应用概率统计　第十八卷
第三期　2002 年 8 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 18 No. 3 Aug. 2002

满意正交表及其判别方法 *

庞善起 [1,2]　　张应山 [2]
([1] 西安电子科技大学, 西安, 710071; [2] 河南师范大学数学系, 新乡, 453002)

摘　要

本文提出了满意正交表的概念, 并且利用正交表和投影矩阵的正交分解之间的关系给出了满意正交表的一种判别方法.

关 键 词: 满意正交表, 投影矩阵.
学 科 分 类 号: O212.6.

§1. 引　　言

在正交表的构造过程中, 人们关心的是如何构造出列数最多的正交表. 也就是说, 对于一个给定的试验次数 n, 如果定义最满意正交表如下:

定义 1　一个正交表 $L_n(p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r})$, 如果对于某一 i $(1\le i\le r)$, 不存在正交表 $L_n(p_1^{k_1}\cdots p_i^{x}\cdots p_r^{k_r})$ 使得 $x>k_i$, 则称正交表 $L_n(p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r})$ 关于水平 p_i 是满意的. 如果正交表 $L_n(p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r})$ 关于水平 $p_1,\cdots,p_r$ 都是满意的, 并且不存在正交表 $L_n(pp_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r})$ $(p\ne p_1,\cdots,p_r)$, 则称正交表 $L_n(p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r})$ 为最满意的正交表.

那么人们最关心的是如何构造出最满意的正交表. 但是直接构造最满意正交表是一个非常困难的问题. 即使判别一个正交表是不是最满意的正交表也是不容易的, 甚至有些类型正交表的存在性到目前为止还是一个未解决的数学问题.

本文提出了满意正交表的概念, 并且利用正交表和投影矩阵的正交分解之间的关系给出了满意正交表的一种判别方法. 作为这种方法的应用, 我们证明了文 [1] 的正交表均为满意正交表. 如果没有特别指出, 本文正交表均指强度为 2 的正交表, 符号请参考文 [1, 2].

§2.　基本概念和主要结果

我们首先给出有关的概念:

定义 2　正交表 $L_n(p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r})$ 称为满意的正交表, 如果不存在正交表 H(包括单列正交表) 使得 $(L_n(p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}),H)$ 构成正交表.

定义 3　令 A 是一个强度为 1 的正交表, 即

$$A=(a_1,\cdots,a_m)=(S_1(1_{r_1}\otimes(p_1)),\cdots,S_m(1_{r_m}\otimes(p_m))),$$

其中 $r_jp_j=n$, $S_i\,(i=1,\cdots,m)$ 是置换阵, 则称投影矩阵 $S_j(P_{r_j}\otimes\tau_{p_j})S_j^T$ 为 A 的第 j 列 a_j 的矩阵象, 记为 $m(a_j)$. 并且定义 A 的矩阵象为 A 的各列的矩阵象之和.

让 $(r)=(0,\cdots,r-1)^T$, 1_r 是 1 的 $r\times 1$ 维列向量, I_r 是 r 阶单位阵, 则

$$m(1_r)=P_r,\qquad m((r))=\tau_r,$$

---

* 本文由国家社科基金 97BTJ002 和河南省教育厅自然科学基金资助.
本文 2000 年 2 月 25 日收到, 2001 年 4 月 28 日收到修改稿.

这里 $P_r=(1/r)1_r1_r^T$, 并且 $\tau_r=I_r-P_r$.

下面我们给出判定满意正交表的充分必要条件:

定理 1 正交表 $L_n(p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r})$ 为满意的正交表的充分必要条件是矩阵 $\tau_n-m(L_n(p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}))$ 不含任何正交表.

定理的证明不难从下面引理得出.

引理 1 对任何置换阵 S 以及正交表 L

$$m(S(L\otimes 1_r))=S(m(L)\otimes P_r)S^T,\qquad \text{并且 } m(S(1_r\otimes L))=S(P_r\otimes m(L))S^T.$$

引理 2 令 A 是一个强度为 1 的正交表, 即

$$A=(a_1,\cdots,a_m)=(S_1(1_{r_1}\otimes(p_1)),\cdots,S_m(1_{r_m}\otimes(p_m))),$$

其中 $r_jp_j=n$, $S_i\,(i=1,\cdots,m)$ 是置换阵. 下列条件是等价的:

(1) A 是一个强度为 2 的正交表.

(2) $m(A)$ 是一个投影阵.

(3) $m(a_i)m(a_j)=0(i\neq j)$.

(4) 投影阵 τ_n 能被正交地分解为:

$$\tau_n=m(a_1)+\cdots+m(a_m)+\Delta,$$

其中矩阵 Δ 的秩 $\mathrm{rk}(\Delta)=n-1-\sum\limits_{j=1}^{m}(p_j-1)$.

引理 3 假定 L 和 H 是正交表, 且 $m(L)m(H)=0$. 则 $K=(L,H)$ 也是正交表.

引理 4 假定 (L,H) 和 K 都是 n 正交表, 且 $m(K)\le m(L)$, 则 (K,H) 也是正交表. 其中 $m(K)\le m(L)$ 指的是差矩阵 $m(L)-m(K)$ 是非负定的.

定理 2 设 p,q 为互素的自然数, $p,q\ge 2$, r 为另一自然数, $n=pqr$. 那么投影矩阵 $\tau_p\otimes I_r\otimes\tau_q$ 不含任何 n 次试验的正交表.

证明: 假设 $\tau_p\otimes I_r\otimes\tau_q$ 含有正交表 $L_n(d)$ $(d\ge 2)$, 则 $m(L_n(d))\le\tau_p\otimes I_r\otimes\tau_q$. 根据投影矩阵 τ_n 的如下正交分解式:

$$\begin{aligned}\tau_n &= \tau_p\otimes I_r\otimes\tau_q+\tau_{pr}\otimes P_q+P_p\otimes I_r\otimes\tau_q,\\ \tau_n &= \tau_p\otimes I_r\otimes\tau_q+P_p\otimes\tau_{rq}+\tau_p\otimes I_r\otimes P_q.\end{aligned}$$

可得, 存在正交表 $L_n((pr)d)$ 和 $L_n((rq)d)$, 由正交表的定义可知, 应有 $(prd)|n$ 和 $(rqd)|n$, 即 $d|q$, $d|p$. 这与 p,q 互素矛盾. 故 $\tau_p\otimes I_r\otimes\tau_q$ 不含有正交表. #

推论 1 在定理 2 的前提下, 投影矩阵 $\tau_p\otimes P_r\otimes\tau_q$, $\tau_p\otimes\tau_r\otimes\tau_q$, $\tau_p\otimes\tau_q$, $P_r\otimes\tau_p\otimes\tau_q$, $\tau_p\otimes\tau_q\otimes P_r$ 均不含任何 n 次试验的正交表.

§3. 定理的应用

这一部分我们用例子说明定理 1, 2, 推论 1 的使用方法.

例 1 用上述方法判定文 [1] 中的正交表 $L_{36}(3\cdot 2^{27})$ 为满意的正交表.

证明： 因为文 [1] 中的正交表 $L_{36}(3\cdot 2^{27})$ 是根据 τ_{36} 如下正交分解得到的：

$$\begin{aligned}\tau_{36} &= \sum_{i=1}^{3}(S_i\otimes Q_i)(P_3\otimes(\tau_3\otimes I_4+P_3\otimes\tau_2\otimes P_2))(S_i^T\otimes Q_i^T)\\ &\quad +(S_4\otimes I_4)(P_3\otimes\tau_3\otimes P_4)(S_4^T\otimes I_4)+(S_4\otimes I_4)(P_3\otimes\tau_3\otimes\tau_4)(S_4^T\otimes I_4)\\ &= m(L_{36}(3\cdot 2^{27}))+(S_4\otimes I_4)(P_3\otimes\tau_3\otimes\tau_4)(S_4^T\otimes I_4).\end{aligned}$$

由推论 1 知：投影矩阵 $(P_3\otimes\tau_3\otimes\tau_4)$ 不含任何 36 次试验的正交表．由定理 1 知： $L_{36}(3\cdot 2^{27})$ 为满意的正交表．同理可证文 [1] 中 $L_{36}(6^2\cdot 3^8\cdot 2)$ 为满意的正交表． #

例 2 正交表 $L_{36}(18\cdot 2^2)$ 是最满意的正交表．

证明： 因为 τ_{36} 有如下正交分解：

$$\tau_{36}=\tau_{18}\otimes P_2+I_{18}\otimes\tau_2=\tau_{18}\otimes P_2+P_9\otimes I_2\otimes\tau_2+\tau_9\otimes I_2\otimes\tau_2,$$

所以我们得到正交表 $L_{36}(18\cdot 2^2)$：

$$L_{36}(18\cdot 2^2)=((18)\otimes 1_2, 1_9\otimes L_4(2^2)),$$

其中

$$L_4(2^2)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}^T.$$

由定理 2, $\tau_9\otimes I_2\otimes\tau_2$ 不含任何 36 次试验的正交表．由定理 1 知， $L_{36}(18\cdot 2^2)$ 为满意的正交表． #

事实上， $L_{36}(18\cdot 2^2)$ 也是最满意的正交表．因为由正交表的定义知， $L_{36}(18\cdot 2^2)$ 不可能再添加 3, 4, 6, 9, 12, 18 水平的列．另一方面，对任一 $L_{36}(18\cdot 2^2)$ 类型的正交表，对其实行行变换后，总能化成如下形式：

$$((18)\otimes 1_2, 1_{18}\otimes(2), 1_9\otimes(0,1,1,0)^T),$$

其对应矩阵象为 $\tau_{18}\otimes P_2+P_9\otimes I_2\otimes\tau_2$, 其余项 $\Delta=\tau_{36}-(\tau_{18}\otimes P_2+P_9\otimes I_2\otimes\tau_2)=\tau_9\otimes I_2\otimes\tau_2$ 不含任何正交表 (包括 2 水平的列). 所以不存在正交表 $L_{36}(18\cdot 2^x)(x\geq 3)$. 即 $L_{36}(18\cdot 2^2)$ 为最满意的正交表．

例 3 文 [3] 中证明了正交表 $L_{12}(6\cdot 2^m)$, $L_{4k}(2k\cdot 2^m)$ (k 是奇数) 中 m 的最大值等于 2. 类似本文例 2 的证明方法，很容易证明上述结论．(略).

例 4 将 τ_{12} 进行如下正交分解：

$$\tau_{12}=\tau_3\otimes P_4+P_3\otimes\tau_4+\tau_3\otimes\tau_4.$$

令 $m((4))=\tau_4$, 得到正交表 $L_{12}(3\cdot 4)=((3)\otimes 1_4, 1_3\otimes(4))$, 此正交表为一满意正交表，因为 $\tau_3\otimes\tau_4$ 不含任何 12 次试验的正交表．令 $\tau_4=m(L_4(2^3))$, 得到正交表 $L_{12}(3\cdot 2^3)=((3)\otimes 1_4, 1_3\otimes(L_4(2^3))$,

$$L_{12}(3\cdot 2^3)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&1&1&1&2&2&2&2\\0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0\end{pmatrix}^T,$$

此正交表为一满意的正交表，但不是最满意的正交表．因为存在正交表 $L_{12}(3\cdot 2^4)$：

$$L_{12}(3\cdot 2^4)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&1&1&1&2&2&2&2\\0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\0&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&0&1&0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

这说明满意的正交表不一定是最满意的正交表．然而正如引言中所说，判明一个正交表是否最满意的是很困难的．但利用定理 1, 2 判明一个正交表是否满意的有时是很容易的．因此，利用正交表与投影矩阵的关系构造一个满意的正交表也是很容易的．更重要的是，如果对一个确定的实验次数 n, 尽可能穷尽地构造出所有满意的正交表，然后在其中找出列数比较多的正交表，那么找到的正交表应为最满意的正交表或接近最满意的．

致谢 作者十分感谢审稿人对本文提出的宝贵意见！

参 考 文 献

[1] Zhang Yingshan, Lu Yiqiang and Pang Shanqi, Orthogonal arrays obtained by orthogonal decomposition of projection matrices, *Statistics Sinica*, **2**(1999), 595–604.

[2] 张应山, *多边矩阵理论*, 中国统计出版社, 1993.

[3] J.C. Wang and C.F.J. Wu, Nearly orthogonal arrays with mixed levels and small runs, *Technometrics*, **4**(1992), 409–422.

Satisfactory Orthogonal Arrays and Their Checking Method

PANG SHANQI[1,2] ZHANG YINGSHAN[2]

([1]*Xidian University, Xi'an, 710071;* [2]*Henan Normal University, Xinxiang, 453002*)

In this paper, we propose a new concept on satisfactory orthogonal array. By exploring the relationship between orthogonal arrays and orthogonal decompositions of projection matrices, we present a method of determinng that an orthogonal array is satisfactory.