

风险反馈条件下多事件触发巨灾债券的最优折扣系数研究 *

孙振涛 姚定俊*

(南京财经大学金融学院, 南京, 210023)

程恭品

(南京财经大学经济学院, 南京, 210023)

摘要: 由于传统多事件触发巨灾债券的触发事件之间具有一定的相关性, 投资者损失的可能性和收益波动性较大。为了减小这一弊端带来的影响, 本文以地震巨灾债券为例, 在考虑风险反馈情况下重新构造了多事件触发巨灾债券的支付函数, 并在最大化保险公司对冲效率的目标下, 通过蒙特卡洛模拟给出了全部风险事件触发后债券现金流支付的最优折扣系数。研究表明, 在新的支付函数下, 投资者期望收益率增加, 收益波动性减小, 该债券更具市场吸引力。最后, 本文重点分析了巨灾触发参数值对最优折扣系数的影响。

关键词: 巨灾债券; 风险反馈; 多事件触发; 蒙特卡洛模拟; 对冲效率; 折扣系数

中图分类号: F840.64

英文引用格式: SUN Z T, YAO D J, CHENG G P. Study on optimal discount coefficient of multi-event catastrophe bonds under risk feedback conditions [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2021, 37(5): 461–477. (in Chinese)

§1. 引言

我国幅员辽阔, 自然灾害分布广种类多, 近年来频繁发生的巨灾给我国经济社会造成了巨大冲击。巨灾债券作为一种应对巨灾损失的金融工具, 能够有效分散巨额损失, 提升巨灾风险的应对能力, 已经吸引了诸多学者的研究兴趣。

按照触发机制的不同, 巨灾债券可分为单事件和多事件触发机制。单事件触发机制下的巨灾债券触发条件只与一个风险事件有关; 多事件触发机制下的巨灾债券触发条件与多个风险事件相关。以往学者的研究大多是将巨灾债券设置成单事件触发机制。例如, Nowak 和 Romanuk^[1] 使用鞅定价方法, 通过将巨灾累积经济损失设置不同的触发阈值, 对具有两种支付函数的单事件触发巨灾债券进行了定价。Ma 和 Ma^[2] 建立了一个或有索赔模型, 利用一种混合逼近方法求解了单事件触发巨灾债券价格的数值解。

随着资本市场的发展, 单事件触发巨灾债券已经不能满足投资者多样化的需求, 而多事件触发巨灾债券由于其多样化的偿付机制开始受到投资者青睐。因此越来越多学者开始研究多事件触发巨灾债券。例如, 李永等^[3-6] 通过建立委托代理模型, 对基于台风巨灾损失

*国家自然科学基金项目(批准号: 71671082、11801265) 和江苏省高校自然科学基金项目(批准号: 18KJB110011) 资助。

*通讯作者, E-mail: yaodj@nufe.edu.cn.

本文 2019 年 10 月 14 日收到, 2020 年 6 月 8 日收到修改稿。

和受灾面积双触发机制的巨灾债券进行定价; 杨帆和周明^[7]通过二元 t-Copula 函数获得我国地震灾害的联合分布, 利用基于 Halton 序列的拟蒙特卡洛法得到不同期限混合触发型巨灾债券的价格; 张笑玎等^[8]利用 CIR 随机利率模型, 对不同风险反馈条件下的复合触发机制地震巨灾债券进行了定价, 计算得出了 1~5 年期的地震巨灾债券的价格.

发行巨灾债券已经成为保险公司新的巨灾风险管理工具, 与再保险相比, 发行巨灾债券有其独特的优势. 容易理解, 巨灾债券设计是巨灾债券发行的关键所在, 它不仅会影响到巨灾债券对投资者的吸引力, 也会很大程度上影响保险公司分散巨灾损失的能力和效率. 对于多事件触发巨灾债券, 其多个巨灾触发事件之间往往具有相关性, 这种相关性意味着一旦触发其中某个风险事件, 其余风险事件很可能也会被同时触发. 虽然这有利于多维度评价巨灾的程度, 有利于减少基差风险和道德风险, 但也同时加大了投资者的损失风险. 为了解决这个问题, 本文借鉴张笑玎等^[8]对多事件触发巨灾债券运行机制的设计, 重新构造了巨灾债券的支付函数. 在该支付函数下, 触发单一风险事件后的现金流支付与触发全部风险事件后的现金流支付都与某变量 w 相关, 这里 w 是该债券的折扣系数, 它代表了触发全部风险事件后支付给投资者现金流的赔付比例. 保险公司如何确定该赔付比例是一个十分棘手的问题. 以往曾有学者对赔付比例的设定问题进行过研究. 例如, 田玲等^[9]基于 CARA 效用假设, 从帕累托最优角度得到了 EQII 保单的最优赔付比例与地震指数之间的函数关系. Zhang 和 Tsai^[10]为了量化巨灾债券为保险公司带来的风险对冲效果, 以最大化对冲效率为目标计算了单事件触发巨灾债券的最优折扣系数. 沿着这一思路, 本文以双事件触发机制下的地震巨灾债券为例, 设定新的支付函数, 研究最大化对冲效率的最优折扣系数, 采用蒙特卡洛方法给出了数值结果.

接下来, 本文结构安排如下: 第 2 节首先详细阐述本文所设计巨灾债券的运行机制, 然后对文献 [10] 中的对冲效率模型作出介绍. 第 3 节利用软件 MATLAB 进行数值模拟实验, 计算得到了本文所设计债券的最优折扣系数, 并将其收益率与传统多事件触发巨灾债券进行了对比, 以此来验证是否能达到减轻投资者损失的目的. 第 4 节重点分析了巨灾触发参数值对最优折扣系数的影响. 第 5 节对本文得到的结论作出了一个总结.

§2. 巨灾债券设计与对冲效率模型

1) 巨灾债券设计

传统多事件触发巨灾债券的运行机制一般是当触发一个风险事件后, 当期及之后利息将不予支付; 当全部风险事件触发后, 本金也会受到损失. 这种现金流支付结构虽然能帮助保险公司分散巨灾风险, 但是由于本金和利息都有可能面临损失, 某些投资者难以接受. 况且多个触发事件之间可能具有某种相关性, 一旦触发其中一个风险事件, 其余风险事件很可能也会被触发, 这意味着投资者将会面临更高的风险. 另外, 由于某单一风险事件的触发

可能意味着将会进入巨灾高发期, 从而其余风险事件的触发概率也会上升, 导致投资者面临损失的可能性上升^[8]. 为满足某些投资者的需求, 我们可以改进传统多事件巨灾债券的运行机制.

为了反映触发一个风险事件后的风险上升的现象, SCOR 公司曾经在 2006 年发行了一款新型巨灾债券, 该债券设定了“风险反馈”机制^[8], 即当一个风险事件触发后, 本息支付将得到提高^[11]. 本文参考张笑玎等^[8]对债券运行机制的设置(即触发单一风险事件对于现金流的影响遵循风险补偿效应, 触发全部风险事件对于现金流的影响遵循多种不同的触发规则), 对双事件触发地震巨灾债券的支付函数进行了重新构造, 以达到对投资者进行风险补偿的目的. 具体来说, 当地震震级和经济损失金额这两个风险事件都达到触发值之后, 当期及之后的利息和本金将会受到损失, 按照原来的 w 倍 ($0 < w \leq 1$) 进行支付; 当地震震级和经济损失额之中只有一个风险事件被触发, 当期及之后的利息会有所提高, 按照原来的 $1/w$ 倍进行支付.

由上述运行机制可知, 利息与本金的支付金额与地震发生的程度以及债券的触发规则有关. 按照不同触发规则对风险事件记忆性由强到弱的顺序, 可以分为有效期内触发规则(一类触发反馈)、年内触发规则(二类触发反馈)和单次事件触发规则(三类触发反馈). 对于有效期内触发规则, 在触发其中一个风险事件后, 我们需要观察在整个债券有效期内是否触发第二个风险事件, 即风险事件在整个债券有效期内是累积的. 对于年内触发规则, 在某年触发其中一个风险事件后, 我们需要观察在该年内是否触发第二个风险事件, 如果该年之内没有触发第二个风险事件, 则需接着观察下一年内是否触发全部风险事件, 以此类推直至该债券有效期内的最后一一年, 即风险事件只在每一年内是累积的. 而对于单次事件触发规则, 我们则需要观察在某一次巨灾事件中是否触发全部风险事件, 如果没有触发全部风险事件, 则需接着观察下一次巨灾事件中是否触发全部风险事件, 以此类推直至该债券有效期内的最后一次巨灾事件, 即风险事件的触发不可以被累积^[8].

令 X_t 为 t ($0 \leq t \leq T$) 时刻发生的地震的震级, Y_t 为该次地震造成的全行业经济损失. K_1 为震级触发值, K_2 为经济损失触发值; T_1 为债券到期前震级首次被触发的时间, T_2 为经济损失首次被触发的时间, T_3 为任意风险事件首次被触发的时间, T_4 为全部风险事件被触发的时间. 由于巨灾债券风险事件的触发与否和公司债券的违约情况相类似, 故本文类比文献 [12] 中对于公司违约时刻的定义, 得到上述三种触发规则的触发事件起始时间如下:

(i) 有效期内触发规则:

$$T_1 = \inf\{t > 0; X_t \geq K_1\}; \text{ 当 } X_t < K_1, T_1 = \infty;$$

$$T_2 = \inf\{t > 0; Y_t \geq K_2\}; \text{ 当 } Y_t < K_2, T_2 = \infty;$$

$$T_3 = \min\{T_1, T_2\};$$

$$T_4 = \max\{T_1, T_2\}.$$

(ii) 年内触发规则:

$$T_1 = \inf\{t > 0; X_t \geq K_1\}; \text{ 当 } X_t < K_1, T_1 = \infty;$$

$$T_2 = \inf\{t > 0; Y_t \geq K_2\}; \text{ 当 } Y_t < K_2, T_2 = \infty;$$

$$T_3 = \min\{T_1, T_2\};$$

$$T_4 = \min\{\max[\inf(0 < t \leq 1; X_t \geq K_1), \inf(0 < t \leq 1; Y_t \geq K_2)], \max[\inf(1 < t \leq 2; X_t \geq K_1), \inf(1 < t \leq 2; Y_t \geq K_2)], \dots, \max[\inf(T-1 < t \leq T; X_t \geq K_1), \inf(T-1 < t \leq T; Y_t \geq K_2)]\}.$$

(iii) 单次事件触发规则:

$$T_1 = \inf\{t > 0; X_t \geq K_1\}; \text{ 当 } X_t < K_1, T_1 = \infty;$$

$$T_2 = \inf\{t > 0; Y_t \geq K_2\}; \text{ 当 } Y_t < K_2, T_2 = \infty;$$

$$T_3 = \min\{T_1, T_2\};$$

$$T_4 = \inf\{t > 0; X_t \geq K_1 \text{ 且 } Y_t \geq K_2\}.$$

若该债券未来各期期末的现金流现值之和为 A , 则

$$A = A(FV, C, T, w, K_1, K_2, T_3, T_4)$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{m-1} Ce^{-\delta i} + \frac{1}{\omega} \sum_{i=m}^{n-1} Ce^{-\delta i} + \omega \left(\sum_{i=n}^T Ce^{-\delta i} + FV e^{-\delta T} \right), & m-1 < T_3 \leq m, n-1 < T_4 \leq n; \\ \sum_{i=1}^{m-1} Ce^{-\delta i} + \frac{1}{\omega} \sum_{i=m}^T Ce^{-\delta i} + FV e^{-\delta T}, & m-1 < T_3 \leq m, T_4 = \infty; \\ \sum_{i=1}^T Ce^{-\delta i} + FV e^{-\delta T}, & T_3 = \infty, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $m = 1, 2, \dots, T$, $n = 1, 2, \dots, T$, 且 $m \leq n$; T 为债券到期日, FV 为面值, δ 为市场利率, r 为息票率, 未触发风险事件时每年年末的息票支付 $C = FV \cdot r$; 当 $x > y$ 时, $\sum_{i=x}^y Ce^{-\delta i} = 0$.

若巨灾债券的价格为 P_0 , 那么在投资者是风险中性的假设下, P_0 等于未来各期现金流现值之和的期望, 即 $P_0 = E(A)^{[10]}$.

2) 对冲效率模型^[10]

本节对于对冲效率模型的介绍, 参考文献 [10] 中的研究成果.

保险公司为了发行巨灾债券, 通常会设立一个特殊目的机构, 即 SPV. 当巨灾投保人在保险公司处购买了巨灾保险之后, 该保险公司会通过签订再保险合同把超出自承范围的那部分损失分保给 SPV, 最后再由 SPV 发行巨灾债券. 我们假设该保险公司的市场份额

额为 M ($0 < M \leq 1$), 自留额为 d . 由于巨灾债券经济损失额的触发值 K_2 正是依据保险公司对巨灾损失的承受能力而设定的, 故这种情况下 $d = M \cdot K_2$. 特殊情况下, 如果保险公司选择直接自行发行巨灾债券, 那么自留额 d 便为 0.

假设 T 年内发生的第 i 次巨灾造成的全行业经济损失为 Y_i , 贴现率为 δ , 则该保险公司向 SPV 分出的总损失额的现值为

$$L = \sum_{i=1}^{N(T)} \max(MY_i - d, 0) \cdot e^{-\delta T_i}, \quad (2)$$

其中 $N(T)$ 为 T 年内巨灾发生的总次数, T_i 为第 i 次地震发生的时间. L 为 SPV 发行巨灾债券前的总损失额现值. 那么发行巨灾债券后, SPV 的总损失额现值 L^* 为

$$L^* = L - P_0 + A, \quad (3)$$

其中 P_0 为巨灾债券的发行价格, A 为债券未来现金流的现值之和.

通常认为发行巨灾债券的费用与债券的价格正比, 若假定 ζ 为 SPV 发行巨灾债券的费用率, 则发行费用为 $P_0 \cdot \zeta$. SPV 面临的巨灾损失风险可以由其经济损失额的方差来衡量, 那么发行巨灾债券对冲掉的风险为 $\text{Var}(L) - \text{Var}(L^*)$. 由此, 我们引入 HE 和 HER 这两个对冲效率指标:

$$\text{HE} = [\text{Var}(L) - \text{Var}(L^*)]/\text{Var}(L), \quad (4)$$

$$\text{HER} = [\text{Var}(L) - \text{Var}(L^*)]/[P_0 \cdot (1 + \zeta)]. \quad (5)$$

由式 (4) 和式 (5) 可知, HE 指的是发行债券前后 SPV 经济损失额方差的变化率, HER 指的是 SPV 每单位发行成本下的经济损失额方差的变化量.

尽管文献 [10] 的研究对象是单事件触发巨灾债券, 但对于多事件触发巨灾债券, 仍然可以推导出以下公式:

$$\text{HE} = \{[\mathbb{E}(A)]^2 - \mathbb{E}(A^2) + 2\mathbb{E}(A)\mathbb{E}(L) - 2\mathbb{E}(A \cdot L)\}/\text{Var}(L), \quad (6)$$

$$\text{HER} = \{[\mathbb{E}(A)]^2 - \mathbb{E}(A^2) + 2\mathbb{E}(A)\mathbb{E}(L) - 2\mathbb{E}(A \cdot L)\}/[\mathbb{E}(A) \cdot (1 + \zeta)]. \quad (7)$$

由式 (6) 和式 (7) 可知, 要想得到 HE 和 HER 的表达式, 需要求数 $\mathbb{E}(A)$ 、 $\mathbb{E}(A^2)$ 、 $\mathbb{E}(L)$ 、 $\text{Var}(L)$ 和 $\mathbb{E}(A \cdot L)$. 由式 (1) 可知, $\mathbb{E}(A)$ 和 $\mathbb{E}(A \cdot L)$ 为包含 w 一次项、 w 负一次项和常数项的多项式; $\mathbb{E}(A^2)$ 是一个包含 w 二次项、 w 一次项、 w 负一次项、 w 负二次项和常数项的多项式. 且对于 $\mathbb{E}(A)$ 、 $\mathbb{E}(A^2)$ 和 $\mathbb{E}(A \cdot L)$, 多项式的系数与不同触发规则下 T_3 和 T_4 的概率分布有关. 而 $\mathbb{E}(L)$ 和 $\text{Var}(L)$ 可以通过对地震损失路径的模拟来获得, 与巨灾债券的触发规则无关. 因此 HE 和 HER 都可以写成关于 w 的一元函数形式.

不同于文献 [10] 中通过理论推导方式得到 HE 与 HER 的表达式的做法, 本文后续会通过数值模拟实验求出公式中的 $\mathbb{E}(A)$ 、 $\mathbb{E}(A^2)$ 、 $\mathbb{E}(L)$ 、 $\text{Var}(L)$ 和 $\mathbb{E}(A \cdot L)$, 从而得到 HE 与 HER 的表达式, 并在最大化 HE 与 HER 的目标下得到相应的最优折扣系数.

§3. 基于蒙特卡洛模拟的最优折扣系数算例

本章节首先根据原始数据的分布特征分别对每年地震发生次数、震级和经济损失的边缘分布及其联合分布进行拟合检验，然后通过随机模拟实验生成地震震级和经济损失的发生路径，从而得到不同触发规则下 T_3 和 T_4 的概率分布，接着计算出式(6)与式(7)中的未知项并作出 HE、HER 与折扣系数之间的函数关系图像，从而在最大化 HE 和 HER 的条件下计算出债券的最优折扣系数。最后，计算出该债券的收益率，并与传统多事件触发巨灾债券进行比较。

1) 数据来源及处理

本文选取 1995 ~ 2017 年损失超过 1 亿元的地震损失和相应的震级作为样本数据，并利用 CPI 指数将历年经济损失调整至 2017 年水平，描述统计结果见表 1。其中数据量共为 91 个，数据来源于 1995 ~ 2017 年各年的《中国大陆地震灾害损失述评》。

表 1 数据描述统计

统计量	震级	经济损失额
偏度	0.38	9.45
峰度	2.94	92.84

2) 地震发生次数分布检验

根据样本数据可知每年地震发生次数的样本均值为 $91/23 \approx 3.96$ ，一般认为地震发生的次数服从泊松分布，故用 $\lambda = 3.96$ 的泊松分布进行 KS 检验，得到检验结果 P 值为 $0.327 > 0.05$ ，说明每年的地震次数服从参数 λ 为 3.96 的泊松分布。

3) 地震震级和经济损失的边缘分布检验

设地震震级和经济损失额为连续变量，由表 1 可知，地震震级和经济损失额都为右偏分布，故选取对数正态分布等 4 个常用的右偏分布进行数据拟合。参数估计方法为极大似然估计，并进行 KS 检验。

在地震震级分布拟合结果中，伽马分布的 KS 检验 P 值最大，且大于 0.05，因此伽马分布拟合检验效果最好，确定伽马分布为地震震级的统计分布（见表 2）。

在经济损失额拟合结果中，只有对数正态分布的 KS 检验 P 值大于 0.05，因此确定对数正态分布为经济损失额的统计分布（见表 3）。

表 2 地震震级分布拟合结果

分布函数	对数正态分布	伽马分布	Weibull 分布	指数分布
参数值	$\mu = 1.7786$ $\sigma = 0.1261$	$\alpha = 63.6400$ $\beta = 0.0938$	scale = 6.3068 shape = 8.0850	$\lambda = 5.9687$
KS 检验 P 值	0.7559	0.7699	0.2144	0.0000

表 3 经济损失额分布拟合结果

分布函数	对数正态分布	伽马分布	Weibull 分布	指数分布
参数值	$\mu = 2.1620$ $\sigma = 1.5611$	$\alpha = 0.2532$ $\beta = 563.7567$	scale = 20.7401 shape = 0.4585	$\lambda = 142.7579$
KS 检验 P 值	0.2355	0.0000	0.0000	0.0000

4) 地震震级和经济损失的联合分布检验

由于地震的震级和造成的经济损失之间具有一定的相关性, 不能通过边缘分布乘积的形式得到其联合分布, 故本节使用 Copula 函数来对其进行构建. Copula 函数为 N 个 $[0, 1]$ 上均匀分布随机变量的联合分布函数^[13], 故可以通过上一小节得到的震级 X 和经济损失 Y 的分布函数 $F(X)$ 和 $G(Y)$ 来对其进行拟合. 常用的 Copula 函数有正态 Copula 函数、t-Copula 函数、Clayton-Copula 函数、Frank-Copula 函数和 Gumbel-Copula 函数, 故本文将把 $F(X)$ 和 $G(Y)$ 分别代入这五种 Copula 函数中进行拟合检验, 参数估计方法为极大似然估计.

表 4 Copula 函数的拟合检验

Copula 函数	参数值	平方欧式距离
正态 Copula	$\rho = 0.5375$	0.1407
t-Copula	$\rho = 0.5375, df = 6.6050$	0.1275
Clayton-Copula	$\theta = 1.3448$	0.1731
Frank-Copula	$\theta = 3.9921$	0.1269
Gumbel-Copula	$\theta = 1.5676$	0.1355

根据表 4 的拟合结果, Frank-Copula 函数的平方欧式距离最小, 因此拟合效果最好, 故选用 Frank-Copula 函数作为震级和经济损失的联合分布.

5) 数值模拟

本节根据每年地震发生次数服从参数 $\lambda = 3.96$ 的泊松分布这一特征, 并利用拟合得

到的 Frank-Copula 函数, 通过 100 000 次蒙特卡洛模拟实验得到了 T 年内 $F(X)$ 和 $G(Y)$ 的模拟路径, 然后通过伽马分布反函数 $F^{-1}(X)$ 和对数正态分布反函数 $G^{-1}(Y)$ 分别生成震级和经济损失的模拟路径 (见图 1), 其中震级和损失的触发值设定为 75% 分位点, 即 $K_1 = 6.5$ 级, $K_2 = 21.68$ 亿元.

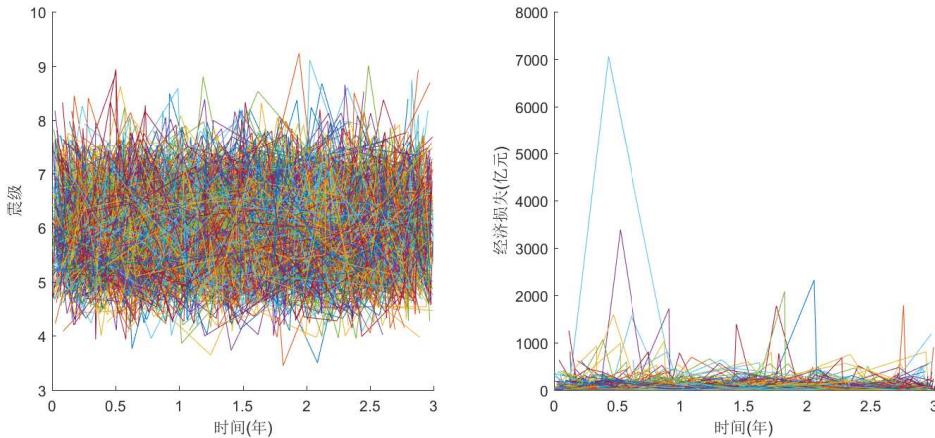


图 1 地震震级和经济损失额 1 000 次模拟路径示意图

根据地震的模拟结果可以分别得到有效期内触发规则、年内触发规则和单次事件触发规则下 T_3 和 T_4 概率密度分布 (见图 2).

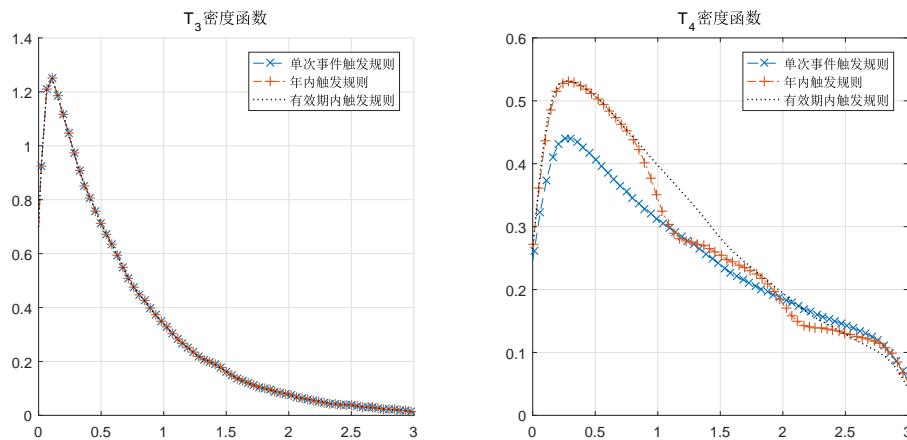


图 2 三种触发规则下 T_3 和 T_4 的密度函数图

根据前文对不同触发规则下触发事件起始时间的设定, 可以得知不同的触发规则只是改变了债券对风险事件的记忆性, 也就是从第一个风险事件触发到全部风险事件触发所用的时间, 并不会影响第一个风险事件本身触发的时间. 所以在三种不同的触发规则下, T_3

的概率分布是一样的; 而 T_4 的概率分布则因触发规则的不同而不同, 对于风险记忆性越高的触发规则, 其 T_4 的概率密度曲线越靠上方. 这是因为风险记忆性的提高会提升相同时间内全部风险事件的触发概率. 这也正是三条密度曲线从上至下依次为有效期内触发规则、年内触发规则和单次事件触发规则的原因.

另外, 比较图 2 中不同触发规则下 T_4 密度曲线的差异, 可以发现, 有效期内触发规则与年内触发规则所对应的曲线在第一年内是重合的; 而在第二年年初, 年内触发规则下的曲线会相对于有效期内触发规则下的曲线有一个相对更加陡峭的下降趋势. 这表明如果巨灾债券的到期时间为一年, 那么不管是采用年内触发规则还是有效期内触发规则都是一样的; 如果巨灾债券的到期时间在一年以上, 那么在第二年的年初, 年内触发规则下全部风险事件被触发的概率相比于有效期内触发规则会大幅度下降. 这是因为年内触发规则只在某一年之内对风险具有记忆性, 因此到了第二年年初, 由于第一年内触发的风险事件不可以被累积到第二年, 所以全部风险事件被触发的概率大幅度下降.

根据 T_3 和 T_4 的模拟结果, 可以计算得到三种不同触发规则下 T_3 和 T_4 落在不同时间段内的概率, 结果见表 5.

表 5 三种触发规则下 T_3 和 T_4 的联合分布律

概率 触发规则	有效期内	年内	单次事件
$P(0 < T_3 \leq 1, 0 < T_4 \leq 1)$	0.4918	0.4918	0.4079
$P(0 < T_3 \leq 1, 1 < T_4 \leq 2)$	0.1772	0.1395	0.1493
$P(0 < T_3 \leq 1, 2 < T_4 \leq 3)$	0.0663	0.0715	0.0895
$P(0 < T_3 \leq 1, T_4 = \infty)$	0.0394	0.0718	0.1280
$P(1 < T_3 \leq 2, 1 < T_4 \leq 2)$	0.1114	0.1114	0.0930
$P(1 < T_3 \leq 2, 2 < T_4 \leq 3)$	0.0395	0.0311	0.0336
$P(1 < T_3 \leq 2, T_4 = \infty)$	0.0238	0.0322	0.0480
$P(2 < T_3 \leq 3, 2 < T_4 \leq 3)$	0.0250	0.0249	0.0210
$P(2 < T_3 \leq 3, T_4 = \infty)$	0.0141	0.0141	0.0180
$P(T_3 = \infty, T_4 = \infty)$	0.0117	0.0117	0.0117

6) 对冲效率与最优折扣系数分析

对于式 (6) 和式 (7) 中的未知项 $E(A)$ 、 $E(A^2)$ 、 $E(L)$ 、 $\text{Var}(L)$ 和 $E(A \cdot L)$, 由本文第 2 章节第 2 小节的分析可知, $E(A)$ 、 $E(A^2)$ 和 $E(A \cdot L)$ 中的多项式系数可以通过表 5 计算得到, 而 $E(L)$ 和 $\text{Var}(L)$ 可以通过上一小节的地震损失模拟路径来获得. 由此我们可以得到 HE 和 HER 关于 w 的函数表达式, 接下来我们作出 HE 和 HER 在不同的债券触发规则下的函数图像 (见图 3、图 4). 其中债券相关参数设定如下:

(i) 假设全行业所有保险公司发行巨灾债券总面值之和为 100 亿元, 某保险公司的市场份额 M 为 30%, 且选择通过设立 SPV 来发行巨灾债券, 则其发行巨灾债券的总面值 $FV = 100 \text{ 亿} \cdot M = 30 \text{ 亿}$. 债券的票面利率 r 设定为 10%, 到期时间 T 为 3 年, 发行费用率 ζ 设定为 1%.

(ii) 市场利率参照 2013 年 12 月 27 日的 3 年期国债到期收益率, 即 $\delta = 4.37\%$, 并假定在债券到期前利率保持不变.

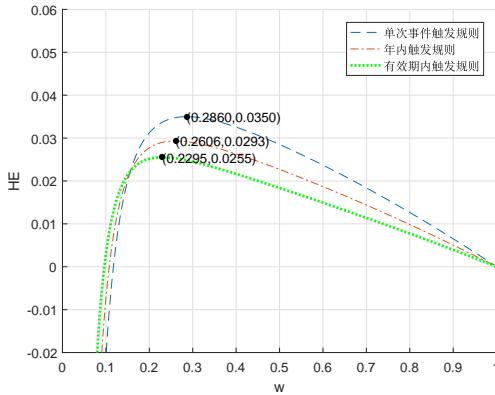


图 3 三种触发规则下 HE 的函数图像

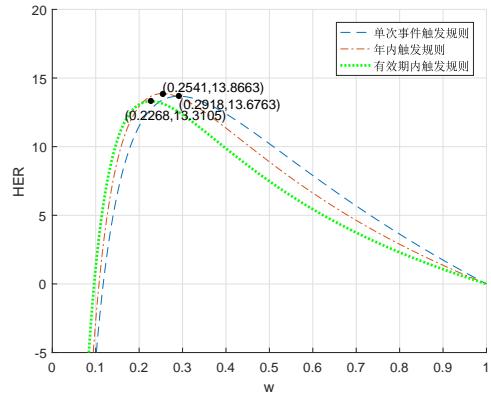


图 4 三种触发规则下 HER 的函数图像

如图 3 和图 4 所示, 在有效期内触发规则下, 保险公司如果出于最大化 HE 的目的, 应该将 w 设置在 22.95% 左右; 如果保险公司想尽可能提高 HER, 则应该将 w 设置在 22.68% 左右. 而在年内触发规则和单次事件触发规则下, 对应的两处取值分别为 26.06%、25.41% 和 28.6%、29.18%. 但是, 不管是在哪种触发规则下, 最化 HE 对应的最优折扣系数取值与最大化 HER 时的结果都是非常接近的, 这说明巨灾债券的发行成本对于对冲效率并没有显著的影响.

最优折扣系数随着巨灾债券风险事件记忆性的减弱而增大, 即单次事件触发规则下的最优折扣系数是最大的, 年内触发规则次之, 有效期内触发规则下的最优折扣系数最小. 这一现象在图 3 和图 4 中都有得到体现 (为了叙述方便, 下文对于巨灾债券对冲效果的分析不再对 HE 和 HER 这两个指标做具体的区分). 我们知道, 不同的触发规则会改变 T_4 的大小, 这使得该债券的收益也因此受到影响. 由式 (1) 可知, 当巨灾债券触发一个风险事件时, 投资者当期及之后 (触发全部风险事件前) 能相比未发生巨灾时多获得一部分利息, 这里, 我们称这部分多获得的利息为该债券带来的利息风险补偿效应. 当触发全部风险事件后, 投资者当期及之后的利息和本金都会受到损失, 我们称损失的这部分现金流为该债券带来的本息损失效应. 显然, 全部风险事件的触发会使得该债券的现金流支付由风险补偿效应转变为损失效应. 而对于巨灾债券发行方来说, 只有损失效应部分起到了对冲效果, 风险补偿效应则不利于其进行对冲, 所以巨灾债券的最终对冲效果需要综合这两个效应各自所产

生的作用。在单次事件触发规则下, 由于风险事件不可以被累积, 利息风险补偿效应的持续时间会相对较长, 本息损失效应持续的时间会相对较短。这就使得巨灾债券发行方将会采用一个较大的折扣系数从而尽可能减小风险补偿效应对对冲效果的影响。而有效期内触发规则下的情况则正好相反, 由于其对风险事件的记忆时间最长, 所以利息的风险补偿将会较早结束并较早触发本息的损失效应, 这将使得巨灾债券发行方将折扣系数设定为一个较小的值, 从而不仅能从支付给投资者的本息折扣中得到最大的收益, 而且不用担心由此而带来的高额风险补偿利息。

无论在哪种触发规则下, 随着 w 的增大, HE 和 HER 在 $(0, 1]$ 区间内都是先上升后下降。当 w 取值过低时, 两者会出现负值, 说明巨灾债券发行方的经济损失方差大于发行该债券前的值, 即巨灾债券的发行不仅没有对冲掉风险反而还扩大了风险。原因很明显, 这种现象是由巨灾债券本身的风险补偿与损失机制导致的。

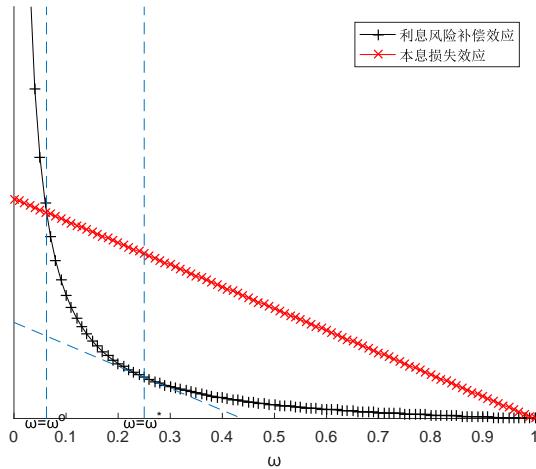


图 5 利息风险补偿效应与本息损失效应示意图

巨灾债券的对冲效果反映了保险公司通过该债券向资本市场转移损失的能力, 可以将其理解为本息损失效应与利息风险补偿效应的差值。如图 5 所示, 如果用 w^0 表示 $(0, 1)$ 区间对冲效果为 0 时的 w 取值, w^* 表示取得最大对冲效果时的 w 取值, 即最优折扣系数, 那么当 $0 < w < w^0$ 时, 过小的 w 会导致利息风险补偿效应大于本息损失效应, 以致于保险公司不但要面临巨灾本身造成的损失, 而且还要支付给投资者比以往更多的本息, 所以债券的对冲效果为负数。 w 的增大会导致本息损失效应与利息风险补偿效应的同时减小。当 $0 < w < w^0$ 时, 利息风险补偿效应下降的速度快于本息损失效应, 所以此时 w 的增大会缩小两个效应之间的差距, 以致于在 $w = w^0$ 处二者正好相互抵消, 从而使得对冲效果在此处变为 0; 当 $w^0 < w < w^*$, 利息风险补偿效应下降的速度仍然快于本息损失效应, 这使得本息损失效应开始大于利息风险补偿效应, 对冲效果在该区间内变为一个不断增大的正数。

当 $w^* < w \leq 1$ 时, 利息风险补偿效应下降的速度开始慢于本息损失效应, 这使得二者原本之间的差距在不断缩小, 此时虽然债券发行方仍然能通过巨灾债券对冲掉一部分风险, 但对冲效果相比 $w = w^*$ 处开始不断下降. 当 w 继续增大到取值为 1 时, 利息风险补偿效应再次和本息损失效应相抵消, 此时 HE 和 HER 都等于 0. 或者由式 (1) 可知, 当 $w = 1$ 时, 无论是否触发风险事件, 巨灾债券的现金流支付都是相同的, 这导致债券发行前后的损失方差没有发生任何变化, 所以没有任何对冲效果.

7) 与传统多事件触发巨灾债券的比较

传统多事件触发巨灾债券的触发事件的起止时间与本文第 2 章节第 2 小节所述有效期内触发规则下的情形相同, 且其利息和本金均存在损失可能: 当触发其中一个风险事件时, 当期及之后的利息将不予支付; 当触发全部风险事件时, 本金也会受到损失. 债券第 k 年的现金流 $\text{CF}(k)$ 为:

$$\text{CF}(k) = \begin{cases} C \cdot I_{T_3>k}, & k = 1, 2, \dots, T-1; \\ C \cdot I_{T_3>k} + \text{FV} \cdot I_{T_4>k}, & k = T, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $I_{T_3>k}$ 和 $I_{T_4>k}$ 为示性函数, C 为未发生巨灾时每年年末支付的息票, FV 为债券面值.

为了验证本文所设计风险反馈条件下的巨灾债券能达到减小投资者损失风险的目的, 接下来我们将其与传统多事件巨灾债券进行收益率的比较. 由于传统多事件巨灾债券的风险事件可以在整个债券有效期内累积, 所以其比较对象也采用有效期内触发规则.

根据十万次地震路径模拟结果, 可以测算出二者的收益率分布情况 (此处本文所设计债券折扣系数的取值以最大化 HE 为标准, 即 $w = 22.95\%$; 如果要测算最大化 HER 下的收益率, 方法与此处相同, 不再赘述), 结果见表 6.

表 6 收益率比较

	传统多事件巨灾债券	考虑风险反馈的多事件巨灾债券
收益率为负的概率	83.24%	62.8%
收益率期望	-61.96%	0.39%
收益率最大值	165.07%	86.86%
收益率最小值	-100%	-19.98%
收益率方差	0.5213	0.0843

对于传统多事件触发巨灾债券, 由于风险事件触发与否对现金流的支付影响较大, 故该债券收益率极不稳定, 易受到具体地震发生情况的影响, 投资者因此承受了较高的风险. 引入了风险反馈机制后, 由于利息的风险补偿效应削弱了全部风险事件触发后的本息损失对收益率的负面影响, 因而使得投资者面临损失的可能性由 83.24% 降低到了 62.8%.

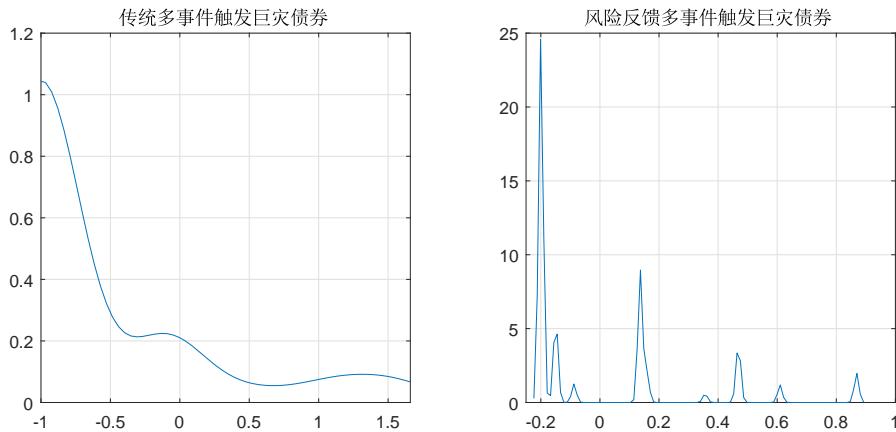


图 6 收益率密度函数

图 6 为传统多事件触发巨灾债券与本文所设计债券收益率的密度函数对比。传统多事件触发巨灾债券的收益率密度函数右尾比较扁平, 这表明投资者可能会获得一个较为极端的高收益率, 但相应的代价是不得不面对一个较高的损失概率, 这说明传统多事件巨灾债券的收益率波动比较大。通过引入风险反馈机制, 这一现象得到明显的改善, 收益率方差由 0.5213 减小到了 0.0843。此外, 风险反馈机制的引入使得投资者面临 20% 以上损失的可能性大幅度减小, 但作为交换, 收益率在 -20% 到 0 之间的概率会有所上升。值得注意的是, 风险反馈机制的引入使得债券收益率呈现多峰分布形式, 而传统多事件巨灾债券并未出现这一情况。这可能是由于传统巨灾债券在触发一个风险事件后, 余期的利息支付便得以确定, 与全部风险事件触发时间 T_4 的大小无关; 而风险反馈机制下的巨灾债券, T_4 会影响到利息风险补偿效应结束的时间以及本息损失效应开始的时间, 即余期的利息将受到全部风险事件触发时间的影响。这使得该债券的现金流结构更为多样性, 因此收益率呈现多峰分布的特点。

§4. 巨灾触发参数对最优折扣系数的影响

最优折扣系数除了受到不同触发机制的影响之外, 还与一些参数的设定有关, 例如巨灾风险事件的触发值 K_1 和 K_2 。这是因为触发值的变化会导致 HE 和 HER 函数的最大值点也发生变化。为此, 本章节尝试对震级和损失的触发值取多个不同的分位点, 考察在三种不同的触发规则下最优折扣系数的变化情况。

如图 7~9 所示, 不管是出于最大化 HE 还是 HER 的目的, 当 K_1 和 K_2 同时增大时, 三种触发规则下的最优折扣系数都会随之增大。这是因为触发值的增大导致风险事件的触发概率下降, 使得全部风险事件的触发时间 T_4 增大, 这导致本息损失效应对冲效果

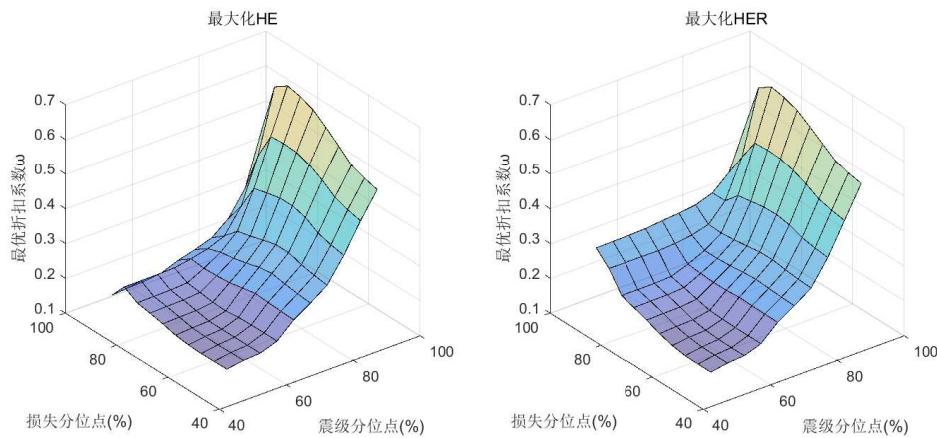


图 7 有效期内触发规则

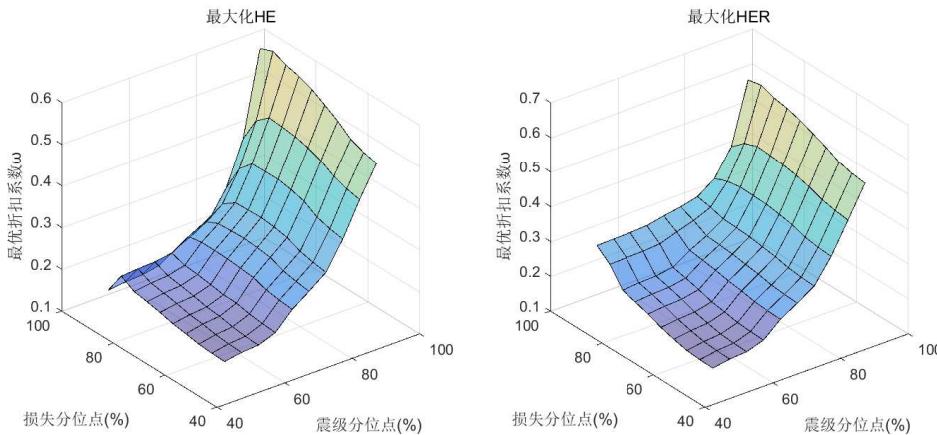


图 8 年内触发规则

的影响下降, 从而在这种情况下巨灾债券发行方可以考虑采用一个较大的折扣系数. 尽管同时增大两个触发值也会增大风险事件首次触发的时间 T_3 , 但此举在一般情况下并不会削弱利息的风险补偿效应. 这是因为相对于单一风险事件的触发, 全部风险事件的触发对于触发条件的设定更为苛刻, 所以 T_3 受到的影响会小于 T_4 , 从而利息风险补偿效应的持续时间 $\min(T_4, T) - \min(T_3, T)$ 这一差值增大, 所以最终的结果仍然是最优折扣系数随之增大.

可以发现, 当巨灾触发值处在一个相对较小的水平时, 不同触发规则下的函数图像差别不明显; 而在巨灾触发值设定比较大的区间, 有效期内触发规则和年内触发规则下的图像出现一个较明显的凸起, 即最优折扣系数随着损失触发值的增大而先增大后减小, 而单次事件触发规则下图像则相对平整. 这一现象不管是出于最大化 HE 还是 HER 的目的都有在图 7~9 中得到体现. 当 K_1 和 K_2 都比较小时, 风险事件记忆性对于巨灾债券的影响会变得很弱, 不管是哪种触发规则下的巨灾债券都会很容易达到其触发值, 所以图像差

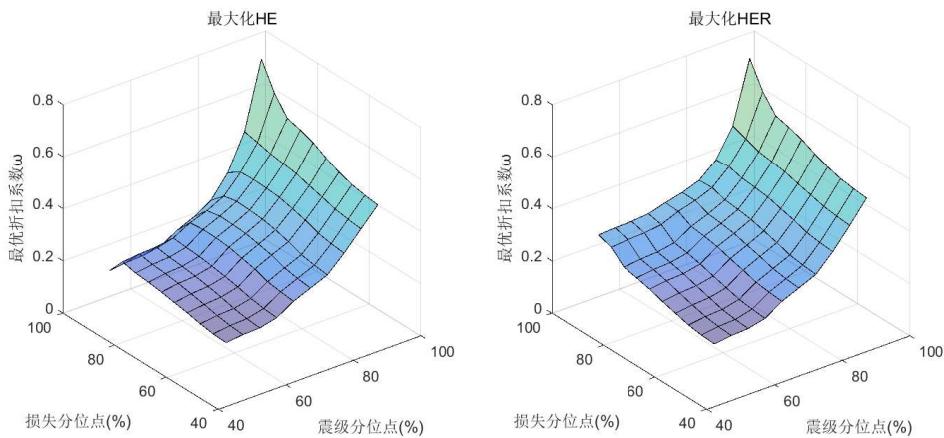


图9 单次事件触发规则

异不大。另外对于凸起现象的解释,需要考虑到 T_3 和 T_4 的变动情况。触发值的设定会影响到 T_3 和 T_4 的大小,尽管在一般情况下,触发值的提高会使得 T_3 和 T_4 同时增大并且 T_4 的变化量相对较大,但是有时也有特例。当巨灾债券发行方把触发值设定在一个较难被触发的极端范围内时,此时进一步提高触发值可能会导致 $\min(T_4, T) - \min(T_3, T)$ 出现下降的趋势。要解释这一现象,我们首先把初始触发值设定为一个较小的数,这时如果提高损失触发值就如前文所述的情况那样使得 T_4 的变化量大于 T_3 的变化量,从而最优折扣系数上升。接下来我们保持震级触发值不变,将损失触发值提高到一个使得 T_4 接近债券的到期时间 T 的水平,那么此时本息损失效应对最优折扣系数的影响已经可以忽略。如果继续提高损失触发值,利息风险补偿的持续时间 $\min(T_4, T) - \min(T_3, T)$ 将会减小,从而使得最优折扣系数减小。整个过程反映在图中就是呈现一个凸起的形状。但是在单次事件触发规则下,风险事件不可被累积的特性使得 T_4 对于触发值的提高过于敏感,这一特征削弱了 $\min(T_4, T) - \min(T_3, T)$ 这一差值的下降趋势,从而使得最优折扣系数的变化相对平稳。

另外,三种触发规则下的图像沿震级触发值的走向都要比沿损失触发值的走向更为陡峭,这说明最优折扣系数对于震级触发值的变化更为敏感。

§5. 结 论

对于保险公司来说,巨灾债券运行机制的设计至关重要。这不仅关系到对投资者的吸引力,更关系到保险公司分散巨灾风险损失的能力与效率。为此,本文以最大化对冲效率为目标,对本文所构造支付函数下的多事件触发巨灾债券的最优折扣系数进行了分析,得到以下结论:

- (i) 风险事件记忆性越强的巨灾债券,其最优折扣系数越小。由于巨灾债券对风险事件的记忆性会影响到全部风险事件触发的时间,从而影响到利息风险补偿效应和本息损失

效应的持续时间, 所以对于风险事件记忆性较强的巨灾债券来说, 为了达到一个较高的对冲效率, 债券发行方会设置一个较小的折扣系数, 从而减少全部风险事件发生后对投资者的本息支付.

(ii) 债券发行方应当同时考虑到利息风险补偿效应以及本息损失效应的影响, 从而确定一个合理的折扣系数. 过大或过小的折扣系数都不利于提高该债券的对冲效率. 这是因为过小的折扣系数虽然能减少全部风险事件触发后的现金流支付, 但这样同时也会提高风险补偿利息额; 而过大的折扣系数则因为起到相反的作用也不利于进行对冲.

(iii) 相比于传统多事件触发巨灾债券, 本文所设计债券的期望收益率有明显提高. 这是因为利息的风险补偿效应削弱了全部风险事件触发后的本息损失对收益率的负面影响, 因此投资者损失的可能性大大降低. 且该债券收益率的波动性也有明显下降, 这说明投资者面临的风险得到了有效控制.

(iv) 巨灾债券发行方对于触发值的设定会影响到最优折扣系数的大小. 当所有触发值同时增大时, 最优折扣系数也相应增大. 由于全部风险事件的触发比单一某个风险事件的触发更容易受到触发值的影响, 所以当同时增大所有触发值时, 全部风险事件的触发时间和任意某一风险事件的首次触发时间都会向后推迟, 且前者的变化量更大, 从而造成利息风险补偿效应持续时间增大, 本息损失效应持续时间减少, 此时保险公司只能将折扣系数取一个较大的值以此来减弱利息风险补偿效应的影响. 鉴于此, 债券发行方在对巨灾债券的运行机制进行设计时, 应考虑到触发值这一关键因素.

(v) 巨灾债券的触发规则会影响到最优折扣系数对触发值的敏感性. 在有效期内触发规则及年内触发规则下, 当触发值处在一个较大的区间时, 此时再增大损失触发值将不再会延长利息风险补偿效应的持续时间, 这反而使得最优折扣系数出现下降的趋势. 而单次事件触发规则下则削弱了这一趋势, 这是因为此时全部风险事件触发的时间对于触发值的变化过于敏感, 使得利息风险补偿效应的持续时间不会受到太大影响.

但本文同样存在诸多的局限性: 对于巨灾债券期限的设置, 仅仅考虑了 3 年期的情况, 没有扩展至更多年限; 且没有引入随机利率模型, 而是简单地假设利率在债券到期前保持不变; 对于巨灾债券最优折扣系数的分析, 只探讨了本文所构造的支付函数下的情形, 对于更一般的情况没有涉及. 显然这会使研究结果缺乏一定的说服力. 但这些不足之处也为接下来的研究提供了方向, 今后可以尝试对更多复杂运行机制的巨灾债券进行研究, 并将债券推广至更多年限, 引入随机利率模型, 从而提高研究应用价值, 帮助保险公司做出更好的决策.

参 考 文 献

- [1] NOWAK P, ROMANIUK M. Pricing and simulations of catastrophe bonds [J]. *Insurance Math Econom*, 2013, **52**(1): 18–28.

- [2] MA Z G, MA C Q. Pricing catastrophe risk bonds: a mixed approximation method [J]. *Insurance Math Econom*, 2013, **52**(2): 243–254.
- [3] 李永, 范蓓, 刘鹃. 多事件触发巨灾债券设计与定价研究: 以中国台风债券为例 [J]. 中国软科学, 2012, (3): 41–48.
- [4] 李永, 胡帅, 范蓓. 随机利率下跨期多事件触发巨灾债券定价研究 [J]. 中国管理科学, 2013, **21**(5): 8–14.
- [5] 李永, 胡帅, 范蓓. 跨期多事件触发巨灾债券定价模拟分析 [J]. 数理统计与管理, 2013, **32**(6): 1132–1140.
- [6] 李永, 范蓓, 刘鹃. 多事件触发巨灾债券定价机理与比较分析 [J]. 预测, 2014, **33**(2): 66–70.
- [7] 杨帆, 周明. 中国巨灾债券定价策略与期限结构研究——以地震债券为例 [J]. 金融经济学研究, 2016, **31**(3): 118–128.
- [8] 张笑玎, 米岩, 乔慧森. 复合触发机制下地震巨灾债券定价研究——考虑风险反馈的影响 [J]. 保险研究, 2018, (1): 67–78.
- [9] 田玲, 孙宁, 杨琛. 地震指数保险的帕累托最优赔付比例研究——以 EQ II 产品为例 [J]. 保险研究, 2019, (6): 39–50+80.
- [10] ZHANG X L, TSAI C C L. The optimal write-down coefficients in a percentage for a catastrophe bond [J]. *N Am Actuar J*, 2018, **22**(1): 1–21.
- [11] 田玲. 巨灾风险债券运作模式与定价机理研究 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2009.
- [12] 潘坚, 肖庆宪. 混合模型下具有动态违约边界的债券定价 [J]. 应用概率统计, 2019, **35**(1): 28–38.
- [13] 梁歌春, 任学敏. Copula 理论在信用风险研究中的应用 [J]. 应用概率统计, 2011, **27**(4): 369–379.

Study on Optimal Discount Coefficient of Multi-Event Catastrophe Bonds under Risk Feedback Conditions

SUN Zhentao YAO Dingjun

(School of Finance, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing, 210023, China)

CHENG Gongpin

(School of Economics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing, 210023, China)

Abstract: Due to the correlation between the trigger events of traditional multi-event catastrophe bonds, investors are more likely to suffer losses and their returns are more volatile. In order to reduce the impact of this disadvantage, taking earthquake catastrophe bond as an example, this paper reconstructs the payment function of multi-events catastrophe bond considering risk feedback. Under the objective of maximizing the hedging efficiency of insurance companies, we obtain the optimal discount coefficient of the cash flow payment after triggering all risk events by Monte Carlo simulation. The results show that under the new payment function, the expected return of investors increases and the volatility of return decreases, which makes the bond more attractive to the market. Finally, we focuses on the analysis of the impact of catastrophe triggering parameters on the optimal discount coefficient.

Keywords: CAT bonds; risk feedback; multi-events trigger; Monte Carlo simulation; hedging efficiency; discount coefficient

2020 Mathematics Subject Classification: 91B05; 91G20