低偏差OALHD的构造*

马长兴　　张润楚
(南开大学数学科学学院统计学系,天津,300071)

摘　　要

本文给出了利用均匀设计和正交表构造低偏差OALH设计的方法,该方法构造的设计既有优良的均匀性又具有正交设计的均衡性,一个更重要的优点是可以构造较大样本容量的设计点集.本文同时给出了某些参数的均匀设计表,这些设计优于现有的均匀设计,具有实用价值.

关键词: 布点偏差,均匀设计,OA-Based Latin Hypercube设计,正交表型均匀LH设计和抽样.

学科分类号: O212.6, O212.2.

§1. 引　　言

计算机试验(computer experiments)是近十几年来迅速发展起来的试验设计的一个新的研究方向,并且已得到了广泛的应用(见Sacks等(1989),张润楚、王兆军(1994)).其中设计与抽样是它的一个重要研究课题.所谓设计与抽样即是选取适当的试验点集作为输入的方法.设计和抽样的方法已有不少研究,如均匀设计(王元,方开泰(1981)),LHD, LHS (McKay等(1989)),RUD, UDS (张润楚,王兆军(1996)),OALHD, OALHS (Tang (1993)),ROAULHD, OAULHS (张润楚,马长兴(1997))等.

衡量一个点集散布均匀性的准则有几种,其中被人们公认的一个准则是布点偏差(discrepancy),较早的参考文献可见于华罗庚,王元(1981),后来王元,方开泰(1990a, 1990b)对此作了进一步的阐述,王元,方开泰(1981)开始将这一概念用于试验设计,提出一种均匀设计,即在一个单位立方体内布设一组点使之布点偏差达到最小.McKay, Beckman, and Conover (1979)提出的一种Latin Hypercube抽样,也是基于一种散布均匀性的要求,但尚未给出一种度量性概念.后来人们提出其它一些准则,如Minmax距离和Maxmin距离准则(Johnson & Moore, (1990)),最大对称差准则(方开泰,郑胡灵(1992))等,但用得最多的还是布点偏差.本文采用这一准则.我们首先来叙述这一概念,有以下定义.

定义1　设

$$P_n=\{\mathbf{x}_k=(x_{k1},\cdots,x_{kd}):k=1,\cdots,n\}$$

为单位立方体$C^d=[0,1]^d$上的一组点集,令

$$\begin{aligned}D(P_n)&=\sup_{\mathbf{t}\in C^d}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n I(\mathbf{x}_k\le\mathbf{t})-F(\mathbf{t})\right|\\&=\sup_{\mathbf{t}\in C^d}|F_n(\mathbf{t};P_n)-F(\mathbf{t})|,\end{aligned}$$

这里$F(\mathbf{t})=\prod_{i=1}^d t_i$表示$C^d$上的均匀分布函数,$I(\cdot)$为示性函数,$F_n(\mathbf{t};P_n)$表示$P_n$的经验分布函数,$\mathbf{x}_k\le\mathbf{t}$表示对所有的$i$有$x_{ki}\le t_i$.则称$D(P_n)$为点集$P_n$在$C^d$中的偏差.

然后给出Latin Hypercube设计和抽样的定义(Mckay, Beckman & Conover (1979)).

*受国家自然科学基金项目19771049和高等学校博士学科点专项科研基金1999005512的资助.
本文1999年1月18日收到,1999年8月10日收到修改稿.

定义2 设$\pi_j=(\pi_{1j},\cdots,\pi_{nj})$, $j=1,\cdots,d$为$1,\cdots,n$的随机排列, 且这d个排列相互独立, 令

$$c_{kj}=\frac{\pi_{kj}-1/2}{n},\qquad k=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,d,$$

则称$C^d=[0,1]^d$中的点集$P_n=\{\mathbf{c}_k=(c_{k1},\cdots,c_{kd}):k=1,\dots,n\}$为Latin Hypercube设计, 简记LHD. 又若选取nd个与π_j独立的$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上均匀分布的i.i.d.样本$\{u_{kj}\}_{1\le k\le n,1\le j\le d}$, 并令

$$x_{kj}=c_{kj}+\frac{u_{kj}}{n},\qquad k=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,d,$$

则称点集$Q_n=\{\mathbf{x}_k=(x_{k1},\cdots,x_{kd}):k=1,\cdots,n\}$为Latin Hypercube抽样, 简记LHS.

显然, LHD和LHS均匀性优于i.i.d.抽样, 但是它仍然含有不好的设计和样本(张润楚, 王兆军(1994)). Tang (1993) 将正交表的均衡可比性引入Latin Hypercube抽样, 提出OA-Based Latin Hypercube抽样, 对于参数$n=s^2$的情况有明显的改进. 下面引入它的定义.

定义3 设有$n\times d$正交表$OA(n,d,s,t)$, 其中s为符号个数, $n=s^2$为行数, d为列数, t为正交表的强度. 表中的元素记为$0,1,\cdots,s-1$, 将d个列的元素$0,1,\cdots,s-1$替换为$0,1,\cdots,s-1$的随机排列, 再将d个列的每个列中的s个0替换为$0,1,\cdots,s-1$的一个随机排列, s个1替换为$0+s,1+s,\cdots,s-1+s$的一个随机排列, s个2替换为$0+2s,1+2s,\cdots,s-1+2s$的一个随机排列, ……, s个$s-1$替换为$0+(s-1)s,1+(s-1)s,\cdots,s-1+(s-1)s$的一个随机排列, 所得矩阵记为$A=(a_{kj})_{n\times d}$, 又令

$$b_{kj}=\frac{a_{kj}+0.5}{n},\qquad k=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,d,\tag{1}$$

则称每一个这样的点集$P_n=\{\mathbf{b}_k=(b_{k1},\cdots,b_{kd}):k=1,\cdots,n\}$为OA-Based Latin Hypercube设计, 简记OALHD. 又若选取nd个与上述随机排列独立的$[-1/2,1/2]$上均匀分布的i.i.d.样本$\{u_{kj}\}_{1\le k\le n,1\le j\le d}$, 并令

$$x_{kj}=b_{kj}+\frac{u_{kj}}{n},\qquad k=1,\dots,n,\ j=1,\dots,d,\tag{2}$$

则称点集$Q_n=\{\mathbf{x}_k=(x_{k1},\cdots,x_{kd}):k=1,\cdots,n\}$为OA-Based Latin Hypercube抽样, 简记OALHS.

图1是一个OALHD. 虽然OALHD克服了LHD的一些缺点, 略去了偏差大的设计, 但是这类设计中仍有许多均匀性较差的样本(其阶为$O(n^{-1/2})$)(见马长兴(1997)), 因此如何构造偏差低的OALHD就是一个很重要的问题, 特别有意义的是由此作为初始设计而得到的正交表型均匀LH设计和抽样的全部样本都具有相同阶的低偏差(张润楚, 马长兴(1996)). §2给出了低偏差OALHD的具体构造方法. §3构造了一些设计点集.

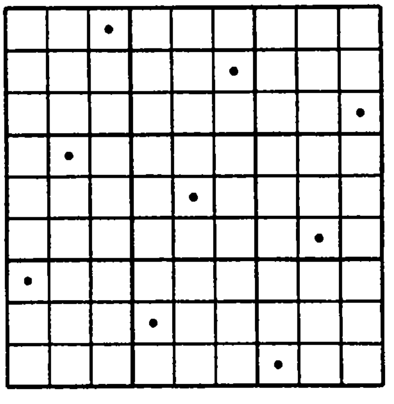

图1 $d=2$, $n=9$时的一个OALHD样本

§2. 低偏差OALHD的存在性及其构造

OAULHS方法(张润楚, 马长兴(1997))的关键之一是选取偏差阶较低的OALHD作为初始设计. 本节来

研究这种低偏差阶OALHD的存在性和构造方法，并给出$d=2$时偏差阶为$O(n^{-1}\log^{d-1}n)$的OALHD的一种构造方法.

Hua and Wang(1981)证明了可以找到一列点集$P_n=\{\mathbf{a}_k=(a_{k1},\cdots,a_{kd}):k=1,\cdots,n\}$使得

$$D(P_n)=O(n^{-1}\log^d n).$$

Niederreiter(1988)进一步指出偏差阶可以达到$O(n^{-1}\log^{d-1}n)$.

设s为正整数，格子点集$P_s=\{\mathbf{a}_k=(a_{k1},a_{k2}):k=1,\cdots,s\}$使得$D(P_s)=O(s^{-1}\log s)$，不妨设

$$a_{k1}=\frac{k-0.5}{s},\qquad a_{k2}=\frac{\pi_{k-1}+0.5}{s},\qquad k=1,\cdots,s,$$

其中$\pi_0,\cdots,\pi_{s-1}$为$0,1,\cdots,s-1$的一个排列，我们如下利用P_s构造OALHD.

定理1 设$n=s^2$，令

$$\begin{aligned}c_{k1}=&k-1,\\ c_{k2}=&s\pi_{(k-1)\ (\mathrm{mod}\ s)}+\pi_{[\frac{k-1}{s}]},\\ &k=1,\cdots,s^2,\\ x_{kj}=&\frac{c_{kj}+0.5}{n},\qquad k=1,\cdots,n,\ j=1,2.\end{aligned}$$

则点集$Q_n=\{\mathbf{x}_k=(x_{k1},x_{k2}):k=1,\cdots,n\}$为OALHD且其偏差

$$D(Q_n)=O(n^{-1}\log n).$$

证明: Q_n为OALHD是显然的，下面求其偏差阶. 对于任何$\mathbf{t}=(t_1,t_2)\in C^2$，记

$$f_1=\left[\frac{nt_1-0.5}{s}\right],\qquad f_2=\left\{\frac{nt_1-0.5}{s}\right\},$$

$$g_1=\left[\frac{nt_2-0.5}{s}\right],\qquad g_2=\left\{\frac{nt_2-0.5}{s}\right\},$$

有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(x_{k1}\le t_1,x_{k2}\le t_2)\\ =&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I\Big(\frac{c_{k1}+0.5}{n}\le t_1,\frac{c_{k2}+0.5}{n}\le t_2\Big)\\ =&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I\Big(\frac{k-0.5}{n}\le t_1,\frac{s\pi_{(k-1)\ (\mathrm{mod}\ s)}+\pi_{[\frac{k-1}{s}]}+0.5}{n}\le t_2\Big)\\ =&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I\Big(k-1\le\left[\frac{nt_1-0.5}{s}\right]s+\left\{\frac{nt_1-0.5}{s}\right\}s,s\pi_{(k-1)\ (\mathrm{mod}\ s)}+\pi_{[\frac{k-1}{s}]}\le nt_2-0.5\Big)\\ =&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(k-1\le sf_1,s\pi_{(k-1)\ (\mathrm{mod}\ s)}+\pi_{[\frac{k-1}{s}]}\le nt_2-0.5)\\ &+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(sf_1<k-1\le sf_1+sf_2,s\pi_{(k-1)\ (\mathrm{mod}\ s)}+\pi_{[\frac{k-1}{s}]}\le nt_2-0.5)\\ \overset{\mathrm{def}}{=}&(\mathrm{I})+(\mathrm{II}),\end{aligned}$$

而

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} =&\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{f_1-1}\sum_{k=is+1}^{(i+1)s} I(s\pi_{(k-1)\ (\bmod s)}+\pi_i\le nt_2-0.5)+\frac{1}{n}I(s\pi_0+\pi_{f_1}\le nt_2-0.5)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{f_1-1}\sum_{j=0}^{s-1} I\Big(s\pi_j+\pi_i\le\Big[\frac{nt_2-0.5}{s}\Big]s+\Big\{\frac{nt_2-0.5}{s}\Big\}s\Big)+\frac{\delta_1}{n}\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{f_1-1}\sum_{j=0}^{s-1} I(\pi_j\le g_1-1)+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{f_1-1}\sum_{j=0}^{s-1} I(\pi_j=g_1-1,\pi_i\le sg_2)+\frac{\delta_1}{n}\\
=&\frac{1}{n}f_1g_1+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{s-1}I(i\le f_1-1,\pi_i\le sg_2)+\frac{\delta_1}{n}\\
=&\frac{1}{n}f_1g_1+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{s-1}I\Big(\frac{i+0.5}{s}\le\frac{f_1-0.5}{s},\frac{\pi_i+0.5}{s}\le g_2+\frac{0.5}{s}\Big)+\frac{\delta_1}{n}\\
=&\frac{1}{n}f_1g_1+\frac{1}{s}F_s\Big(\Big(\frac{f_1-0.5}{s},g_2+\frac{0.5}{s}\Big);P_s\Big)+\frac{\delta_1}{n},\\
\text{(II)} =&\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{s-1}I(0\le i\le sf_2,\pi_is+\pi_{f_1}\le sg_1+sg_2)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{s-1}I(i\le sf_2,\pi_i\le g_1-1)+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{s-1}I(i\le sf_2,\pi_i=g_1,\pi_{f_1}\le sg_2)\\
=&\frac{1}{s}F_s\Big(\Big(f_2+\frac{0.5}{s},\frac{g_1-0.5}{s}\Big);P_s\Big)+\frac{\delta_2}{n},
\end{aligned}
$$

其中 $\delta_1=I(s\pi_0+\pi_{f_1}\le nt_2-0.5)$, $\delta_2=\sum_{i=0}^{s-1}I(i\le sf_2,\pi_i=g_1,\pi_{f_1}\le sg_2)$ 为 0 或 1, 因此, 由

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}(f_1g_1+f_2g_1+f_1g_2+f_2g_2)=\frac{1}{n}(f_1+f_2)(g_1+g_2)\\
=&\frac{1}{n}\cdot\frac{nt_1-0.5}{s}\cdot\frac{nt_2-0.5}{s}=\Big(t_1-\frac{0.5}{n}\Big)\Big(t_2-\frac{0.5}{n}\Big),
\end{aligned}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&|F_n(\mathbf{t};Q_n)-F(\mathbf{t})|\\
=&\Big|\frac{1}{n}f_1g_1+\frac{1}{s}F_s\Big(\Big(\frac{f_1-0.5}{s},g_2+\frac{0.5}{s}\Big);P_s\Big)\\
&+\frac{1}{s}F_s\Big(\Big(f_2+\frac{0.5}{s},\frac{g_1-0.5}{s}\Big);P_s\Big)+\frac{\delta}{n}-t_1t_2\Big|\\
=&\Big|\frac{1}{s}\Big(F_s\Big(\Big(\frac{f_1-0.5}{s},g_2+\frac{0.5}{s}\Big);P_s\Big)-\Big(\frac{f_1-0.5}{s}\Big)\Big(g_2+\frac{0.5}{s}\Big)\Big)\\
&+\frac{1}{s}\Big(F_s\Big(\Big(f_2+\frac{0.5}{s},\frac{g_1-0.5}{s}\Big);P_s\Big)-\Big(f_2+\frac{0.5}{s}\Big)\Big(\frac{g_1-0.5}{s}\Big)\Big)\\
&+\frac{\delta}{n}+\frac{1}{n}f_1g_1+\frac{1}{s}\Big(\frac{f_1-0.5}{s}\Big)\Big(g_2+\frac{0.5}{s}\Big)+\frac{1}{s}\Big(f_2+\frac{0.5}{s}\Big)\Big(\frac{g_1-0.5}{s}\Big)-t_1t_2\Big|\\
=&\frac{1}{s}O(s^{-1}\log s)+\frac{1}{s}O(s^{-1}\log s)+O(n^{-1})+O(n^{-1})\\
=&O(n^{-1}\log n).
\end{aligned}
$$

上面的相等是指无穷小阶相同, $\delta=\delta_1+\delta_2$ 为 0, 1 或 2. 定理得证. □

下面给出一个更一般性的构造定理.

定理 2 设 $n=s^2$, 格子点集 $P_s=\{\mathbf{a}_k=(a_{k1},a_{k2}):k=1,\cdots,n\}$ 使得

$$D(P_s)=f(s),$$

其中 $\lim_{s\to\infty} f(s)=0$, 并设

$$a_{k1}=\frac{k-0.5}{s}, \qquad a_{k2}=\frac{\pi_{k-1}+0.5}{s}, \qquad k=1,\cdots,s,$$

其中 $\pi_0,\cdots,\pi_{s-1}$ 为 $0,1,\cdots,s-1$ 的一个排列, 若令

$$\begin{aligned} c_{k1} &= k-1, \\ c_{k2} &= s\pi_{(k-1)\ (\mathrm{mod}\ s)}+\pi_{[\frac{k-1}{s}]}, \\ &\qquad k=1,\cdots,s^2, \\ x_{kj} &= \frac{c_{kj}+0.5}{n}, \qquad k=1,\cdots,n,\ j=1,2. \end{aligned}$$

则点集 $Q_n=\{\mathbf{x}_k=(x_{k1},x_{k2}):k=1,\cdots,n\}$ 为 OALHD 且其偏差无穷小的阶为 $n^{-\frac{1}{2}}f(s)$.

前面定理 1 是本定理的特例, 证明可以仿照定理 1 的证明和下面的引理 1 得到.

引理 1 设 $d\geq 2$, 则对任何点集 $P_n=\{\mathbf{x}_k=(x_{k1},\cdots,x_{kd}):k=1,\cdots,n\}$ 有

$$D(P_n)>2^{-2d-4}(d-1)^{-\frac{d-1}{2}}n^{-1}(\log_2 n)^{\frac{d-1}{2}}.$$

引理的证明见 Hua & Wang (1981) P_{64}.

这种构造方法的思想是将均匀设计和正交表结合起来, 所得到的设计既有好的均匀性, 又在作变换 $[x_{kj}s]$ 后是一个正交表. 下面我们给出一个例子.

例 1 由 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 构造 $n=25,\ d=2$ 的 OALHD.

我们取 $s=5,\ (\pi_0,\cdots,\pi_{s-1})=(1,4,2,0,3)$, 由定理 4 有

$$c_{21}=s\pi_0+\pi_0=6, \qquad c_{22}=s\pi_1+\pi_0=21, \qquad \cdots,$$

从而得到一个好的 OALHD

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 21 & 11 & 1 & 16 & 9 & 24 & 14 & 4 & 19 \end{pmatrix.$$

$$\begin{matrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 7 & 22 & 12 & 2 & 17 & 5 & 20 & 10 & 0 & 15 & 8 & 23 & 13 & 3 & 18 \end{matrix}\Bigg).$$

该设计的偏差是 0.0700, 比生成向量构造的均匀设计偏差 0.0764 要小. 从它的点图 (图 2), 我们可以看出该点集在每个大格子有且只有一个点, 每行和每列的小格子中有且只有一个点, 这两种均衡性加上均匀性是该方法的优点.

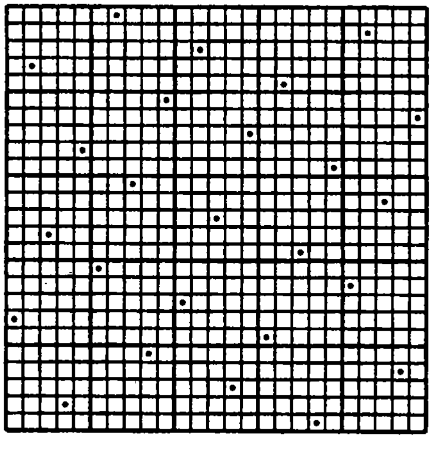

图 2　$n=5^2,\ D=0.0700$

从定理2我们可以看出当初始设计越均匀，该方法得到的设计越好．根据定理4，若P_s的偏差为$O(s^{-1+\epsilon})$，其中$0<\epsilon<1/2$，则由P_s构造的P_n的偏差为$O(n^{-\frac{1}{2}}s^{-1+\epsilon})=O(n^{-1+\frac{\epsilon}{2}})$，由$P_n$构造$P_{n^2}$的偏差为$O((n^2)^{-1+\frac{\epsilon}{4}})$，等等．当$n$比较小时，$O(n^{-1}\log n)$可能比点集$O(n^{-1+\epsilon})$差，因此，偏差阶$O(n^{-1+\epsilon})$且$\epsilon$很小的设计也很重要，下节构造的一些例子说明该方法得到的设计的ϵ也较小．

§3.　一些低偏差的OALHD

一般均匀设计的构造方法是利用生成元或生成向量构成(方开泰(1994)，马长兴(1997a,b))，由于偏差计算的复杂性，对大的n或d，很难得到相应的均匀设计．本节我们构造了一些OALHD，为了比较，我们也计算了部分生成向量构造的均匀设计．

表2中构造的OALHD的初始格子点集$5^2,6^2,7^2,8^2,9^2,10^2$见表1(马长兴(1997a))，$11^2,12^2$是用生成元构成的均匀设计点集，$25^2,36^2,49^2$是使用表中前面构造的相应的OALHD点集．

表1　用于构造OALHD的初始格子点集

	设计点集	偏差
4^2	2 0 3 1	0.2969
5^2	1 4 2 0 3	0.2500
6^2	3 1 5 0 4 2	0.2014
7^2	2 5 0 3 6 1 4	0.1786
8^2	5 1 3 7 0 4 6 2	0.1602
9^2	2 7 5 0 4 8 3 1	0.1451
10^2	7 5 3 1 9 0 6 4 8 2	0.1375

注：设计点集第一列为$0,\cdots,s-1$.

表2　定理1构造的OALHD与由生成向量构造的均匀设计的对比

n	n^{-1}	$n^{-1}\log n$	OALHD D	均匀设计 生成向量	均匀设计 偏差
4^2	0.0625	0.1733	$0.0986=16^{-1+0.1646}$	1 7	0.1162
5^2	0.0400	0.1288	$0.0700=25^{-1+0.1739}$	1 11	0.0764
6^2	0.0278	0.0995	$0.0538=36^{-1+0.1846}$	5 7	0.0592
7^2	0.0204	0.0794	$0.0357=49^{-1+0.1438}$	4 46	0.0440
8^2	0.0156	0.0650	$0.0333=64^{-1+0.1817}$	1 25	0.0342
9^2	0.0123	0.0543	$0.0253=81^{-1+0.1629}$	13 37	0.0298
10^2	0.0100	0.0461	$0.0225=100^{-1+0.1759}$	1 39	0.0244
11^2	0.0083	0.0396	$0.0174=121^{-1+0.1556}$	3 14	0.0200
12^2	0.0069	0.0345	$0.0144=144^{-1+0.1468}$	5 137	0.0171
25^2	0.0016	0.0103	$0.0044=625^{-1+0.1571}$	2 259	0.0046
36^2	0.0008	0.0055	$0.0024=1296^{-1+0.1570}$	5 263	0.0024
49^2	0.0004	0.0032	$0.0011=2401^{-1+0.1300}$		

从表2可以看出，本文构造的OALHD设计点集的偏差比用生成向量构成的均匀设计要好，而且比$n^{-1}\log n$要小，如果将偏差表为$n^{-1+\epsilon}$，那么$\epsilon<0.185$是很小的，有些传统的数论布点只能$\epsilon=0.25$．另外，本方法的设计点集的两种平移性质也非常好(张润楚，马长兴(1997))．本方法另一个更重要的优点是可以很容易对很大的n进行构造，构造表2中每个设计在奔腾(主频266M)微机上都不超过1秒CPU时间，而仅对于$n=121$，$d=2$，生成向量方法在奔腾(主频266M)微机上需要48秒，在MIPS R10000上需要18秒，对于

$n = 49^2$, $d = 2$, 在 MIPS R10000 上计算了 36 个小时还没有得到结果, 因此这里没有列出. 值得指出的是 $n \geq 6^2$ 的生成向量也是以往文献中没有给出, 这些设计也是有价值的.

参 考 文 献

[1] Bundschuh, P., 朱尧辰, 低维有限点集偏差的精确计算公式 (III), 科学通报, **39**(1994), 1724–1725.

[2] 方开泰, 均匀设计与均匀设计表, 科学出版社, 1994.

[3] 方开泰, 李久坤, 均匀设计的一些新结果, 科学通报, **39**(1994), 1921–1924.

[4] Hua, L.K.(华罗庚) & Wang, Y.(王元), *Application of Number Theory to Numerical Analysis*, Springer–Verlag and Science press, Berlin and Bejin, 1981.

[5] Johnson, M.E., Moore, L.M. & Ylvisaker, D., Minimax and maxmin distance designs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **26**(1990), 131–148.

[6] McKay, M.D., Beckman, R.J. & Conover, W.J., A comparison of three methods for selecting values of input variables in analysis of output from a computer codes, *Technometrics*, **21**(1979), 239–245.

[7] 马长兴, 均匀性的一个新的度量准则——对称偏差, 南开大学学报, **30**(1997a), 31–37.

[8] 马长兴, 利用对称偏差构造均匀设计, 数理统计与管理, 增刊(1997b), 166–169.

[9] 马长兴, 基于正交表的均匀 LH 设计和抽样, 南开大学博士论文, 1997c.

[10] Niederreiter, H., Quasi-Monte Carlo methods for multidimensional numerical integration, in *Numerical Integration III*(H. Braß and Hämmerlin, ed.), Birkhäauser Verlag Basel, Birlin, 1988, 157–171.

[11] Sacks, J., Welch, W.J., Mitchell, T.J. & Wynn, H.P., Designs and analysis of computer experiments (with discussion), *Statistical Science*, **4**(1989), 409–435.

[12] Tang, B., OA-Based Latin Hypercubes, *JASA*, **88**(1993), 1392-1397.

[13] 王元, 方开泰, 关于均匀分布与试验设计 (数论方法), 科学通报, **26(2)**(1981), 65–70.

[14] Wang, Y.(王元), Fang, K.T.(方开泰), Number theoretic method in applied statistics, *Chin. Ann. of Math. Ser. B*, **11**(1990a), 51–65.

[15] Wang, Y.(王元), Fang, K.T.(方开泰), Number theoretic method in applied statistics (II), *Chin. Ann. of Math. Ser. B*, **11**(1990b), 384–394.

[16] 张润楚, 马长兴, 正交表型均匀 LH 设计和抽样, 已投应用概率统计, 1997.

[17] 张润楚, 王兆军, 关于计算机试验的设计理论和数据分析, 应用概率统计, **10**(1994), 420–436.

[18] 张润楚, 王兆军, 均匀设计抽样及其优良性质, 应用概率统计, **10**(1996), 337–347.

Construction of Lower Discrepancy OA-Based Latin Hypercube Designs

MA CHANGXING　　ZHANG RUNCHU

(*School of Mathematical Sciences, Nankai University, Tianjin, 300071*)

In this paper, using uniform design and orthogonal array we give a method of constructing lower discrepancy OA-based Latin hypercube designs. The designs constructed by this method have not only good uniformity and also orthogonality. Another advantage is that design point sets of large size can constructed. Also, this paper give some uniform design tables and these designs are better than existing uniform designs.