

具有复合相依的离散时间风险模型的尾部渐近及数值模拟 *

井浩杰 彭江艳* 蒋智权

(电子科技大学数学科学学院, 成都, 611731)

摘要: 本文研究具有复合相依的离散时间风险模型. 保险公司进行风险和无风险投资导致了任意相依的随机折现因子. 索赔额服从单边线性过程, 其中噪声项遵循成对渐近独立, 噪声项和随机折现因子相互独立. 假设噪声项不必同分布并且是非负的随机变量, 其分布分别为 F_1, F_2, \dots, F_n . 当平均分布 $n^{-1} \sum_{i=1}^n F_i$ 是重尾时, 本文得到离散时间风险模型的有限时间破产概率的渐近估计. 最后通过蒙特卡洛模拟验证了本文的结果.

关键词: 单边线性过程; 成对渐近独立; 重尾; 数值模拟

中图分类号: O211.4

英文引用格式: JING H J, PENG J Y, JIANG Z Q. Tail asymptotic of discrete-time risk model with compound dependence and numerical simulation [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2021, 37(6): 569–584. (in Chinese)

§1. 引言

本文考虑一个离散时间风险模型, 其中在第 i 个周期 ($i \in N$), 保险公司的净损失 (累计索赔减去总保费收入) 由实值随机变量 Z_i 表示. 假定索赔的支付和保费的收取都发生在每个周期期末, 在每个周期, 保费收入是一个确定的常数 $c > 0$. 保险公司支付的索赔额由非负随机变量 X_i 表示, 我们用单边线性过程刻画索赔额的相依结构, 令

$$X_n = \sum_{j=1}^n \varphi_{n-j} \varepsilon_j + \varphi_n \varepsilon_0, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

其中, 我们假设噪声项 $\{\varepsilon_i\}_{i \geq 1}$ 是非负随机变量并且服从具有分布函数为 F_i 的某些相依结构, $\{\varphi_i\}_{i \geq 0}$, ε_0 是非负常数且 $\varphi_0 > 0$. 单期净损失为 $Z_i = X_i - c$.

考虑保险公司实际情况和相依结构 (1), 其中每一个索赔可能伴随着另一个索赔. 这种类型的风模型更加符合实际情况. 例如, 自然灾害引起众多索赔的发生, 并且索赔之间是相依的. 众所周知, 将索赔额表示为过去噪声项权和的线性过程包含了很多在保险风理论中广泛使用的相依结构. 例如, Gerber^[1] 用自回归模型 (AR) 和自回归移动平均模型

*国家自然科学基金项目 (批准号: 71871046)、四川省科技计划项目 (批准号: 2021YFQ0007) 和国家自然科学基金项目 (批准号: 72033002) 的资助.

*通讯作者, E-mail: jiangerly@163.com, pengjiangyan@uestc.edu.cn.

本文 2019 年 12 月 19 日收到, 2020 年 9 月 13 日收到修改稿.

(ARMA) 描述一个保险公司的年收益. Yang 和 Zhang^[2] 在恒定无风险利率下使用自回归模型描述索赔额. 此外, 线性过程经常在时间序列分析中使用. 多数学者利用这种相依结构刻画索赔额. 参见文献 [3–5]. 因此, 我们也使用单边线性过程刻画索赔额的相依结构.

我们将 i 时刻到 0 时刻的随机折现因子 (随机收益率的倒数) 由非负随机变量 θ_i 表示, $\{\theta_i\}_{i \geq 1}$ 是任意相依的, 但 $\{\varepsilon_i\}_{i \geq 1}$ 和 $\{\theta_i\}_{i \geq 1}$ 是相互独立的. 特别地, 随机折现因子可以表示为一些独立同分布并且是非负随机变量的乘积, 即 $\theta_i = \prod_{j=1}^i Y_j$, $\{Y_j\}_{j \geq 1}$ 是独立同分布且非负的随机变量序列, 可以表示为第 j 个周期的随机折现因子. 按照文献 [6] 的术语, 我们分别称 $\{X_i\}_{i \geq 1}$ (或者 $\{\varepsilon_i\}_{i \geq 1}$) 和 $\{\theta_i\}_{i \geq 1}$ (或者 $\{Y_i\}_{i \geq 1}$) 为保险风险和金融风险. 接着对于每一个正整数 n , 累计净损失达到 n 时刻的随机折现值表示为

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n (X_i - c)\theta_i.$$

然后我们可以定义 n 时刻破产概率为

$$\psi(x; n) = \mathbb{P}\left\{\max_{0 < m \leq n} \sum_{i=1}^m [(X_i - c)\theta_i] > x\right\}, \quad (2)$$

其中 $x > 0$ 是保险公司的初始资本.

这样的离散时间风险模型已经吸引了大量学者的关注. 我们假设 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ 是独立同分布实值随机变量序列, θ_i 表示为 $\prod_{j=1}^i Y_j$, $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ 是独立同分布并且是非负的随机变量序列. 可以参考文献 [7–9]. 考虑 θ_i 的一般情形 (允许它们是任意相依), 则对于 $\psi(x; n)$ 的研究归结起来就是随机权和最大值的尾部概率渐近行为的研究. 有大量文献在遵循文献 [10] 的基础上做出了进一步的研究, 例如文献 [11–13]. 我们认为完全独立的假设是为了数学上的方便, 但在实际情形中是不切实际的, 特别地, 伴随保险和再保险产品复杂性提升, 保险风险独立不足以刻画实际保险环境. 因此, 刻画保险风险满足某个相依结构是合理的. 通过引入各种相依结构刻画保险风险 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$, 使得风险模型合理化是相关研究的一个趋势, 见文献 [14–17], 并在各种重尾保险风险条件下, 对于每一个固定的 n , $x \rightarrow \infty$, 建立了 (2) 的渐近式

$$\psi(x; n) \sim \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{\theta_i(X_i - c) > x\}. \quad (3)$$

我们注意到现有结果需要保险风险是独立且具有共同的分布 F . 此后, Chen 和 Yuen^[18] 考虑不同分布的情形. Cheng^[19] 研究控制变化分布族下, 相依且不必同分布的保险风险的有限时间破产概率的渐近估计.

在本文中, 对于每一个 $i \geq 1$, 我们假设尾部分布 $\bar{F}_i(x) = 1 - F_i(x) > 0$, $x > 0$ 以及 θ_i 在 0 点处是非退化的. 我们更多的关注有限时间破产概率的渐近行为以及累计净损失 S_n 的随机折现值的尾部行为. 在条件 (1) 和对于任意的正整数 n , $n^{-1} \sum_{i=1}^n F_i$ 是控制变化分布族的假设下, 我们的主要目标是建立一个类似于 (3) 的公式. 与现有一些在 F_i 上的限制相

比, 这是更加一般的情形 (更多的细节见第二节的注记 3 和第四节的数值模拟). 准确的讲, 大部分典型结果需要所有噪声项是相同分布, 且具有共同的重尾分布; 然而, 我们的假设包含以下几种情形: 所有噪声项是重度重尾且不同分布; 一些噪声项是重度重尾分布, 另外一些是轻度重尾分布; 一些噪声项是重尾分布, 另外一些是轻尾分布. 本假设由 Dindiené 和 Leipus^[20] 介绍, 他们研究相依随机变量序列有限和的尾部行为. 为了得到更加一般的公式, 我们进一步将平均分布的假设限制在连续变化分布族.

Tang 和 Tsitsiashvili^[10] 考虑净收入为总保费减去总索赔, 其由独立同分布的随机变量组成. 随机折现因子也是由独立同分布的随机变量组成. 净收入和随机折现因子是相互独立的. Zhang 等^[14] 考虑 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ 是同分布, 但不是严格独立的随机变量. $\{\theta_i\}_{i \geq 1}$ 是一系列非负的随机变量, 独立于 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$. 当 $\{\theta_i\}_{i \geq 1}$ 满足某些矩条件, $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ 服从双边上尾相依且满足一些条件的假设下, 他们建立了渐近关系. Yi 等^[16] 考虑 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ 是不独立且不必同分布的控制变化分布族的随机变量, 并且满足一些条件. $\{\theta_i\}_{i \geq 1}$ 是非负的随机变量序列, 独立于 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$. Yang 等^[17] 考虑 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ 是一系列具有不同分布且满足一些相依条件的实值随机变量序列. $\{\theta_i\}_{i \geq 1}$ 是一系列非负且具有不同分布的随机变量序列, 独立于 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$. 然而, 我们的论文考虑索赔额 $\{X_i\}_{i \geq 1}$ 而不是 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$, 其中索赔额进一步考虑成单边线性过程以及噪声项 $\{\varepsilon_i\}_{i \geq 1}$ 不必严格同分布的非负随机变量序列. $\{\varepsilon_i\}_{i \geq 1}$ 的分布分别为 F_1, F_2, \dots, F_n 且服从成对渐近独立 (PAI). $\{\theta_i\}_{i \geq 1}$ 服从任意相依, $\{\varepsilon_i\}_{i \geq 1}$ 和 $\{\theta_i\}_{i \geq 1}$ 相互独立. 另外, 我们考虑的是平均分布 $n^{-1} \sum_{i=1}^n F_i$ 属于重尾分布的情形. 以上是和前述文章的不同之处.

本文接下来的构成是: 第二节介绍一些符号、命题并陈述主要结果, 在第三节给出证明. 第四节展示一些模拟去验证主要结论的渐近关系.

§2. 符号与主要结果

论文通篇, C 表示一个与 x 无关且在不同地方取值可能不同的正常数. 除非特别说明, 所有的极限关系都对 $x \rightarrow \infty$ 而言. 对于两个正函数 $a(\cdot)$ 和 $b(\cdot)$, 如果 $\lim a(x)/b(x) = 1$, 则渐近关系 $a(x) \sim b(x)$ 成立; 如果 $\limsup a(x)/b(x) \leq 1$, 则渐近关系 $a(x) \lesssim b(x)$ 或 $b(x) \gtrsim a(x)$ 成立; 如果 $\lim a(x)/b(x) = 0$, 则渐近关系 $a(x) = o(b(x))$ 成立; 此外, 如果 $0 < \liminf a(x)/b(x) < \limsup a(x)/b(x) < \infty$, 则渐近关系 $a(x) \asymp b(x)$ 成立; 如果 $\limsup a(x)/b(x) < \infty$, 则渐近关系 $a(x) = O(b(x))$ 成立.

我们更多的关注一些实际的相依风险模型. 因此, 我们介绍一些相依结构去刻画保险风险. 随机变量序列 $\{Q_i\}_{i \geq 1}$ 是成对渐近独立 (PAI), 如果

$$\lim \frac{\mathbb{P}\{Q_i > q, Q_j > q\}}{\mathbb{P}\{Q_k > q\}} = 0, \quad k = i, j, \quad (4)$$

对于每一个 $i \neq j \geq 1$ 成立. 更多关于渐近独立的细节, 可以参考文献 [21]. 若 $\{Q_i\}_{i \geq 1}$ 是

相同分布, 则 PAI 结构退化到双边上尾独立^[14]. 与某些常用的上/下负相依结构相比, PAI 结构更弱且更易验证(见文献 [22–25]).

我们限制平均分布 $n^{-1} \sum_{i=1}^n F_i$ 是重尾的, 即矩母函数不存在. 一个分布 F 满足 $\bar{F}(x) = 1 - F(x) > 0, x \in \mathbb{R}$. 通过定义, 若 $\bar{F}(xy) = O(\bar{F}(x))$ 对任意的 $0 < y < 1$ 成立, 则 F 属于 \mathcal{D} (控制变化分布族). 我们也需要其他的重尾分布族. 如果 $\bar{F}(xy) \sim y^{-\alpha} \bar{F}(x)$ 对一些 $\alpha > 0$ 和任意的 $y > 0$ 成立, 则 F 属于 $\mathcal{R}_{-\alpha}$ (正则变化分布族). 如果 $\lim_{y \rightarrow 1^-} \limsup_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(xy)/\bar{F}(x) = 1$, 或者, 等价地, $\lim_{y \rightarrow 1^-} \liminf_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(xy)/\bar{F}(x) = 1$ 成立, 则 F 属于 \mathcal{C} (一致变化分布族).

众所周知, \mathcal{D} 族包含了许多有用的重尾分布并且满足

$$\mathcal{R}_{-\alpha} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{D}.$$

除此之外, 我们使用上 Matuszewska 指标 J_F^+ , 其形式为

$$J_F^+ = \inf \left\{ -\frac{\ln \bar{F}_*(y)}{\ln y} : y > 1 \right\}, \quad \bar{F}_*(y) = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)},$$

当 $F \in \mathcal{D}$ 时, $J_F^+ < \infty$. 当 $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ 时, $J_F^+ = \alpha$. 接下来, 我们记 $L_F = \liminf_{y \downarrow 1} \bar{F}_*(y)$, 并根据该定义有以下三个等价的论述(更多细节见文献 [26]):

- (i) $F \in \mathcal{D}$; (ii) 对于某些 $y > 1$, $\bar{F}_*(y) > 0$; (iii) $J_F^+ < \infty$.

最后我们指出当 $F \in \mathcal{C}$ 时, $L_F = 1$.

接下来的命题 1 来源于文献 [26] 中命题 2.2.1 和文献 [7] 中引理 3.5 的结合.

命题 1 在 \mathbb{R} 上的分布 $F \in \mathcal{D}$, 有以下关系成立.

- (i) 对于任意的 $p > J_F^+$, 存在两个正常数 C 和 D , 使得不等式 $\bar{F}(y)/\bar{F}(x) \leq C(y/x)^{-p}$ 对于任意的 $x \geq y \geq D$ 均成立.
- (ii) 对于任意的 $p > J_F^+$, 有以下等式成立: $x^{-p} = o(\bar{F}(x))$.

按照惯例, 空集求和为 0, 空集乘积为 1. 为了后续表达的方便, 我们记

$$w_{j,n} = \sum_{i=j}^n \theta_i \varphi_{i-j}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad w_{0,n} = \sum_{i=1}^n \theta_i \varphi_i, \quad v_{1,n} = \sum_{i=1}^n \theta_i.$$

本文, 我们考虑相依离散时间风险模型并作出如下假设:

- H1. 索赔额服从单边线性过程, 即 (1). 噪声项 $\{\varepsilon_i\}_{i \geq 1}$ 是服从不同分布的非负随机变量序列并且满足 (4), 其分布为 $\{F_i\}_{i \geq 1}$.
- H2. $\{\theta_i\}_{i \geq 1}$ 表示从 i 时刻到 0 时刻的折现因子, 其满足任意相依并且是非负的随机变量序列.
- H3. $\{\varepsilon_i\}_{i \geq 1}$ 和 $\{\theta_i\}_{i \geq 1}$ 相互独立.

对于任意的整数 $n \geq 1$, 我们利用 $H_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n F_i$ 表示平均分布.

接下来, 我们阐述本文的主要结果.

定理 2 考虑上述离散时间风险模型并且假设 H1–H3 成立. 对于任意的 $n \geq 1$ 和某些 $\zeta > 0$, $1 \leq i \leq n$, 如果 $H_n \in \mathcal{D}$, $H_n(-x) = o(\overline{H_n}(x))$ 和 $E\theta_i^{J_{H_n}^+ + \zeta} < \infty$ 成立, 则对于任意的 $n \geq 1$, 有

$$L_{H_n} \sum_{i=1}^n P\{\varepsilon_i w_{i,n} > x\} \leq \psi(x; n) \leq L_{H_n}^{-1} \sum_{i=1}^n P\{\varepsilon_i w_{i,n} > x\}. \quad (5)$$

注记 3 条件 $H_n \in \mathcal{D}$ 比现有一些对 H_n 的限制更加一般化. 实际上, 如果每一个 $1 \leq i \leq n$, $F_i \in \mathcal{D}$, 则 $H_n \in \mathcal{D}$. 另一方面, 如果 $F_1 \in \mathcal{D}$ 和

$$\overline{F_i}(x) = o(\overline{F_1}(x)), \quad 2 \leq i \leq n, \quad (6)$$

易知 $H_n \in \mathcal{D}$, 但是 F_i , $2 \leq i \leq n$, 能被假设为除了在 \mathcal{D} 族下的任意一个分布并且满足 (6). 例如, 我们选择 $F_1 \in \mathcal{D}$ 是 t 分布以及 $F_i \notin \mathcal{D}$, $2 \leq i \leq n$ 是在 $[-1, 1]$ 上的均分分布, 则 $H_n \in \mathcal{D}$.

注记 4 根据 $E\theta_i^{J_{H_n}^+ + \zeta} < \infty$ 和 C_r 不等式, 可知

$$\begin{aligned} Ew_{i,n}^{J_{H_n}^+ + \zeta} &\leq \left(\max_{0 \leq l \leq n} \varphi_l \right)^{J_{H_n}^+ + \zeta} E \left(\sum_{j=1}^n \theta_j \right)^{J_{H_n}^+ + \zeta} \\ &\leq \left(\max_{0 \leq l \leq n} \varphi_l \right)^{J_{H_n}^+ + \zeta} C_r \sum_{j=1}^n (E\theta_j^{J_{H_n}^+ + \zeta}) < \infty, \quad 0 \leq i \leq n, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $C_r = \begin{cases} 1, & 0 < r < 1; \\ n^{r-1}, & r \geq 1. \end{cases}$

考虑一个具体情形, 即 $\overline{H_n}$ 属于一致变化分布族或正则变化分布族, 则精准的渐近关系可以得到.

推论 5 (i) 在定理 2 的条件下, 若 $H_n \in \mathcal{C}$, 则

$$\psi(x; n) \sim \sum_{i=1}^n P\{\varepsilon_i w_{i,n} > x\}. \quad (8)$$

(ii) 特别地, 若 $F_i \in \mathcal{R}_{-\alpha_i}$ 以及对于某些 $\xi > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $Ew_{i,n}^{\alpha_i + \xi} < \infty$ 成立, 则

$$\psi(x; n) \sim \sum_{i=1}^n \overline{F_i}(x) Ew_{i,n}^{\alpha_i} \sim \sum_{\{i: \alpha_i = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n\}} \overline{F_i}(x) Ew_{i,n}^{\alpha_i}. \quad (9)$$

§3. 一些引理和证明

接下来, 我们给出几个重要的引理, 它们将在定理 2 和推论 5 的证明中起到关键作用.

引理 6 在定理 2 的条件下, $\{X_i\}_{i \geq 1}$ 任意相依, 但不满足 $H_n(-x) = o(\overline{H}_n(x))$, 对于任意的 $n \geq 1$, 有

$$\sum_{i=1}^n \mathsf{P}\{w_{i,n}\varepsilon_i > x\} \asymp \sum_{i=1}^n \overline{F}_i(x).$$

证明: 根据 $w_{i,n}, i = 1, 2, \dots, n$ 是非负随机变量, 则 $w_{1,n} \wedge \dots \wedge w_{n,n}$ 非负并且在 0 点处非退化. 进而有如下关系式成立:

$$\sum_{i=1}^n \mathsf{P}\{w_{i,n}\varepsilon_i > x\} = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \sum_{i=1}^n \overline{F}_i\left(\frac{x}{t_i}\right) \mathsf{P}(w_{1,n} \in dt_1, \dots, w_{n,n} \in dt_n). \quad (10)$$

对于下界, 根据 (10)、Fatou 引理和 $H_n \in \mathcal{D}$, 有

$$\begin{aligned} & \liminf \left[\sum_{i=1}^n \mathsf{P}\{w_{i,n}\varepsilon_i > x\} \Big/ \sum_{i=1}^n \overline{F}_i(x) \right] \\ & \geq \liminf \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\overline{H}_n(x/(t_1 \wedge \dots \wedge t_n))}{\overline{H}_n(x)} \mathsf{P}(w_{1,n} \in dt_1, \dots, w_{n,n} \in dt_n) \\ & \geq \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \overline{H}_{n_*}\left(\frac{1}{t_1 \wedge \dots \wedge t_n}\right) \mathsf{P}(w_{1,n} \in dt_1, \dots, w_{n,n} \in dt_n) \\ & = \mathsf{E}\left[\overline{H}_n\left(\frac{1}{w_{1,n} \wedge \dots \wedge w_{n,n}}\right)\right] > 0, \end{aligned} \quad (11)$$

其中最后一步成立是因为 $H_n \in \mathcal{D}$ 和 $w_{1,n} \wedge \dots \wedge w_{n,n}$ 在 0 点处非退化.

对于上界, 我们利用 \mathcal{D} 族的 Potter's 界. 根据定理 2 中的 $\zeta > 0$ 和命题 1 (i) 中定义的正常数 D , 对于 $x \geq D$, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \mathsf{P}\{w_{i,n}\varepsilon_i > x\} \Big/ \sum_{i=1}^n \overline{F}_i(x) \\ & \leq \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{\overline{H}_n(x/(t_1 \vee \dots \vee t_n))}{\overline{H}_n(x)} \mathsf{P}(w_{1,n} \in dt_1, \dots, w_{n,n} \in dt_n) \\ & = \left(\int \dots \int_{\{t_1 \vee \dots \vee t_n \leq 1\}} + \int \dots \int_{\{1 < t_1 \vee \dots \vee t_n \leq x/D\}} + \int \dots \int_{\{t_1 \vee \dots \vee t_n > x/D\}} \right) \\ & \quad \times \frac{\overline{H}_n(x/(t_1 \vee \dots \vee t_n))}{\overline{H}_n(x)} \mathsf{P}(w_{1,n} \in dt_1, \dots, w_{n,n} \in dt_n) \\ & =: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (12)$$

显然地, $I_1 \leq 1$, 分别利用命题 1 (i) 和 (ii), 我们可以得到

$$\begin{aligned} I_2 & \leq C \int \dots \int_{\{1 < t_1 \vee \dots \vee t_n \leq x/D\}} (t_1 \vee \dots \vee t_n)^{J_{H_n}^+ + \zeta} \mathsf{P}(w_{1,n} \in dt_1, \dots, w_{n,n} \in dt_n) \\ & \leq C \mathsf{E}(w_{1,n} \vee \dots \vee w_{n,n})^{J_{H_n}^+ + \zeta} < \infty, \end{aligned}$$

和

$$I_3 \leq \frac{\mathsf{P}\{w_{1,n} \vee \cdots \vee w_{n,n} > x/D\}}{\overline{H}_n(x)} \leq D^{J_{H_n}^+ + \zeta} \mathsf{E}(w_{1,n} \vee \cdots \vee w_{n,n})^{J_{H_n} + \zeta} \frac{x^{(J_{H_n} + \zeta)}}{\overline{H}_n(x)} \rightarrow 0.$$

将这些估计值代入 (12), 有

$$\limsup \left[\sum_{i=1}^n \mathsf{P}\{w_{i,n} \varepsilon_i > x\} \Big/ \sum_{i=1}^n \overline{F}_i(x) \right] < \infty. \quad (13)$$

因此, 根据 (11) 和 (13), 引理 6 的关系式成立, 证毕. \square

引理 7 在定理 2 的条件下, 但不满足 $H_n(-x) = o(\overline{H}_n(x))$, 成立如下关系式

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathsf{P}\{w_{i,n} \varepsilon_i > x, w_{j,n} \varepsilon_j > x\} = o(1) \sum_{i=1}^n \overline{F}_i(x).$$

证明: 对于任意的 $1 \leq i \neq j \leq n$,

$$\begin{aligned} & \mathsf{P}\{w_{i,n} \varepsilon_i > x, w_{j,n} \varepsilon_j > x\} \\ &= \left(\iint_{\{u>v>0\}} + \iint_{\{v \geq u \geq 0\}} \right) \mathsf{P}\left\{ \varepsilon_i > \frac{x}{u}, \varepsilon_j > \frac{x}{v} \right\} \mathsf{P}(w_{i,n} \in du, w_{j,n} \in dv) \\ &\leq \int_0^\infty \mathsf{P}\left\{ \varepsilon_i > \frac{x}{u}, \varepsilon_j > \frac{x}{u} \right\} [\mathsf{P}(w_{i,n} \in du) + \mathsf{P}(w_{j,n} \in du)]. \end{aligned} \quad (14)$$

根据 (7) 和命题 1 (ii), 可得 $\mathsf{P}\{w_{i,n} > x\} = o(\overline{H}_n(x))$. 由文献 [27] 中命题 3.1 可知, 存在一个正函数 $g(\cdot)$ 有 $g(x) \downarrow 0$, $xg(x) \uparrow \infty$ 和 $\mathsf{P}\{w_{i,n} > xg(x)\} = o(\overline{H}_n(x))$, $1 \leq i \leq n$ 成立. 接下来

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \int_0^\infty \mathsf{P}\left\{ \varepsilon_i > \frac{x}{u}, \varepsilon_j > \frac{x}{u} \right\} \mathsf{P}(w_{i,n} \in du) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\int_0^1 + \int_1^{xg(x)} + \int_{xg(x)}^\infty \right) \mathsf{P}\left\{ \varepsilon_i > \frac{x}{u}, \varepsilon_j > \frac{x}{u} \right\} \mathsf{P}(w_{i,n} \in du) \\ &=: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (15)$$

因为 ε_i , $1 \leq i \leq n$, 是 PAI, 我们有

$$I_1 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathsf{P}\{\varepsilon_i > x, \varepsilon_j > x\} = o(1) \sum_{i=1}^n \overline{F}_i(x) = o(\overline{H}_n(x)), \quad (16)$$

以及通过 $\mathsf{P}\{w_{i,n} > xg(x)\} = o(\overline{H}_n(x))$, $1 \leq i \leq n$,

$$I_3 \leq n \sum_{i=1}^n \mathsf{P}\{w_{i,n} > xg(x)\} = o(\overline{H}_n(x)). \quad (17)$$

根据 ε_i , $1 \leq i \leq n$ 是 PAI, 通过 $H_n \in \mathcal{D}$, 命题 1 (i) 和 (7), 有

$$I_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \int_1^{xg(x)} \frac{\mathsf{P}\{\varepsilon_i > x/u, \varepsilon_j > x/u\}}{\overline{F}_i(x/u)} \overline{F}_i(x/u) \mathsf{P}(w_{i,n} \in du)$$

$$\begin{aligned}
&= o(1) \sum_{i=1}^n \int_1^{xg(x)} \bar{F}_i\left(\frac{x}{u}\right) \mathbb{P}(w_{i,n} \in du) \\
&\leqslant o(1) \sum_{i=1}^n \int_1^{xg(x)} \frac{\bar{H}_n(x/u)}{\bar{H}_n(x)} \sum_{j=1}^n \bar{F}_j(x) \mathbb{P}(w_{i,n} \in du) \\
&\leqslant o(\bar{H}_n(x)) C \sum_{i=1}^n \int_1^{xg(x)} u^{J_{H_n}^+ + \zeta} \mathbb{P}(w_{i,n} \in du) \\
&\leqslant o(\bar{H}_n(x)) C \sum_{i=1}^n \mathbb{E} w_{i,n}^{J_{H_n}^+ + \zeta} = o(\bar{H}_n(x)). \tag{18}
\end{aligned}$$

将 (16)–(18) 代入 (15), 我们可以得到

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \int_0^\infty \mathbb{P}\left\{\varepsilon_i > \frac{x}{u}, \varepsilon_j > \frac{x}{u}\right\} \mathbb{P}(w_{i,n} \in du) = o(\bar{H}_n(x)). \tag{19}$$

类似地,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \int_0^\infty \mathbb{P}\left\{\varepsilon_i < -\frac{x}{u}, \varepsilon_j < -\frac{x}{u}\right\} \mathbb{P}(w_{j,n} \in du) = o(\bar{H}_n(x)). \tag{20}$$

因此, 根据 (14), (19) 和 (20), 引理 7 的关系式成立, 证毕. \square

引理 8 在定理 2 的条件下, 成立如下关系式

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{w_{i,n} \varepsilon_i \leqslant -x\} = o(\bar{H}_n(x)).$$

证明: 根据定理 2 的条件, 再次利用文献 [27] 中的命题 3.1, 存在一个正函数使得

$$g(x) \downarrow 0, \quad xg(x) \uparrow \infty, \quad \mathbb{P}\{w_{i,n} > xg(x)\} = o(\bar{H}_n(x)), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

成立.

正如 (15)–(19) 的做法, 通过 $H_n(-x) = o(\bar{H}_n(x))$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{w_{i,n} \varepsilon_i \leqslant -x\} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 + \int_1^{xg(x)} + \int_{xg(x)}^\infty \right) F_i\left(-\frac{x}{u}\right) \mathbb{P}(w_{i,n} \in du) \\
&\leqslant n H_n(-x) + n \sum_{i=1}^n \int_1^{xg(x)} \frac{H_n(-x/u)}{\bar{H}_n(x/u)} \frac{\bar{H}_n(x)}{\bar{H}_n(u)} \mathbb{P}(w_{i,n} \in du) + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(w_{i,n} > xg(x)) \\
&= o(\bar{H}_n(x)) + o(\bar{H}_n(x)) \sum_{i=1}^n \int_1^{xg(x)} \frac{\bar{H}_n(x/u)}{\bar{H}_n(x)} \mathbb{P}(w_{i,n} \in du) \\
&\leqslant o(\bar{H}_n(x)) + o(\bar{H}_n(x)) C \sum_{i=1}^n \int_1^{xg(x)} u^{J_{H_n}^+ + \zeta} \mathbb{P}(w_{i,n} \in du) \\
&\leqslant o(\bar{H}_n(x)) + o(\bar{H}_n(x)) C \sum_{i=1}^n \mathbb{E} w_{i,n}^{J_{H_n}^+ + \zeta} = o(\bar{H}_n(x)).
\end{aligned}$$

因此, 我们完成了引理 8 的证明. \square

定理 2 的证明: 将式(1)代入(2)并重写表达式, 可得

$$\psi(x; n) = \mathbb{P} \left\{ \max_{0 < m \leq n} \left(\sum_{i=0}^m \varepsilon_i w_{i,m} - cv_{1,m} \right) > x \right\}. \quad (21)$$

显然地,

$$\mathbb{P} \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i w_{i,n} - cv_{1,n} > x \right\} \leq \psi(x; n) \leq \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i w_{i,n} > x \right\}. \quad (22)$$

首先证明(22)的上界. 对于任意的 $0 < l < 1$ 和 $x > 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i w_{i,n} > x \right\} \\ & \leq \mathbb{P} \left\{ \bigcup_{j=0}^n \{\varepsilon_j w_{j,n} > (1-l)x\} \right\} + \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i w_{i,n} > x, \bigcap_{j=0}^n \{\varepsilon_j w_{j,n} \leq (1-l)x\} \right\} \\ & \leq \sum_{j=1}^n \mathbb{P} \{ \varepsilon_j w_{j,n} > (1-l)x \} + \mathbb{P} \{ \varepsilon_0 w_{0,n} > (1-l)x \} \\ & \quad + \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i w_{i,n} > x, \bigcap_{j=0}^n \{\varepsilon_j w_{j,n} \leq (1-l)x\} \right\} \\ & =: k_1 + k_2 + k_3. \end{aligned} \quad (23)$$

令 $g(\cdot)$ 是引理 7 中定义的正函数. 根据 $H_n \in \mathcal{D}$ 和引理 6, 我们有

$$\begin{aligned} k_1 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \left\{ \varepsilon_i w_{i,n} > (1-l)x, \bigcap_{j=1}^n \{w_{j,n} \leq xg(x)\} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \left\{ \varepsilon_i w_{i,n} > (1-l)x, \bigcup_{j=1}^n \{w_{j,n} > xg(x)\} \right\} \\ &\leq \int_0^{xg(x)} \cdots \int_0^{xg(x)} \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \left(\frac{(1-l)x}{t_i} \right) \mathbb{P}(w_{1,n} \in dt_1, \dots, w_{n,n} \in dt_n) \\ &\quad + n \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \{ w_{i,n} > xg(x) \} \\ &= \int_0^{xg(x)} \cdots \int_0^{xg(x)} \frac{\bar{H}_n((1-l)x/t_i)}{\bar{H}_n(x/t_i)} \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \left(\frac{x}{t_i} \right) \mathbb{P}(w_{1,n} \in dt_1, \dots, w_{n,n} \in dt_n) \\ &\quad + o(\bar{H}_n(x)) \\ &\lesssim [\bar{H}_{n*}((1-l)^{-1})]^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \{ \varepsilon_i w_{i,n} > x \}. \end{aligned} \quad (24)$$

对于 k_2 , 利用(7)、命题 1(ii)和切比雪夫不等式, 有

$$k_2 \leq \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_0 w_{0,n})^{J_{H_n}^+ + \zeta}}{[(1-l)x]^{J_{H_n}^+ + \zeta}} = o(\bar{H}_n(x)). \quad (25)$$

对于 k_3 , 利用 (7)、命题 1(ii)、切比雪夫不等式、引理 6 和引理 7, 有

$$\begin{aligned}
k_3 &= \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i w_{i,n} > x, \bigcup_{k=0}^n \left\{ \varepsilon_k w_{k,n} > \frac{x}{n+1} \right\}, \bigcap_{i=0}^n \{\varepsilon_i w_{i,n} \leq (1-l)x\} \right\} \\
&\leq \sum_{k=0}^n \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i w_{i,n} > x, \varepsilon_k w_{k,n} > \frac{x}{n+1}, \bigcap_{i=0}^n \{\varepsilon_i w_{i,n} \leq (1-l)x\} \right\} \\
&\leq \sum_{k=0}^n \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=0, i \neq k}^n \varepsilon_i w_{i,n} > lx, \frac{x}{n+1} < \varepsilon_k w_{k,n} < (1-l)x \right\} \\
&\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=0, i \neq k}^n \varepsilon_i w_{i,n} > lx, \frac{x}{n+1} < \varepsilon_k w_{k,n} < (1-l)x \right\} + \mathbb{P} \left\{ \varepsilon_0 w_{0,n} > \frac{x}{n+1} \right\} \\
&\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P} \left\{ \bigcup_{i=0, i \neq k}^n \left\{ \varepsilon_i w_{i,n} > \frac{lx}{n} \right\}, \varepsilon_k w_{k,n} > \frac{x}{n+1} \right\} + \frac{(n+1)^{J_{H_n}^+ + \zeta} \varepsilon_0^{J_{H_n}^+ + \zeta} \mathbb{E} W_{0,n}^{J_{H_n}^+ + \zeta}}{x^{J_{H_n}^+ + \zeta}} \\
&\leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=0, i \neq k}^n \mathbb{P} \left\{ \varepsilon_i w_{i,n} > \frac{lx}{n}, \varepsilon_k w_{k,n} > \frac{x}{n+1} \right\} + o(\overline{H_n}(x)) \\
&\leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1, i \neq k}^n \mathbb{P} \left\{ \varepsilon_i w_{i,n} > \frac{lx}{n}, \varepsilon_k w_{k,n} > \frac{lx}{n+1} \right\} + \sum_{k=1}^n \mathbb{P} \left\{ \varepsilon_k w_{k,n} > \frac{lx}{n+1} \right\} + o(\overline{H_n}(x)) \\
&= o(1) \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \{ \varepsilon_i w_{i,n} > x \}. \tag{26}
\end{aligned}$$

因此, 根据 (24)–(26) 和 $H_n \in \mathcal{D}$ 可得

$$\limsup \left(\mathbb{P} \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i w_{i,n} > x \right\} / \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \{ \varepsilon_i w_{i,n} > x \} \right) \leq \lim_{l \rightarrow 0} [\overline{H_{n*}}((1-l)^{-1})]^{-1} = L_{H_n}^{-1},$$

则

$$\mathbb{P} \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i w_{i,n} > x \right\} \lesssim L_{H_n}^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \{ \varepsilon_i w_{i,n} > x \}. \tag{27}$$

现在我们继续证明下界, 对于任意的 $w > 0$ 和 $x > 0$, 利用 Bonferroni's 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i w_{i,n} - cv_{1,n} > x \right\} &\geq \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i w_{i,n} - cv_{1,n} > x \right\} \\
&\geq \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i w_{i,n} - cv_{1,n} > x, \bigcup_{k=1}^n \{\varepsilon_k w_{k,n} > (1+w)x\} \right\} \\
&\geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i w_{i,n} - cv_{1,n} > x, \varepsilon_k w_{k,n} > (1+w)x \right\} \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1, l \neq k}^n \mathbb{P} \{ \varepsilon_k w_{k,n} > (1+w)x, \varepsilon_l w_{l,n} > (1+w)x \} \\
&=: k_1 - k_2. \tag{28}
\end{aligned}$$

根据引理 6、7 和 $H_n \in \mathcal{D}$ 可得

$$k_2 = o(\overline{H_n}((1+w)x)) = o(1) \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \{ \varepsilon_i w_{i,n} > x \}. \tag{29}$$

接下来, 我们证明 k_{11} . 显然地,

$$\begin{aligned}
 k_{11} &\geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i w_{i,n} - \varepsilon_k w_{k,n} - cv_{1,n} > -wx, \varepsilon_k w_{k,n} > (1+w)x \right\} \\
 &\geq \sum_{k=1}^n \left[\mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i w_{i,n} - \varepsilon_k w_{k,n} - cv_{1,n} > -wx \right\} - 1 + \mathbb{P} \{ \varepsilon_k w_{k,n} > (1+w)x \} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P} \{ \varepsilon_k w_{k,n} > (1+w)x \} - \sum_{k=1}^n \mathbb{P} \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i w_{i,n} - \varepsilon_k w_{k,n} - cv_{1,n} \leq -wx \right\} \\
 &= k_{11} - k_{12}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

类似于(24), 通过引理6和 $H_n \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}
 k_{11} &\geq \int_0^{xg(x)} \cdots \int_0^{xg(x)} \sum_{k=1}^n \overline{F_k} \left(\frac{(1+w)x}{t_k} \right) \mathbb{P}(w_{1,n} \in dt_1, \dots, w_{n,n} \in dt_n) \\
 &= \int_0^{xg(x)} \cdots \int_0^{xg(x)} \frac{\overline{H_n}((1+w)x/t_k)}{\overline{H_n}(x/t_k)} \sum_{k=1}^n \overline{F_k} \left(\frac{x}{t_k} \right) \mathbb{P}(w_{1,n} \in dt_1, \dots, w_{n,n} \in dt_n) \\
 &\gtrsim \overline{H_{n_*}}(1+w) \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \left\{ \varepsilon_i w_{i,n} > x, \bigcap_{j=1}^n \{w_{j,n} < xg(x)\} \right\} \\
 &\gtrsim \overline{H_{n_*}}(1+w) \left[\sum_{i=1}^n \mathbb{P} \{ \varepsilon_i w_{i,n} > x \} - n \sum_{j=1}^n \mathbb{P} \{ w_{j,n} > xg(x) \} \right] \\
 &\sim \overline{H_{n_*}}(1+w) \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \{ \varepsilon_i w_{i,n} > x \}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

对于 k_{12} , 利用引理6、8和 $H_n \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}
 k_{12} &\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P} \left\{ \bigcup_{i=1, i \neq k}^n \left\{ \varepsilon_i w_{i,n} \leq \frac{-wx + cv_{1,n}}{n-1} \right\} \right\} \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1, i \neq k}^n \mathbb{P} \left\{ \varepsilon_i w_{i,n} \leq -\frac{wx - cv_{1,n}}{n-1} \right\} = o(1) \overline{H_n} \left(\frac{wx - cv_{1,n}}{n-1} \right) \\
 &= o(1) \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \{ \varepsilon_i w_{i,n} > x \}.
 \end{aligned} \tag{32}$$

根据(28)–(32)可得

$$\liminf \left(\mathbb{P} \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i w_{i,n} - cv_{1,n} > x \right\} / \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \{ \varepsilon_i w_{i,n} > x \} \right) \geq \lim_{w \rightarrow 0} \overline{H_{n_*}}(1+w) = L_{H_n},$$

则

$$\mathbb{P} \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon_i w_{i,n} - cv_{1,n} > x \right\} \geq L_{H_n} \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \{ \varepsilon_i w_{i,n} > x \}. \tag{33}$$

证毕. \square

推论5的证明: (i) $H_n \in \mathcal{C}$ 当且仅当 $L_{H_n} = 1$, 则(8)成立.

(ii) 显然地, 若 $F_i \in \mathcal{R}_{-\alpha_i}$, $1 \leq i \leq n$, 则 $H_n \in \mathcal{R}_{-(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n)}$. 根据 Breiman's 定理, 我们可以得到(9)的左式成立. 若 $\alpha_i < \alpha_j$, 由于 $\overline{F_i} \in \mathcal{R}_{-\alpha_i}$ 和 $\overline{F_j} \in \mathcal{R}_{-\alpha_j}$, 则 $\overline{F_j}(x) = o(\overline{F_i}(x))$, 进而(9)的右式成立. \square

§4. 数值模拟

在本节中, 我们利用 R 软件在以下情形中进行数值模拟以验证渐近式 (8) 的精确性: (i) 所有噪声项 ε_i 是同分布, 并且具有共同的重尾分布; (ii) ε_i 是两种不同类型的重尾分布. 进一步对其分为两种情形: (a) 所有噪声项 ε_i 都是重度重尾分布; (b) 一些噪声项 ε_i 是重度重尾分布, 另一些是轻度重尾分布.

针对 (8), 我们将 $\phi(x; n) = \sum_{i=1}^n P\{\varepsilon_i w_{i,n} > x\}$ 作为其渐近值, 目的是检验 $\phi(x; n)$ 和 (2) 之间的精确性, 其中 $\theta_i = \prod_{j=1}^i Y_j$, $i \geq 1$.

我们使用某个相依结构去刻画保险风险 $\{\varepsilon_i, i \geq 1\}$. 假设 $\{(\varepsilon_{2i-1}, \varepsilon_{2i}), i \geq 1\}$ 是 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 的独立副本, 具有联合分布

$$F_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(x, y) = \max \left\{ \{[F_1(x)]^{-\delta} + [F_2(y)]^{-\delta} - 1\}^{-1/\delta}, 0 \right\}, \quad (34)$$

其中参数 $\delta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$, 这是由 Clayton Copula^[28] 所构建. 显然地, 若 $\delta = 1$, 则 $\{X_i, i \geq 1\}$ 是 PAI. 首先我们考虑情形 (i), 其中随机变量序列 $\{\varepsilon_i, i \geq 1\}$ 服从一个具有参数 $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $\gamma > 0$ 和 $\alpha > 0$ 的帕累托分布

$$F(x) = 1 - \left[1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{1/\gamma} \right]^{-\alpha}, \quad (35)$$

其属于支撑集 $[\mu, \infty)$ 上的族 $\mathcal{R}_{-\alpha/\gamma} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{D}$; $\{Y_j, j \geq 1\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 其服从均匀分布 $(0, b)$. 正如注记 3 提到条件 $F_i = F \in \mathcal{C}$, $i \geq 1$, 可知 $H_n \in \mathcal{C}$, 进而推论 5(i) 的所有条件均满足.

令 $\{\varphi_n\}_{n \geq 0} \in (4, 5)$. 实际上, $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ 没有此限制. 在此情形下, 参数设置为 $\delta = 1$, $n = 10$, $\mu = -1.5$, $\alpha = 1.5$, $\gamma = 0.8$, $\sigma = 3$ 和 $b = 2$.

为了得到破产概率的估计, 我们进行 $N = 1000$ 模拟. 关于第 k 模拟和随机对 n 的数量, 我们给出如下算法:

1. 产生服从均匀分布 $(0, 1)$ 的随机对 $\{(u, v)_i\}_{i=1}^n$;
2. 令 $\varepsilon_1 = \sigma[(1 - u)^{-1/\alpha} - 1]^{\gamma} + \mu$;
3. 令 $w = [1 + (v^{-1/2} - 1)u^{-1}]^{-1}$ 和 $\varepsilon_2 = \sigma[(1 - w)^{-1/\alpha} - 1]^{\gamma} + \mu$;
4. 将 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 返回到 (34) 和 (35).
5. 产生相依随机变量序列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 和独立且服从均匀分布 $(0, 2)$ 的随机变量序列 Y_1, Y_2, \dots, Y_n ;
6. 根据 (1) 计算 $\{X_i\}_{i=1}^n$;
7. 计算 $\max_{0 < m \leq n} \sum_{i=1}^m \left[(X_i - c) \prod_{j=1}^i \theta_j \right]$ 和 $\varepsilon_i w_{i,n}$, $i = 1, 2, \dots, n$;

8. 如果 $\max_{0 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m [(X_j - c) \prod_{j=1}^i \theta_j] > x$, 则 $\pi^{(k)} = 1$. 否则, $\pi^{(k)} = 0$.
9. 如果 $\varepsilon_i w_{i,n} > x$, 则 $\pi^{(k)} = 1$. 否则, $\pi^{(k)} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

接下来, 我们分别得到 (2) 和 $\phi(x; n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{\varepsilon_i w_{i,n} > x\}$ 的估计值,

$$\psi_1(x; n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \pi^{(k)}, \quad \psi_2(x; n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N \pi_i^{(k)}.$$

基于上述算法, 在仿真过程中, 我们将初始资本 x 从 200 到 1200 之间进行变化以及在第一步中设置 $n = 10$, 分别观察破产概率 $\psi_1(x; n)$ 和 $\psi_2(x; n)$ 的变化, 其中 $\psi_1(x; n)$ 是 (2) 的估计值, $\psi_2(x; n)$ 是 $\phi(x; n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{\varepsilon_i w_{i,n} > x\}$ 的估计值. $\psi_1(x; n)$ 和 $\psi_2(x; n)$ 的比值变化如图 1 所示.

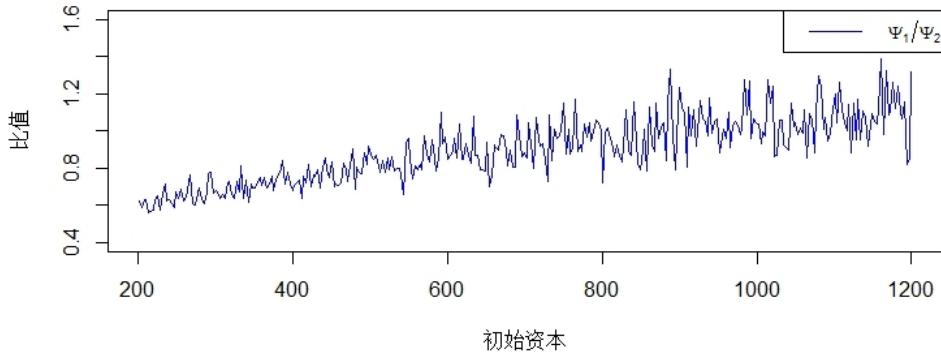


图 1 相同帕累托分布下渐近值的精确性

从图 1 可知, 比值波动上升然后收敛到 1. 显而易见, 初始资本越大, 破产概率 $\psi(x; n)$ 越小, 比值 ψ_1/ψ_2 表现出更大的波动.

接下来我们处理情形 (ii). 首先是情形 (a), 其中 ε_i 的分布服从两个不同参数的帕累托分布. 显然地, 它们是重度重尾分布. 假设 $\{(\varepsilon_{2i-1}, \varepsilon_{2i}), i \geq 1\}$ 是 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 的独立副本, 具有联合分布 (34); 分布 F_1 和 F_2 是类似于 (35) 的形式, 并且具有相同的参数 $\mu = -1.5$, $\gamma = 0.8$, $\sigma = 3$, 但是对于 F_1 , $\alpha_1 = 1.5$ 以及对于 F_2 , $\alpha_2 = 1.6$. 根据注记 3, 由于 $F_{2i-1} = F_1 \in \mathcal{C}$ 和 $F_{2i} = F_2 \in \mathcal{C}$, $i \geq 1$, 可知 $H_n \in \mathcal{C}$. 上述假设 Y_i , $i \geq 1$ 是独立同分布随机变量序列, 其服从均匀分布 $(0, b)$, 进而推论 5 (i) 的所有条件均满足. 令 $\delta = 1$, $n = 10$ 和 $b = 2$. $\psi_1(x; n)$ 和 $\psi_2(x; n)$ 的比值变化由图 2 所示.

正如图 2 所示, 在初始资本为 600 之前, 比值逐渐上升, 在初始资本为 600 以后, 比值逐渐收敛到 1. 这与情形 (i) 有类似的结论.

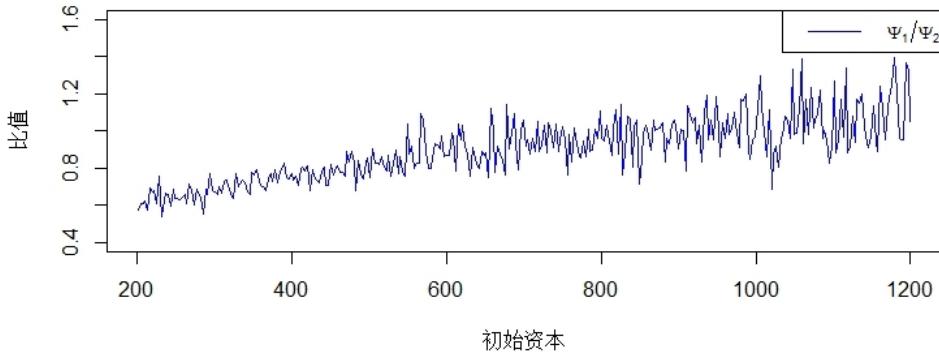


图 2 两种类型帕累托分布下渐近值的精确性

最后, 我们处理情形 (b), 其中 $\{(\varepsilon_{2i-1}, \varepsilon_{2i}), i \geq 1\}$ 是 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 的独立副本, 具有联合分布 (34). ε_1 的分布是类似于形式 (35) 的帕累托分布 F_1 , ε_2 的分布是韦伯分布 F_2 , 其形式为

$$F_2(x) = 1 - e^{-c_1(x-\lambda)^\tau}, \quad (36)$$

其中参数 $c_1 > 0, \tau > 0, \lambda \in \mathbb{R}$. 如果 $0 < \tau < 1$, 则 F_2 是轻度重尾分布, 参见文献 [29]; 如果 $\tau \geq 1$, 则 F_2 是轻尾分布. 显然的, 对于任意的 $\tau > 0$, ε_2 的尾部由 ε_1 的尾部所控制, 即 $\overline{F}_2(x) = o(\overline{F}_1(x))$. 根据注记 3, 易知 $H_n \in \mathcal{C}$. 另外, $Y_i, i \geq 1$ 仍然是独立同分布随机变量序列, 其服从均匀分布 $(0, b)$, 进而推论 5 (i) 的所有条件均满足. 我们的目标是分别改变韦伯分布的参数 τ 以及帕累托分布的参数 α , 研究其对 $\psi_1(x; n)$ 和 $\psi_2(x; n)$ 关系的影响.

在图 3 中, 我们选择 $\delta = 1, n = 10, b = 2$ 以及帕累托分布 F_1 的参数 $\mu = -1.5, \alpha = 1.5, \gamma = 0.8, \sigma = 3$, 韦伯分布 F_2 的参数 $c_1 = 2, \lambda = -20, \tau = 0.8$. 我们可以看到, 伴随着初始资本的增大, ψ_1/ψ_2 收敛到 1.

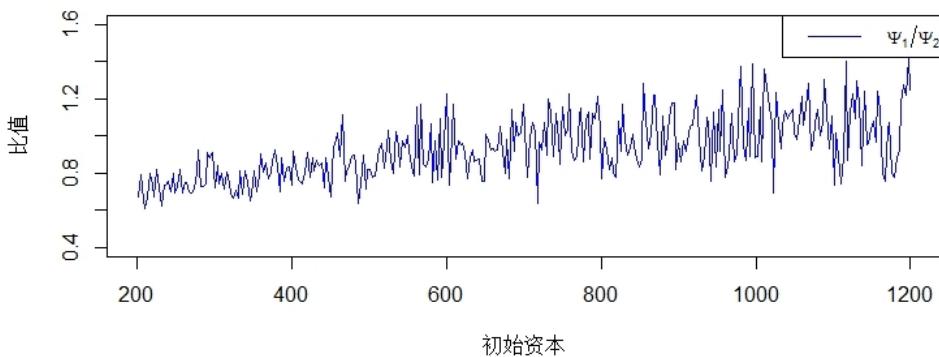


图 3 帕累托分布和韦伯分布下渐近值的精确性

通过上述所有情形可知, 我们得到的 $\psi_1(x; n)$ 和 $\psi_2(x; n)$ 之间的关系式是合理的.

参 考 文 献

- [1] GERBER H U. Ruin theory in the linear model [J]. *Insurance Math Econom*, 1982, **1**(3): 213–217.
- [2] YANG H L, ZHANG L H. Martingale method for ruin probability in an autoregressive model with constant interest rate [J]. *Probab Engng Inform Sci*, 2003, **17**(2): 183–198.
- [3] LIU R F, WANG D C, GUO F L. The ruin probabilities of a discrete time risk model with one-sided linear claim sizes and dependent risks [J]. *Comm Statist Theory Methods*, 2018, **47**(7): 1529–1550.
- [4] PENG J Y, WANG D C. Asymptotics for ruin probabilities of a non-standard renewal risk model with dependence structures and exponential Lévy process investment returns [J]. *J Ind Manag Optim*, 2017, **13**(1): 155–185.
- [5] PENG J Y, WANG D C. Uniform asymptotics for ruin probabilities in a dependent renewal risk model with stochastic return on investments [J]. *Stochastics*, 2018, **90**(3): 432–471.
- [6] NORBERG R. Ruin problems with assets and liabilities of diffusion type [J]. *Stochastic Process Appl*, 1999, **81**(2): 255–269.
- [7] TANG Q H, TSITSIASHVILI G. Precise estimates for the ruin probability in finite horizon in a discrete-time model with heavy-tailed insurance and financial risks [J]. *Stochastic Process Appl*, 2003, **108**(2): 299–325.
- [8] TANG Q H, TSITSIASHVILI G. Finite- and infinite-time ruin probabilities in the presence of stochastic returns on investments [J]. *Adv Appl Probab*, 2004, **36**(4): 1278–1299.
- [9] HASHORVA E, PAKES A G, TANG Q H. Asymptotics of random contractions [J]. *Insurance Math Econom*, 2010, **47**(3): 405–414.
- [10] TANG Q H, TSITSIASHVILI G. Randomly weighted sums of subexponential random variables with application to ruin theory [J]. *Extremes*, 2003, **6**(3): 171–188.
- [11] GOOVAERTS M J, KAAS R, LAEVEN R J A, et al. The tail probability of discounted sums of Pareto-like losses in insurance [J]. *Scand Actuar J*, 2005, **2005**(6): 446–461.
- [12] WANG D C, SU C, ZENG Y. Uniform estimate for maximum of randomly weighted sums with applications to insurance risk theory [J]. *Sci China Ser A*, 2005, **48**(10): 1379–1394.
- [13] WANG D C, TANG Q H. Tail probabilities of randomly weighted sums of random variables with dominated variation [J]. *Stoch Models*, 2006, **22**(2): 253–272.
- [14] ZHANG Y, SHEN X M, WENG C G. Approximation of the tail probability of randomly weighted sums and applications [J]. *Stochastic Process Appl*, 2009, **119**(2): 655–675.
- [15] SHEN X M, LIN Z Y, ZHANG Y. Uniform estimate for maximum of randomly weighted sums with applications to ruin theory [J]. *Methodol Comput Appl Probab*, 2009, **11**(4): 669–685.
- [16] YI L, CHEN Y, SU C. Approximation of the tail probability of randomly weighted sums of dependent random variables with dominated variation [J]. *J Math Anal Appl*, 2011, **376**(1): 365–372.
- [17] YANG Y, LEIPUS R, ŠIAULYS J. On the ruin probability in a dependent discrete time risk model with insurance and financial risks [J]. *J Comput Appl Math*, 2012, **236**(13): 3286–3295.
- [18] CHEN Y Q, YUEN K C. Sums of pairwise quasi-asymptotically independent random variables with consistent variation [J]. *Stoch Models*, 2009, **25**(1): 76–89.
- [19] CHENG D Y. Randomly weighted sums of dependent random variables with dominated variation [J]. *J Math Anal Appl*, 2014, **420**(2): 1617–1633.

- [20] DINDIENÉ L, LEIPUS R. Weak max-sum equivalence for dependent heavy-tailed random variables [J]. *Lith Math J*, 2016, **56**(1): 49–59.
- [21] RESNICK S I. *Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling* [M]. New York: Springer-Verlag, 2007.
- [22] EBRAHIMI N, GHOSH M. Multivariate negative dependence [J]. *Comm Statist Theory Methods*, 1981, **10**(4): 307–337.
- [23] BLOCK H M, SAVITS T H, SHAKED M. Some concepts of negative dependence [J]. *Ann Probab*, 1982, **10**(3): 765–772.
- [24] KHURSHEED A, LAI SAXENA K M. Positive dependence in multivariate distributions [J]. *Comm Statist Theory Methods*, 1981, **10**(12): 1183–1196.
- [25] JOAG-DEV K, PROSCHAN F. Negative association of random variables with applications [J]. *Ann Statist*, 1983, **11**(1): 286–295.
- [26] BINGHAM N H, GOLDIE C M, TEUGELS J L. *Regular Variation* [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1989.
- [27] ZHOU M, WANG K Y, WANG Y B. Estimates for the finite-time ruin probability with insurance and financial risks [J]. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 2012, **28**(4): 795–806.
- [28] NELSEN R B. *An Introduction to Copulas* [M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2006.
- [29] 苏淳, 胡治水, 唐启鹤. 关于非负分布重尾程度的刻画 [J]. 数学进展, 2003, **32**(5): 606–614.

Tail Asymptotic of Discrete-Time Risk Model with Compound Dependence and Numerical Simulation

JING Haojie PENG Jiangyan JIANG Zhiqian

(School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China,
Chengdu, 611731, China)

Abstract: This paper considers a discrete-time risk model with compound dependence. The risk-free and risky investments of an insurer lead to arbitrarily dependent stochastic discount factors. The claim-sizes are assumed to follow a one-sided linear process with pairwise asymptotically independent innovations. The innovations and the stochastic discount factors are mutually independent. We assume that innovations are not necessarily identically distributed nonnegative random variables with distributions F_1, F_2, \dots, F_n . When the average distribution $n^{-1} \sum_{i=1}^n F_i$ is heavy-tailed, we establish some asymptotic estimates for the finite-time ruin probabilities of this discrete time risk model. We demonstrate our obtained results through a crude Monte Carlo simulation.

Keywords: one-sided linear process; pairwise asymptotically independent; heavy tailed; numerical simulation

2020 Mathematics Subject Classification: 62P05; 62E20