切换是无记忆性, 则切换可以用有限状态的马尔可夫链描述. 有关具马尔可夫切换的随机系统的研究成果, 早期的研究可见 Mariton[5]、Mao[6] 及 Ji 和 Chizeck[7] 等人的工作. 在文献 [8] 中, Fang 研究了具有限状态马尔可夫跳线性系统的随机稳定性. 文献 [9] 利用连续时间马尔可夫链的遍历理论和矩阵测度方法, 得到具马尔可夫切换复杂网络几乎必然拟同步准则. 另外, 其它的一些有关具马尔可夫切换系统的动力学结果可参考文献 [10, 11].

在自然界中, 经常在一定时刻瞬时突变而产生脉冲现象, 这类现象的数学模型用脉冲系统来描述. 由于脉冲系统广泛应用于科学与工程各个领域受到人们的关注, 得到很多相应的脉冲系统动力学结果[12–18]. 例如, 文献 [14] 利用 Lyapunov 函数研究了脉冲随机泛函系统的 p 阶矩指数稳定和几乎必然稳定. 文献 [15] 利用 Razumikhin 技巧, 得到具持续脉冲时滞系统的稳定性定理. 然而, 有关脉冲时滞系统和脉冲随机时滞系统的稳定性结果中的状态变量的脉冲大多数和时滞无关. 目前, 脉冲增益依赖于时滞的随机系统的稳定性结果还很少.

*广东省科技计划项目 (批准号: 2017A030303085) 和岭南师范学院人才专项项目 (批准号: ZL2037) 资助.

⋆通讯作者, E-mail: zhaohq@lingnan.edu.cn.

本文 2020 年 7 月 30 日收到, 2020 年 9 月 6 日收到修改稿.

本文研究一类具马尔可夫切换和多个时滞脉冲的随机系统的稳定性, 状态变量的脉冲增益依赖于多个时滞, 系统状态的切换服从马尔可夫过程. 利用 Lyapunov 稳定性理论、随机分析和脉冲技巧, 得到脉冲随机切换系统的稳定性准则, 并举例说明理论结果的有效性.

§2. 模型描述与预备知识

设 $R=(-\infty,+\infty)$, $R^+=[0,+\infty)$, R^n 是范数为 $|\cdot|$ 的 n-维欧氏空间. 若 A 是一向量或矩阵, 则 $A^\intercal$ 表示 A 的转置, 其范数 $|A|=\sqrt{\lambda_{\max}(A^\intercal A)}$, 其中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 是矩阵的最大特征值. 设 $\omega(t)=(\omega_1(t),\omega_2(t),\cdots,\omega_n(t))^\intercal$ 是完备的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{P})$ 中的 n 维布朗运动, $\mathsf{E}[\cdot]$ 是数学期望, $r(t)$ $(t>0)$ 是概率空间中取值为有限值 $S=\{1,2,\cdots,N\}$ 的右连续马尔可夫链, 其转移矩阵 $\Gamma=(\gamma_{ij})_{N\times N}$, 且

$$\mathsf{P}\{r(t+\triangle)=j\,|\,r(t)=i\}=\begin{cases}\gamma_{ij}\triangle+o(\triangle), & i\neq j,\\ 1+\gamma_{ij}\triangle+o(\triangle), & i=j,\end{cases}$$

其中 $\triangle>0$, 这里 $\gamma_{ij}\geqslant 0$ 是 i 到 j 的转移概率, 且 $\gamma_{ii}=-\sum\limits_{i\neq j}\gamma_{ij}$.

设马尔可夫链 $r(t)$ 和布朗运动 $\omega(t)$ 是相互独立的. $\tau>0$, $\mathrm{PC}([-\tau,0];R^n)=\{\varphi:[-\tau,0]\to R^n\,|\,\varphi(t^+)$, $\varphi(t)$ 存在, $\varphi(t^-)=\varphi(t)\}$, 其中 $\varphi(t^+)$、$\varphi(t^-)$ 为函数 $\varphi(t)$ 在 t 处的左、右极限, 范数为 $\|\varphi\|=\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}|\varphi(\theta)|$. $\mathrm{PC}^b_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0];R^n)$ 表示 $\mathscr{F}_0$-可测的 $\mathrm{PC}([-\tau,0];R^n)$-值有界随机变量所构成的空间. 对于 $p>0$, $\mathrm{PC}^p_{\mathscr{F}_t}([-\tau,0];R^n)$ 表示 $\mathscr{F}_t$-可测且满足 $\int_{-\tau}^0\mathsf{E}[|\varphi(\theta)|^p]\mathrm{d}\theta<\infty$ 的 $\mathrm{PC}([-\tau,0];R^n)$-值随机变量 φ 所构成的空间.

考虑具马尔可夫切换和多个时滞脉冲的随机系统

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=f(t,x_t,x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_l(t)),r(t))\mathrm{d}t\\ \qquad\qquad +g(t,x_t,x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_l(t)),r(t))\mathrm{d}\omega(t), \qquad t\geqslant 0,\ t\neq t_k,\\ \triangle x(t_k)=I_k(t_k,x(t_k),x(t_k-\tau_1(t_k)),\cdots,x(t_k-\tau_l(t_k)),r(t_k)), \qquad k=1,2,\cdots,\\ x(t)=\xi, \qquad t\in[-\tau,0],\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\tau_j:R^+\to[0,\tau]$, $j=1,2,\cdots,l$, $\xi\in\mathrm{PC}^b_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0];R^n)$, $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^\intercal$, $x(t_k^+)=\lim\limits_{h\to 0+}x(t_k+h)$, $x(t_k)=\lim\limits_{h\to 0-}x(t_k+h)$, $t_k\geqslant 0$ 是脉冲时刻, 满足 $t_k<t_{k+1}$ 和 $\lim\limits_{k\to+\infty}t_k=+\infty$. $\triangle x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k)$ 表示在 t_k 处状态 x 的跳跃, I_k 为跳跃的大小, f, g, $I_k:R^+\times R^n\times\cdots\times R^n\times S\to R^n$, $k=1,2,\cdots$.

本文假设 f, g 和 I_k 满足 Lipschitz 条件, 且保证解在 $t\geqslant 0$ 时全局存在和唯一. 对于任一 $\xi\in\mathrm{PC}^b_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0];R^n)$, 唯一存在左连续右极限的随机过程 $x(t;\xi)$ 满足 (1). 又设 $f(t,0,\cdots,0,i)\equiv 0$, $g(t,0,\cdots,0,i)\equiv 0$ 和 $I_k(t,0,\cdots,0,i)\equiv 0$, $k=1,2,\cdots$, 使得 $x(t)\equiv 0$ 是唯一的平衡点.

设 $\mathscr{C}_1^2([-\tau,\infty)\times R^n\times S;R^+)$ 是 $[-\tau,\infty)\times R^n\times i$ 上所有非负函数 $V(t,x,i)$ 组成的函数族, 其中 $V(t,x,i)$ 在 $(t_{k-1},t_k]\times R^n\times i$ 上连续, V_t,V_x,V_{xx} 在 $(t_{k-1},t_k]\times R^n\times S$ 上连续. 任一 $V\in\mathscr{C}_1^2([-\tau,\infty)\times R^n\times S;R^+)$, 定义对应于系统 (1) 的算子 $\mathscr{L}V:(t_{k-1},t_k]\times \mathrm{PC}^b_{\mathscr{F}_t}([-\tau,0];R^n)\times S\to R$ 如下:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,x(t),i)=&V_t(t,x(t),i)+V_x(t,x(t),i)f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_l(t)),i)\\&+\frac{1}{2}\mathrm{trace}[g^{\mathsf{T}}(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_l(t)),i)V_{xx}(t,x(t),i)\\&\cdot g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_l(t)),i)]+\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}V(t,x(t),j),\end{aligned}$$

其中

$$V_t(t,x,i)=\frac{\partial V(t,x,i)}{\partial t},\qquad V_x(t,x,i)=\Big(\frac{\partial V(t,x,i)}{\partial x_1},\frac{\partial V(t,x,i)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V(t,x,i)}{\partial x_n}\Big),$$
$$V_{xx}(t,x,i)=\Big(\frac{\partial^2 V(t,x,i)}{\partial x_i x_j}\Big)_{n\times n}.$$

定义 1 系统 (1) 的零解称为是指数为 λ 的 p 阶矩指数稳定, 若存在 $M>0$ 使得对任意初值 $\xi\in\mathrm{PC}^b_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0];R^n)$ 和 $t\geqslant 0$,

$$\mathsf{E}[|x(t;\xi)|^p]\leqslant M\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathsf{E}[\|\xi\|^p].$$

特别地, 当 $p=2$ 时, 系统 (1) 的零解称之为均方指数稳定.

§3. 稳定性分析

定理 2 设 $V\in\mathscr{C}_1^2([-\tau,\infty)\times R^n\times S;R^+)$. 如果存在常数 $p>0$, $c_1>0$, $c_2>0$, $d_k^{(i)}\geqslant 0$, $\overline{d}_{jk}^{(i)}\geqslant 0$, $\overline{\eta}_j^{(i)}\geqslant 0$, $\lambda>0$, $\eta^{(i)}$, $i\in S$, $j=1,2,\cdots,l$, $k=1,2,\cdots$ 使得

(i) 对 $\forall(t,x,i)\in[-\tau,\infty)\times R^n\times S$, 则有 $c_1|x|^p\leqslant V(t,x,i)\leqslant c_2|x|^p$;

(ii) 对 $\forall t\in(t_{k-1},t_k]$ 和一切 $i\in S$,

$$\mathsf{E}[\mathscr{L}V(t,x(t),i)]\leqslant\eta^{(i)}\mathsf{E}[V(t,x(t),i)]+\sum_{j=1}^{l}\overline{\eta}_j^{(i)}\mathsf{E}[V(t-\tau_j(t),x(t-\tau_j(t)),i)];$$

(iii) 对一切 $i\in S$,

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}[V(t_k,x(t_k)+I_k(t_k,x(t_k),x(t_k-\tau_1(t_k)),\cdots,x(t_k-\tau_l(t_k))),i)]\\&\leqslant d_k^{(i)}\mathsf{E}[V(t_k,x(t_k),i)]+\sum_{j=1}^{l}\overline{d}_{jk}^{(i)}\mathsf{E}[V(t_k,x(t_k-\tau_j(t_k)),i)];\end{aligned}$$

(iv) $q=1/\big(\max\limits_{i\in S,1\leqslant k<+\infty}\big\{d_k^{(i)}+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum\limits_{j=1}^{l}\overline{d}_{jk}^{(i)}\big\}\big)>1$;

(v) 对一切 $i\in S$, $\sup\limits_{1\leqslant k<+\infty}\mathrm{e}^{\mu_i(t_k-t_{k-1})}<q$,

则系统 (1) 的零解是指数为 λ 的 p 阶矩指数稳定, 其中 $\mu_i=\lambda+\eta^{(i)}+q\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum\limits_{j=1}^{l}\overline{\eta}_j^{(i)}\geqslant 0$, $i\in S$.

证明: 对任意的 $\xi\in \mathrm{PC}_{\mathscr{F}_0}^b([-\tau,0];R^n)$, 系统 (1) 的解表示为 $x(t)=x(t;\xi)$, 当 $t\in[-\tau,0]$ 时, 设 $r(t)=r(0)=r_0$. 令 ϵ 足够小使得 $t+\epsilon\in(t_{k-1},t_k]$. 由广义的 Itô 公式, 得

$$\mathsf{E}[V(t+\epsilon,x(t+\epsilon),r(t+\epsilon))]=\mathsf{E}[V(t,x(t),r(t))]+\int_t^{t+\epsilon}\mathsf{E}[\mathscr{L}V(s,x(s),r(s))]\mathrm{d}s.$$

所以当 $t\in(t_{k-1},t_k]$ 时, 有

$$D^+\mathsf{E}[V(t,x(t),r(t))]=\mathsf{E}[\mathscr{L}V(t,x(t),r(t))].$$

令 $W(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\mathsf{E}[V(t,x(t),i)]$, 当 $t\in(t_{k-1},t_k]$ 时, 由条件 (ii) 得

$$\begin{aligned}D^+W(t)&=\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\mathsf{E}[V(t,x(t),i)]+\mathrm{e}^{\lambda t}D^+\mathsf{E}[\mathscr{L}V(t,x(t),i)]\\&\leqslant\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}\mathsf{E}[V(t,x(t),i)]+\eta^{(i)}\mathrm{e}^{\lambda t}\mathsf{E}[V(t,x(t),i)]\\&\quad+\mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{j=1}^{l}\overline{\eta}_j^{(i)}\mathsf{E}[V(t-\tau_j(t),x(t-\tau_j(t)),i)]\\&\leqslant(\lambda+\eta^{(i)})W(t)+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{\eta}_j^{(i)}W(t-\tau_j(t)).\end{aligned}\tag{2}$$

由条件 (iii), 可得

$$W(t_k^+)=\mathrm{e}^{\lambda t_k}\mathsf{E}V(t_k^+,x(t_k^+),i)\leqslant d_k^{(i)}W(t_k)+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{d}_{jk}^{(i)}W(t_k-\tau_j(t_k)).$$

取 $M>0$ 使得

$$\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}W(\theta)<\frac{M}{q},$$

可断言当 $t\geqslant-\tau$ 时, $W(t)<M$. 易知当 $t\in[-\tau,0]$ 时, $W(t)<M$. 下面证明

$$W(t)<M,\qquad t\in(0,t_1].\tag{3}$$

若不然, 存在 $t^*\in(0,t_1]$ 使得

$$W(t^*)=M,\qquad W(t)<M,\qquad -\tau<t<t^*.$$

考虑到 $W(t)$ 在 $[0,t_1]$ 的连续性, 存在 $t^{**}\in[0,t^*)$ 使得

$$W(t^{**})=\frac{M}{q},\qquad W(t)>\frac{M}{q},\qquad t\in(t^{**},t^*].$$

则当 $t \in [t^{**}, t^*]$ 时, 有

$$qW(t) \geqslant M > W(t-\tau_j(t)), \qquad j=1,2,\cdots,l. \tag{4}$$

由 (2) 和 (4) 知, 当 $t \in [t^{**}, t^*]$ 时

$$D^+W(t) \leqslant \Big(\lambda + \eta^{(i)} + q\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{\eta}_j^{(i)}\Big)W(t) = \mu_i W(t).$$

所以

$$M = W(t^*) \leqslant W(t^{**})\mathrm{e}^{\mu_i(t^*-t^{**})} \leqslant W(t^{**})\mathrm{e}^{\mu_i t_1} = \frac{M}{q}\mathrm{e}^{\mu_i t_1} < M.$$

这得出矛盾. 因此当 $t \in (0, t_1]$ 时, (3) 成立. 由条件 (iii), 得

$$W(t_1^+) \leqslant d_1^{(i)}W(t_1) + \mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{d}_{j1}^{(i)}W(t_1-\tau_j(t_1)) < \Big(d_1^{(i)} + \mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{d}_{j1}^{(i)}\Big)M \leqslant \frac{M}{q} < M.$$

接下来证明

$$W(t) < M, \qquad t \in (t_1, t_2]. \tag{5}$$

若不然, 存在 $t_1^* \in (t_1, t_2]$ 使得

$$W(t_1^*) = M, \qquad W(t) < M, \qquad t \in [-\tau, t_1^*].$$

由 $W(t)$ 在 $(t_1, t_2]$ 的连续性知, 存在 $t_1^{**} \in (t_1, t_1^*)$ 使得

$$W(t_1^{**}) = \frac{M}{q}, \qquad W(t) > \frac{M}{q}, \qquad t \in (t_1^{**}, t_1^*].$$

当 $t \in [t_1^{**}, t_1^*]$ 时, 有 $qW(t) > W(t-\tau_j(t))$, $j=1,2,\cdots,l$. 于是,

$$\begin{aligned} D^+W(t) &\leqslant (\lambda+\eta^{(i)})W(t) + \mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{\eta}_j^{(i)}W(t-\tau_j(t)) \\ &\leqslant \Big(\lambda + \eta^{(i)} + \mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{\eta}_j^{(i)}\Big)W(t) = \mu_i W(t). \end{aligned}$$

结合条件 (v), 可得

$$M = W(t_1^*) \leqslant W(t_1^{**})\mathrm{e}^{\mu_i(t_1^*-t_1^{**})} \leqslant W(t_1^{**})\mathrm{e}^{\mu_i(t_2-t_1)} = \frac{M}{q}\mathrm{e}^{\mu_i(t_2-t_1)} < M,$$

矛盾. 因此, (5) 式成立. 又由条件 (iii), 可得

$$W(t_2^+) \leqslant d_2^{(i)}W(t_2) + \mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{d}_{j2}^{(i)}W(t_2-\tau_j(t_2)) < \Big(d_2^{(i)} + \mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{d}_{j2}^{(i)}\Big)M \leqslant \frac{M}{q} < M.$$

由归纳法, 可以证明对 $k=1,2,\cdots$,

$$W(t)<M, \qquad t\in(t_{k-1},t_k].$$

因此, 当 $t\geqslant-\tau$ 时, $W(t)<M$. 于是由条件 (i) 得到

$$c_1\mathsf{E}[|x(t)|^p]\leqslant\mathsf{E}[V(t,x(t),i)]\leqslant M\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

由此可得

$$\mathsf{E}[|x(t)|^p]\leqslant\frac{M}{c_1}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

定理 2 证完. $\square$

注记 3 在系统的稳定性中, 脉冲效应起了关键的作用. 脉冲增益可以分为稳定的脉冲增益和不稳定的脉冲增益. 本文研究的系统是有限个状态系统按马尔可夫链模式的切换, 脉冲增益含有多个有限时变时滞. 因此, 若对于 $\forall i\in S$, $d_k^{(i)}+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum\limits_{j=1}^{l}\overline{d}_{jk}^{(i)}<1$, 则把含时滞的脉冲增益 $d_k^{(i)}+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum\limits_{j=1}^{l}\overline{d}_{jk}^{(i)}$ 称为稳定的脉冲增益; 若对于 $\forall i\in S$, $d_k^{(i)}+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum\limits_{j=1}^{l}\overline{d}_{jk}^{(i)}>1$, 则把含时滞的脉冲增益 $d_k^{(i)}+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum\limits_{j=1}^{l}\overline{d}_{jk}^{(i)}$ 称为不稳定的脉冲增益.

注记 4 在定理 2 中, 如果 $\eta^{(i)}>0$, 对应的无脉冲具马尔可夫切换的随机系统可以是发散系统, 系统施加含时滞的脉冲增益输入是稳定的脉冲增益, 综合系统能够最终达到 p 阶矩指数稳定. 这说明时滞脉冲效应对综合系统的稳定性起了关键的作用.

注记 5 定理 2 的脉冲不等式 (iii) 依赖于脉冲增益, 脉冲时刻以及脉冲时间间隔 t_k-t_{k-1} 的长度. 如果无脉冲切换系统是发散系统, 则含时滞的脉冲增益是稳定的脉冲增益, 且脉冲时间间隔 t_k-t_{k-1} 的长度要足够小才能保证综合系统的零解 p 阶矩指数稳定.

推论 6 设 $l=1$, $f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),r(t))=A_{r(t)}x(t)+B_{r(t)}x(t-\tau(t))$, $g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),r(t))=C_{r(t)}x(t)+D_{r(t)}x(t-\tau(t))$, $I_k(t_k,x(t_k),x(t_k-\tau_1(t_k)),r(t_k))=d_{r(t)}x(t_k)+\overline{d}_{r(t_k)}x(t_k-\tau(t_k))$, $A_{r(t)},B_{r(t)},C_{r(t)},D_{r(t)}\in R^{n\times n}$. 如果存在正定矩阵 P_i 和常数 $d_k^{(i)}\geqslant0$, $\overline{d}_{jk}^{(i)}\geqslant0$, $\overline{\eta}_j^{(i)}\geqslant0$, $\lambda>0$, $\eta^{(i)}$, $i\in S$, $j=1,2,\cdots,l$, $k=1,2,\cdots$ 使得

(i) 对一切 $i\in S$,

$$H_i=P_iA_i+A_i^{\mathsf{T}}P_i+P_i^2+C_i^{\mathsf{T}}P_iC_i+C_i^{\mathsf{T}}C_i+\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}P_j-\eta^{(i)}P_i\leqslant0$$

和

$$\overline{H}_i=B_i^{\mathsf{T}}B_i+D_i^{\mathsf{T}}P_i^2D_i+D_i^{\mathsf{T}}P_iD_i-\overline{\eta}^{(i)}P_i\leqslant0,$$

其中 $H_i,\overline{H}_i\leqslant0$, $i\in S$ 表示 $H_i,\overline{H}_i$ 半负定;

(ii) $\overline{q} = \max\limits_{i\in S, 1\leqslant k<+\infty}\{\lambda_{\min}(P_i)/[(1+d_k^{(i)})^2 + \mathrm{e}^{\lambda\tau}(\overline{d}_k^{(i)})^2]\} > 2$, 其中 $\lambda_{\min}(P_i)$ 是 P_i 的最小特征值;

(iii) 对一切 $i \in S$, $\sup\limits_{1\leqslant k<+\infty} \mathrm{e}^{\overline{\mu}_i(t_k-t_{k-1})} < q$, 其中 $\overline{\mu}_i = \lambda + \eta^{(i)} + \overline{q}\mathrm{e}^{\lambda\tau}\overline{\eta}^{(i)} \geqslant 0$, $i \in S$.

则系统 (1) 的零解是指数为 λ 的均方指数稳定.

证明: 构造 Lyapunov 函数 $V(t,x(t),i) = x^{\mathsf{T}}(t)P_ix(t)$, 则当 $t\in(t_{k-1},t_k]$ 时

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,x(t),i) &= 2x^{\mathsf{T}}(t)P_i[A_ix(t)+B_ix(t-\tau(t))]\\&\quad+[C_ix(t)+D_ix(t-\tau(t))]^{\mathsf{T}}Q_i[C_ix(t)+D_ix(t-\tau(t))]\\&\quad+\sum_{j=1}^N\gamma_{ij}x^{\mathsf{T}}(t)P_jx(t)\\&= x^{\mathsf{T}}(t)(P_iA_i+A_i^{\mathsf{T}}P_i)x(t)+2x^{\mathsf{T}}(t)P_iB_ix(t-\tau(t))\\&\quad+x^{\mathsf{T}}(t)C_i^{\mathsf{T}}P_iC_ix(t)+x^{\mathsf{T}}(t)C_i^{\mathsf{T}}P_iD_ix(t-\tau(t))\\&\quad+x(t-\tau(t))D_i^{\mathsf{T}}P_iC_ix(t)+x^{\mathsf{T}}(t-\tau(t))D_i^{\mathsf{T}}P_iD_ix(t-\tau(t))\\&\quad+\sum_{j=1}^N\gamma_{ij}x^{\mathsf{T}}(t)P_jx(t).\end{aligned}\tag{6}$$

由于对任意向量 $x,y\in R^n$, 不等式 $2x^{\mathsf{T}}y\leqslant x^{\mathsf{T}}x+y^{\mathsf{T}}y$ 成立, 则

$$2x^{\mathsf{T}}(t)P_iB_ix(t-\tau(t))\leqslant x^{\mathsf{T}}(t)P_i^2x(t)+x(t-\tau(t))B_i^TB_ix(t-\tau(t))\tag{7}$$

和

$$\begin{aligned}&x^{\mathsf{T}}(t)C_i^{\mathsf{T}}P_iD_ix(t-\tau(t))+x^{\mathsf{T}}(t-\tau(t))D_i^{\mathsf{T}}P_iC_ix(t)\\\leqslant\ &x^{\mathsf{T}}(t)C_i^{\mathsf{T}}C_ix(t)+x^{\mathsf{T}}(t-\tau(t))D_i^{\mathsf{T}}P_i^2D_ix(t-\tau(t)).\end{aligned}\tag{8}$$

把 (7) 和 (8) 代入 (6), 得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,x(t),i)&\leqslant x^{\mathsf{T}}(t)\Big(P_iA_i+A_i^{\mathsf{T}}P_i+P_i^2+C_i^{\mathsf{T}}P_iC_i+C_i^{\mathsf{T}}C_i+\sum_{j=1}^N\gamma_{ij}P_j\Big)x(t)\\&\quad+x^{\mathsf{T}}(t-\tau(t))(B_i^{\mathsf{T}}B_i+D_i^{\mathsf{T}}P_i^2D_i+D_i^{\mathsf{T}}P_iD_i)x(t-\tau(t))\\&\leqslant\eta^{(i)}x^{\mathsf{T}}(t)P_ix(t)+\overline{\eta}^{(i)}\phi^{\mathsf{T}}(t-\tau(t))P_ix(t-\tau(t)).\end{aligned}$$

所以

$$\mathsf{E}[\mathscr{L}V(t,x(t),i)]\leqslant\eta^{(i)}\mathsf{E}[V(t,x(t),i)]+\overline{\eta}^{(i)}[V(t,x(t-\tau(t)),i)].$$

当 $t=t_k$ 时, 由条件 (ii) 知

$$\mathsf{E}[V(t_k^+,x(t_k^+),i)]=x^{\mathsf{T}}(t_k^+)P_ix(t_k^+)$$

$$\leqslant \frac{2(1+d^{(i)})^2}{\lambda_{\min}(P_i)}\mathsf{E}[V(t_k,x(t_k),i)]+\frac{2(\overline{d}^{(i)})^2}{\lambda_{\min}(P_i)}\mathsf{E}[V(t_k-\tau(t_k),x(t_k-\tau(t_k)),i)].$$

从而, 根据定理 2 知, 结论成立. □

注记 7 在推论 6 中, 为了克服计算负担, 可以用 MATLAB 线性矩阵不等式工具箱来确定 $\eta^{(i)}$ 和 $\overline{\eta}^{(i)}$. 令 $P_i=I_n$, 可取 $\eta^{(i)}=\lambda_{\max}(A_i+A_i^{\mathsf{T}}+2C_i^{\mathsf{T}}C_i)+\sum\limits_{j=1}^{N}\gamma_{ij}+1$, $\overline{\eta}^{(i)}=\lambda_{\max}(B_i^{\mathsf{T}}B_i+2D_i^{\mathsf{T}}D_i)$, $\overline{q}=\max\limits_{i\in S,1\leqslant k<+\infty}\{1/[(1+d_k^{(i)})^2+\mathrm{e}^{\lambda\tau}(\overline{d}_k^{(i)})^2]\}$.

定理 8 设 $V\in\mathscr{C}_1^2([-\tau,\infty)\times R^n\times S;R^+)$. 如果存在常数 $p>0$, $c_1>0$, $c_2>0$, $d_k^{(i)}\geqslant 0$, $\overline{d}_{jk}^{(i)}\geqslant 0$, $\eta^{(i)}>0$, $\overline{\eta}_j^{(i)}\geqslant 0$, $\eta^{(i)}>\sum\limits_{j=1}^{l}\overline{\eta}_j^{(i))}$, $\lambda>\varepsilon>0$, $i\in S$, $j=1,2,\cdots,l$, $k=1,2,\cdots$, 使得

(i) 对 $\forall(t,x,i)\in[-\tau,\infty)\times R^n\times S$, 有 $c_1|x|^p\leqslant V(t,x,i)\leqslant c_2|x|^p$;

(ii) 对 $\forall t\in(t_{k-1},t_k]$ 和一切 $i\in S$, $\mathsf{E}[\mathscr{L}V(t,x(t),i)]\leqslant-\eta^{(i)}\mathsf{E}[V(t,x(t),i)]+\sum\limits_{j=1}^{l}\overline{\eta}_j^{(i)}$ $\cdot\mathsf{E}[V(t-\tau_j(t),x(t-\tau_j(t)))]$;

(iii) 对一切 $i\in S$, $\mathsf{E}[V(t_k,x(t_k+I_k(t_k,x(t_k),x(t_k-\tau_1(t_k)),\cdots,x(t_k-\tau_l(t_k))),i))]\leqslant d_k^{(i)}\mathsf{E}[V(t_k,x(t_k),i)]+\sum\limits_{j=1}^{l}\overline{d}_{jk}^{(i)}\mathsf{E}[V(t_k,x(t_k-\tau_j(t_k)),i)]$;

(iv) 对一切 $i\in S$, $\lambda-\eta^{(i)}+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum\limits_{j=1}^{l}\eta_j^{(i)}\leqslant 0$;

(v) 对一切 $i\in S$, $k=1,2,\cdots$, $0\leqslant\ln\big(d_k^{(i)}+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum\limits_{j=1}^{l}\overline{d}_{jk}^{(i)}\big)/(t_k-t_{k-1})\leqslant\varepsilon$,

则系统 (1) 的零解是指数为 $\lambda-\varepsilon$ 的 p 阶矩指数稳定.

证明: 设 $W(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\mathsf{E}[V(t,x(t),i)]$, 根据定理 2 的证明, 当 $t\in(t_{k-1},t_k]$, 由条件 (ii) 可得

$$D^+W(t)\leqslant(\lambda+\eta^{(i)})W(t)+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{\eta}_j^{(i)}W(t-\tau_j(t)),\tag{9}$$

当 $t=t_k$ 时, 由条件 (iii) 得

$$W(t_k^+)\leqslant d_k^{(i)}W(t_k)+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{d}_{jk}^{(i)}W(t_k-\tau_j(t_k)).$$

取 M 使得 $M>\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}W(\theta)$, 我们可以证明: 当 $t\geqslant 0$ 时

$$W(t)<M\prod_{0<t_k<t}\Big(d_k^{(i)}+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{d}_{jk}^{(i)}\Big).\tag{10}$$

显然当 $t=0$ 时, 上式成立, 所以我们只需证明当 $t\in(0,t_1]$ 时, 上式成立. 若不然, 存在 $t^*\in(0,t_1]$ 使得

$$W(t^*)=M,\qquad W(t)<M,\qquad -\tau\leqslant t<t^*.$$

则由 (9) 可以推得

$$\begin{aligned}0<D^+W(t^*)&\leqslant(\lambda+\eta^{(i)})W(t^*)+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{\eta}_j^{(i)}W(t^*-\tau_j(t^*))\\&<\Big(\lambda+\eta^{(i)}+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{\eta}_j^{(i)}\Big)M\leqslant 0.\end{aligned}$$

得出矛盾. 所以当 $t\in[0,t_1]$ 时, (10) 成立. 进一步, 由条件 (iii), 我们得到

$$W(t_1^+)\leqslant d_1^{(i)}W(t_k)+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{d}_{j1}^{(i)}W(t_1-\tau_j(t_1))\leqslant\Big(d_1+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{d}_{j1}^{(i)}\Big)M.$$

应用同样的方法, 可以证明当 $t\in(t_1,t_2]$ 时,

$$W(t)<\Big(d_1+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{d}_{j1}^{(i)}\Big)M.$$

由归纳法, 得到对 $k=1,2,\cdots$,

$$W(t)<M\prod_{0<t_k<t}\Big(d_k^{(i)}+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{d}_{jk}^{(i)}\Big),\qquad t\in(t_{k-1},t_k].$$

由条件 (i)、(v) 和 (10), 有

$$c_1\mathsf{E}[|x(t)|^p]\leqslant\mathsf{E}[V(t,x(t),i)]<M\mathrm{e}^{-\lambda t}\prod_{0<t_k<t}\Big(d_k^{(i)}+\mathrm{e}^{\lambda\tau}\sum_{j=1}^{l}\overline{d}_{jk}^{(i)}\Big)\leqslant M\mathrm{e}^{-(\lambda-\varepsilon)t},$$

由此得

$$\mathsf{E}[|x(t)|^p]<\frac{M}{c_1}\mathrm{e}^{-(\lambda-\varepsilon)t}.$$

定理 8 证完. □

注记 9 定理 8 的条件能够保证无脉冲条件下切换系统满足 p 阶矩指数稳定, 这时的脉冲增益可以允许不稳定的脉冲. 但值得注意的是: 此时的最小脉冲时间间隔长度必须要足够大才能保证合系统的零解 p 阶矩指数稳定.

§4. 例 子

例 10 设 $r(t)$ 是右连续的马尔可夫链, 取值为 $S=\{1,2\}$, 且生成矩阵为

$$\Gamma=\begin{pmatrix}-1&1\\4&-4\end{pmatrix},$$

则 $\gamma_{12}=1$, $\gamma_{21}=4$. 考虑如下具马尔可夫切换和时滞脉冲的随机系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)=[A_{r(t)}x(t)+B(t)x(t-1)]\mathrm{d}t+[C_{r(t)}x(t)+D_{r(t)}x(t-1)), & t\geqslant 0,\ t\neq t_k; \\ \triangle x(t_k)=-0.8x(t_k)+0.1x(t_k-1), & k=1,2,\cdots, \end{cases} \tag{11}$$

其中

$$A_1=\begin{pmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix} 1.2 & 0.6 \\ 0.6 & 0 \end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad C_2=\begin{pmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix},\ D_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad D_2=\begin{pmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix},$$

$x(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\intercal}$, $t_k=0.01k$, $f(t,x(t),x(t-1),r(t))=A_{r(t)}x(t)+B_{r(t)}x(t-1)$, $g(t,x(t),x(t-1),r(t))=C_{r(t)}x(t)+D_{r(t)}x(t-1)$, $I_k(t,x(t),x(t-1),r(t))=-0.8x(t)+0.1x(t-1)$.

取 $P_1=I_2$, $P_2=2I_2$, $d_k^{(1)}=d_k^{(2)}=0.08$, $\overline{d}_k^{(1)}=\overline{d}_k^{(2)}=0.02$, $\eta^{(1)}=4.2$, $\eta^{(2)}=1.4$, $\overline{\eta}^{(1)}=2.36$, $\overline{\eta}^{(2)}=7.8$, $\lambda=1$, 其中 I_2 是二维的单位矩阵.

经计算可知推论 6 的条件 (ii) 和 (iii) 成立. 由定理 8 知, 系统 (11) 的零解均方指数稳定.

致谢 论文全体作者衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] MAO X R. *Stochastic Differential Equations and Applications* [M]. Chichester, UK: Horwood Publishing Ltd, 1997.

[2] KARATZAS I, SHREVE S E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus* [M]. New York: Springer, 1991.

[3] MAO X R. Razumikhin-type theorems on exponential stability of stochastic functional differential equations [J]. *Stochastic Process Appl*, 1996, **65(2)**: 233–250.

[4] MAO X R. Razumikhin-type theorems on exponential stability of neutral stochastic differential equations [J]. *SIAM J Math Anal*, 1997, **28(2)**: 389–401.

[5] MARITON M. *Jump Linear Systems in Automatic Control* [M]. New York: CRC Press, 1990.

[6] MAO X R. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching [J]. *Stochastic Process Appl*, 1999, **79(1)**: 45–67.

[7] JI Y D, CHIZECK H J. Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control [J]. *IEEE Trans Automat Control*, 1990, **35(7)**: 777–788.

[8] FANG Y G. A new general sufficient condition for almost sure stability of jump linear systems [J]. *IEEE Trans Automat Control*, 1997, **42(3)**: 378–382.

[9] PAN L J, CAO J D, HU J Q. Synchronization for complex networks with Markov switching via matrix measure approach [J]. *Appl Math Model*, 2015, **39(18)**: 5636–5649.

[10] CAI Y M, CAI S Y, MAO X R. Stochastic delay foraging arena predator-prey system with Markov switching [J]. *Stoch Anal Appl*, 2020, **38(2)**: 191–212.

[11] CHENG J, ZHAN Y. Nonstationary $l_2 - l_\infty$ filtering for Markov switching repeated scalar nonlinear systems with randomly occurring nonlinearities [J]. *Appl Math Comput*, 2020, **365**: 124714.

[12] YANG T. *Impulsive Control Theory* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

[13] REN W, XIONG J L. Stability analysis of impulsive stochastic nonlinear systems [J]. *IEEE Trans Automat Control*, 2017, **62(9)**: 4791–4797.

[14] PAN L J, CAO J D. Exponential stability of impulsive stochastic functional differential equations [J]. *J Math Anal Appl*, 2011, **382(2)**: 672–685.

[15] LI X D, DING Y H. Razumikhin-type theorems for time-delay systems with Persistent impulses [J]. *Systems Control Lett*, 2017, **107**: 22–27.

[16] LIANG J L, CAO J D. Global asymptotic stability of bi-directional associative memory networks with distributed delays [J]. *Appl Math Comput*, 2004, **152(2)**: 415–424.

[17] WANG H M, DUAN S K, LI C D, et al. Globally exponential stability of delayed impulsive functional differential systems with impulse time windows [J]. *Nonlinear Dynam*, 2016, **84(3)**: 1655–1665.

[18] GAO L J, WANG D D, ZONG G D. Exponential stability for generalized stochastic impulsive functional differential equations with delayed impulses and Markovian switching [J]. *Nonlinear Anal Hybrid Syst*, 2018, **30**: 199–212.

Stability of Stochastic Systems with Markov Switching and Several Delayed Impulses

ZHAO Haiqing PAN Lijun

(*School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang, 524048, China*)

Abstract: In this paper, pth moment exponential stability of stochastic systems with Markov switching and serval delayed impulses is investigated. It is assume that the state variables on the impulses may relate to the time-varying delays. By using stochastic analysis and impulsive techniques, serval new stability criteria are derived. Meanwhile, an example is provided to demonstrate the effectiveness of the obtained results.

Keywords: Markov chain; stochastic system; delay; impulse

2020 Mathematics Subject Classification: 60J28; 90B50