应用概率统计 第 40 卷
第 4 期 2024 年 8 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Aug., 2024, Vol. 40, No. 4, pp. 558–571
doi: 10.12460/j.issn.1001-4268.aps.2024.2022059

具有随机投资收益过程的风险模型有限时间破产概率的一致渐近估计*

程 铭 王定成*

电子科技大学数学科学学院, 成都, 611731

摘 要: 本文考虑一类利用 càdlàg 过程刻画保险盈余的随机投资收益, 并利用二元上尾独立刻画保险索赔额之间相依结构的保险风险模型. 一方面, 本文提出条件 (6), 在此条件下得到该风险模型有限时间破产概率的一致渐近估计式. 另一方面, 考虑到条件 (6) 的普适性, 本文发现很多重要的随机过程都满足条件 (6), 如 Lévy 过程, Vasicek 模型, Cox-Ingersoll-Ross (CIR) 模型和 Heston 模型.

关键词: 渐近式; 一致性; 随机收益; 破产概率; 风险模型

中图分类号: O211.4

英文引用格式: CHENG M, WANG D C. Uniform asymptotic estimate for the finite-time ruin probability in a risk model with stochastic investment returns [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2024, 40(4): 558–571. (in Chinese)

1 引言

聚合风险模型是重要的保险风险模型, 而破产概率是度量保险公司风险的一种重要方法, 故研究保险公司聚合风险模型的破产概率问题具有重要的学术价值. 同时, 保险公司的资产收益对其破产概率有极大影响, 但考虑资产收益的风险模型的破产概率的研究会变得非常复杂. 因此, 一些学者就保险公司资产投资收益率固定不变的情形展开研究, 得到常数利息力风险模型中破产概率的一致渐近估计[1,2]. 但保险公司的资产收益率不可能是固定不变的, 即使其在债券市场进行投资, 其收益率也是变化的. 故学者们进一步探讨由几何 Lévy 过程描述投资收益过程的风险模型破产概率的一致渐近分析[3–6]. 但在金融活动日益频繁的今天, 保险公司通常会将投资组合的一部分资产购买可能获得较高回报的风险资产. 因此, 保险公司资产收益率具有不确定性与风险性. 而且, 在风险模型中, 描述投资收益过程的随机过程的选择会不可避免地导致对破产概率的过低估计或过高估计. 为了解决这一问题, 本文假设投资收益过程是一个 càdlàg 过程, 即令 càdlàg 过程 $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ 表示投资收益过程, 其中 $\xi(0) = 0$. 令 x 表示保险公司的初始资本, 常数 $c > 0$ 表示保费率. 则截止 t

*国家自然科学基金项目 (批准号: 71271042) 资助.

*通讯作者, E-mail: wangdc@uestc.edu.cn.

本文 2022 年 4 月 14 日收到, 2022 年 8 月 14 日收到修改稿.

时刻的盈余过程 $\{U_t, t \geqslant 0\}$ 为

$$U_t = \mathrm{e}^{\xi(t)} \left(x + c\int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{N_t} X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)} \right), \quad t > 0, \tag{1}$$

其中 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 表示该保险公司的索赔额序列, 索赔到达时间间隔 $\{\theta_i, i \geqslant 1\}$ 是独立同分布的随机变量, 于是索赔额到达时间 $\tau_n = \sum_{i=1}^n \theta_i, n \geqslant 1$, 构成更新过程 $N_t = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{I}_{[\tau_n \leqslant t]}$, 其中 $\mathbb{I}_E$ 是事件 E 的示性函数. 记 N_t 的更新函数为 $\lambda(t)$.

所谓有限时间破产概率, 就是保险公司净资产在未来一段时间变为负债时的概率, 即

$$\Psi(x,t) = \mathsf{P}\left(T_{\max} \leqslant t \mid U_0 = x\right), \quad 0 < t < \infty,$$

其中 $T_{\max} = \inf\{t > 0 : U_t < 0\}$ 表示破产时间, 约定 $\inf \emptyset = \infty$.

假定保险索赔额 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 为正随机序列并且具有共同的分布函数 F. 进一步, 本文假定索赔额序列 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 是二元上尾独立的. 事实上, 随机序列 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 被称为二元上尾独立, 如果对所有整数 $i, j \geqslant 1, i \neq j$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathsf{P}(X_i > x,\ X_j > x)}{\mathsf{P}(X_k > x)} = 0, \quad k = i, j. \tag{2}$$

另外, 本文亦假设 $\{X_i, i \geqslant 1\}$,$\{\theta_i, i \geqslant 1\}$ 和 $\{\xi(t), t \geqslant 0\}$ 独立. 本文针对模型 (1) 提出条件 (6). 且我们发现很多重要的随机过程都满足条件 (6), 如 Lévy 过程、Vasicek 模型、CIR 模型和 Heston 模型. 并且在该条件成立的情形下, 本文建立了模型 (1) 有限时间破产概率的一致渐近估计式.

本文的行文组织架构如下: 第 2 节介绍了一些预备知识, 并呈现了本文的主要结果; 第 3 节展示了满足条件 (6) 的随机过程作为示例; 在第 4 节中给出了数值模拟; 第 5 节给出了主要结果的证明.

2　预备知识和主要结果

在本文, C 总是代表一个正常数, 且在不同的地方其数值可能不同. 对两个不同的正函数 $f(\cdot,\cdot)$ 和 $g(\cdot,\cdot)$ 来说,

$$l_1 = \liminf_{x\to\infty} \inf_{t\in E\neq\emptyset} \frac{f(x,t)}{g(x,t)} \leqslant \limsup_{x\to\infty} \sup_{t\in E\neq\emptyset} \frac{f(x,t)}{g(x,t)} = l_2.$$

如果 $l_1 = l_2 = 1$, 则称 $f(x,t) \sim g(x,t)$ 在 $t \in E$ 是一致成立的. 如果 $0 < l_1 \leqslant l_2 < \infty$, 则称 $f(x,t) \asymp g(x,t)$ 在 $t \in E$ 是一致成立的. 除非特殊说明, 极限关系皆为 $x \to \infty$ 时的极限关系. 对于实数 a 和 b, 记 $a \vee b = \max\{a,b\}$,$a \wedge b = \min\{a,b\}$.

正则变化族是一类重要的重尾分布族, 它包含很多常见分布, 比如 Pareto 分布, Burr 分布, log-gamma 分布和 t 分布. 本节首先回顾具有正则变化尾的分布的定义及

性质.

定义 1 称 $\mathbb{R}$ 上的分布 F 具有正则变化的尾部, 如果 $\overline{F}(x)=1-F(x)>0$ 对所有 $x\geqslant 0$ 成立, 并且存在常数 $\alpha>0$ 使得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}=y^{-\alpha}$$

对任意 $y>0$ 成立. 记作 $F\in\mathcal{R}_{-\alpha}$.

如果分布 $F\in\mathcal{R}_{-\alpha}$, 根据文献 [7] 中命题 2.2.1, 对任意固定实数 $p>\alpha$, 存在正常数 C_p 和 D_p 使得不等式

$$\frac{\overline{F}(y)}{\overline{F}(x)}\leqslant C_p\left(\frac{x}{y}\right)^p \tag{3}$$

对所有 $x\geqslant y\geqslant D_p$ 一致成立. 在不等式 (3) 中固定变量 y 可得

$$x^{-p}=o(\overline{F}(x)). \tag{4}$$

假定 X 和 Y 为独立非负随机变量并设 X 的分布函数 $F\in\mathcal{R}_{-\alpha}$, 则根据文献 [8] 引理 3.2 可得, 对任意的 $\delta>0$ 和 $\alpha<p<\infty$, 存在与随机变量 Y 和实数 δ 无关的常数 $C>0$ 使得不等式

$$\mathsf{P}\left(XY>\delta x|Y\right)\leqslant C\overline{F}(x)\left(\delta^{-p}Y^p\mathbb{I}_{[Y\geqslant\delta]}+\mathbb{I}_{[Y<\delta]}\right) \tag{5}$$

对充分大的 x 成立. 令 Λ 表示满足 $0<\lambda(t)<\infty$ 的 t 的集合, 且 $\underline{t}=\inf\{t:P(\tau_1\leqslant t)>0\}$, 于是

$$\Lambda=\begin{cases}[\underline{t},\infty] & 若\mathsf{P}(\tau_1=\underline{t})>0,\\ (\underline{t},\infty] & 若\mathsf{P}(\tau_1=\underline{t})=0.\end{cases}$$

对所有的 $T\in\Lambda$, 简记为 $\Lambda_T=(0,T]\cap\Lambda$.

现在陈述本文的主要结果.

定理 1 考虑风险模型 (1), 假定索赔额 $\{X_i,i\geqslant 1\}$ 的共同分布 $F\in\mathcal{R}_{-\alpha}$, 并且 $\{X_i,i\geqslant 1\}$ 是二元上尾独立的随机序列. 对 $t\in\Lambda_T$, 如果存在常数 $\kappa>\alpha$ 和 $q>0$ 使得

$$\sup_{s\in(0,t]}\mathsf{E}\mathrm{e}^{-\kappa\xi(s)}<H,\quad \sup_{s\in(0,t]}\mathsf{P}(\xi(s)>A)<1\quad 和\quad \mathsf{E}\left\{\int_0^t\mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s\right\}^q<\infty \tag{6}$$

对充分大的 $H>0$ 和 $A>0$ 成立, 则

$$\Psi(x,t)\sim\overline{F}(x)\int_0^t\mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}\mathrm{d}\lambda(s) \tag{7}$$

对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立.

注记 1　将模型 (1) 中索赔额的共同分布由正则分布推广至更一般的重尾分布 (例如, 扩展正则变化分布族) 是可行的, 但其证明与本文的证明类似, 所以本文不追求这一无本质区别的推广. 本文力求证明条件 (6) 能够保证有限时间破产概率的一致渐近估计式成立. 事实上, 很多重要的随机过程 (见第 3 节) 都满足条件 (6). 其实, 条件 (6) 的第三项只在证明 $\Psi(x,t)$ 的渐近下界中起作用, 见不等式 (22), 但其在考虑投资收益风险模型的破产概率的一致性证明中是必需的, 见文献 [5,6].

3　一些例子

3.1　Lévy 模型

令 $\{\xi(t), t\geqslant 0\}$ 是 Lévy 过程, 定义其 Laplace 指数为 $\phi(s)=\log \mathsf{E}\mathrm{e}^{-s\xi(1)}$, $s\in(-\infty,\infty)$. 若 $\phi(s)$ 有限, 则 $\mathsf{E}\mathrm{e}^{-s\xi(t)}=\mathrm{e}^{t\phi(s)}<\infty$. 正如 Tang 等[6] 所考虑的, 当 $\kappa_1>\alpha$ 时假定 $\phi(\kappa_1)<0$ 成立. 在式 (6) 取 $q=\kappa_1$, 由文献 [6] 中引理 4.6 得

$$\mathsf{E}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s\right)^{\kappa_1}<\mathsf{E}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s\right)^{\kappa_1}<\infty$$

对任意 $t\in\Lambda_T$ 成立. 接下来我们只需验证条件 (6) 的前两项对 $t\in\Lambda_T$ 成立. 由 $\phi(\kappa_1)<0$ 知, 存在 $H_1>0$ 使得

$$\sup_{s\in(0,t]}\mathsf{E}\mathrm{e}^{-\kappa_1\xi(s)}=\sup_{s\in(0,t]}\mathrm{e}^{s\phi(\kappa_1)}<H_1.$$

对任意 $t\in\Lambda_T$ 成立. 另外, 对 $u>u_0>0$, 根据文献 [9] 中 的引理可以得到

$$\mathsf{P}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\xi(s)>u\right)\mathsf{P}\left(\inf_{0\leqslant s\leqslant T}\xi(s)>-u_0\right)\leqslant \mathsf{P}\left(\xi(T)>u-u_0\right).$$

于是取足够大的 u_0, 满足 $\mathsf{P}\left(\inf_{0\leqslant s\leqslant T}\xi(s)>-u_0\right)>0$, 则

$$\sup_{0<s\leqslant t}\mathsf{P}\left(\xi(s)>u\right)\leqslant \mathsf{P}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\xi(s)>u\right)\leqslant\frac{\mathsf{P}\left(\xi(T)>u-u_0\right)}{\mathsf{P}\left(\inf_{0\leqslant s\leqslant T}\xi(s)>-u_0\right)}<1$$

对足够大的 u 成立. 综上, 该 Lévy 过程满足条件 (6).

3.2　Vasicek 模型和 CIR 模型

假设 $\{\xi(t), t\geqslant 0\}$ 由方程 $\xi(t)=\int_0^t r_s\mathrm{d}s$ 描述, 其中 $\{r_t,\ t\geqslant 0\}$ 是短期随机利率过程, 且该利率过程满足随机微分方程

$$\mathrm{d}r_t=m(l-r_t)\mathrm{d}t+\delta r_t^{\pi}\mathrm{d}W_t. \tag{8}$$

此处 m, l 和 δ 皆为正常数, $\pi=0$ 或 $\frac{1}{2}$, $\{W_t,\ t\geqslant 0\}$ 是一个标准的维纳过程. 在数学金融中, 当 $\pi=0$ 时, 式 (8) 被称为 Vasicek 模型; 当 $\pi=1/2$ 时, 式 (8) 被称为 CIR 模型.

情形 (I): Vasicek 模型

由文献 [10] 中式 (3.16)–(3.18) 得

$$\mathsf{E}\mathrm{e}^{b\xi(t)} = \exp\left\{A_1(b) + A_2(b)t + A_3(b)\mathrm{e}^{-mt} + A_4(b)\mathrm{e}^{-2mt}\right\} \tag{9}$$

对实数 b 成立, 其中

$$A_1(b) = \frac{b}{m}(r_0 - l) - 3\frac{b^2\delta^2}{4m^3},\quad A_2(b) = bl + \frac{\delta^2 b^2}{2m^2},\quad A_3(b) = \frac{b}{m}(l - r_0) + \frac{b^2\delta^2}{m^3},\quad A_4(b) = -\frac{b^2\delta^2}{4m^3}.$$

对任意 $t \in \Lambda_T$, 由式 (9) 知存在 $\kappa_2 > \alpha$ 和足够大的 $H_2 > 0$ 使得下面两个不等式成立:

$$\sup_{s\in(0,t]} \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\kappa_2\xi(s)} < H_2 \quad 和 \quad \sup_{s\in(0,t]} \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\xi(s)} < \infty.$$

故取条件 (6) 中 $q = 1$ 得 $\mathsf{E}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s\right) \leqslant \int_0^t \sup_{s\in(0,t]} \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s < \infty$ 成立. 取 $\beta_1 > 0$ 和足够大的 $A > 0$, 令 $\mathrm{e}^{\beta_1 A} = \sup_{s\in(0,t]} \mathsf{E}\mathrm{e}^{\beta_1\xi(s)} + 1$, 则由 Markov 不等式得

$$\sup_{s\in(0,t]} \mathsf{P}\left(\xi(s) > A\right) = \sup_{s\in(0,t]} \mathsf{P}\left(\mathrm{e}^{\xi(s)} > \mathrm{e}^{A}\right) \leqslant \frac{\sup_{s\in(0,t]} \mathsf{E}\mathrm{e}^{\beta_1\xi(s)}}{\mathrm{e}^{\beta_1 A}} < 1.$$

于是, 该 Vasicek 模型满足条件 (6).

情形 (II): CIR 模型

根据文献 [10] 定理 3.3 得

$$\mathsf{E}\mathrm{e}^{b\xi(t)} = \exp\left\{\hat{c}(b)r_0 + \frac{(m - \widehat{\Omega}(b))mlt}{\delta^2} - \frac{2ml}{\delta^2}\ln\left(\frac{\hat{\zeta}(b) - \mathrm{e}^{-\widehat{\Omega}(b)t}}{\hat{\zeta}(b) - 1}\right)\right\} \tag{10}$$

对 $m^2 > 2\delta^2 b$ 成立, 其中

$$\widehat{\Omega}(b) = \sqrt{m^2 - 2\delta^2 b},\quad \hat{\zeta}(b) = 1 - \frac{2\widehat{\Omega}(b)}{\widehat{\Omega}(b) - m},\quad \hat{c}(b) = \frac{m - \widehat{\Omega}(b)}{\delta^2} - \frac{2\widehat{\Omega}(b)}{\delta^2}\cdot\frac{1}{\hat{\zeta}(b)e^{\widehat{\Omega}(b)t} - 1}.$$

对任意的 $t \in \Lambda_T$, 由式 (10) 知, 存在 $\kappa_3 > \alpha$ 和足够大的 $H_3 > 0$ 使得

$$\sup_{s\in(0,t]} \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\kappa_3\xi(s)} < H_3 \quad 和 \quad \sup_{s\in(0,t]} \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\xi(s)} < \infty$$

成立. 于是取条件 (6) 中 $q = 1$ 得 $\mathsf{E}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s\right) < \infty$. 对满足 $m^2 > 2\delta^2\beta_2 > 0$ 的 β_2 和足够大的 $A > 0$, 取 $\mathrm{e}^{\beta_2 A} = \sup_{s\in(0,t]} \mathsf{E}\mathrm{e}^{\beta_2\xi(s)} + 1$. 于是, 由 Markov 不等式得

$$\sup_{s\in(0,t]} \mathsf{P}\left(\xi(s) > A\right) \leqslant \frac{\sup_{s\in(0,t]} \mathsf{E}\mathrm{e}^{\beta_2\xi(s)}}{\mathrm{e}^{\beta_2 A}} < 1,$$

于是该 CIR 模型满足条件 (6).

3.3 Heston 模型

假设 $\{S_t = \mathrm{e}^{\xi(t)},\ t \geqslant 0\}$ 由 Heston 模型描述, 即

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\mathrm{d}t + \sqrt{r_t}S_t\mathrm{d}W_t^{(1)} \quad 和 \quad \mathrm{d}r_t = m(l - r_t)\mathrm{d}t + \delta\sqrt{r_t}\mathrm{d}W_t^{(2)}, \tag{11}$$

其中 μ 是无风险利率; l, m, δ 是满足 $2ml > \delta^2$ 的正常数.$\{r_t, t \geqslant 0\}$ 是起始点为 $r_0 > 0$ 的方

差过程; $\{W_t^{(2)}, t \geqslant 0\}$ 是一个标准的布朗运动, 且满足 $\mathrm{d}W_t^{(1)} = \tilde{\rho}\mathrm{d}W_t^{(2)} + \sqrt{1-\tilde{\rho}^2}\mathrm{d}W_t^{(3)}$, 其中 $\tilde{\rho}\in[-1,0]$, $\{W_t^{(1)}, t\geqslant 0\}$ 和 $\{W_t^{(3)}, t\geqslant 0\}$ 皆为布朗运动, 且 $\{W_t^{(3)}, t\geqslant 0\}$ 与 $\{W_t^{(2)}, t\geqslant 0\}$ 独立. 对满足不等式

$$m^2 > \delta^2 b^2(1-\tilde{\rho}^2) + b\delta(2\tilde{\rho}m - \delta) \quad \text{和} \quad m^2 > \delta^2 b^2(1-\tilde{\rho}^2) \tag{12}$$

的实数 b, 可根据文献 [10] 中定理 3.4 得

$$\mathsf{E}\mathrm{e}^{b\xi(t)} = \exp\left\{b\mu t - \frac{b\tilde{\rho}r_0}{\delta} - \frac{b\tilde{\rho}mlt}{\delta}\right\} \cdot M(w_1, w_2, t), \tag{13}$$

其中

$$M(w_1,w_2,t) = \exp\left\{\bar{c}(w_1,w_2)r_0 + \frac{(m-\overline{\Omega}(w_2))mlt}{\delta^2} - \frac{2ml}{\delta^2}\ln\left(\frac{\bar{\varsigma}(w_1,w_2) - e^{-\overline{\Omega}(w_2)t}}{\bar{\varsigma}(w_1,w_2)-1}\right)\right\},$$

$$w_1 = \frac{b\tilde{\rho}}{\delta}, \quad \overline{\Omega}(w_2) = \sqrt{m^2 - 2\delta^2 w_2}, \quad \bar{\varsigma}(w_1,w_2) = 1 - \frac{2\overline{\Omega}(w_2)}{\delta^2 w_1 + (\overline{\Omega}(w_2) - m)},$$

$$w_2 = \frac{b^2(1-\tilde{\rho}^2)}{2} + \frac{b\tilde{\rho}m}{\delta} - \frac{b}{2}, \quad \bar{c}(w_1,w_2) = \frac{m - \overline{\Omega}(w_2)}{\delta^2} - \frac{2\overline{\Omega}(w_2)}{\delta^2}\cdot\frac{1}{\bar{\varsigma}(w_1,w_2)e^{\overline{\Omega}(w_2)t} - 1}.$$

对任意的 $t \in \Lambda_T$ 和 $\kappa_4 > \alpha$, 由式 (13) 知, 当 $-\kappa_4$ 和 -1 满足式 (12) 时, 不等式

$$\sup_{s\in(0,t]} \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\kappa_4\xi(s)} < H_4 \qquad \text{和} \qquad \sup_{s\in(0,t]} \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\xi(s)} < \infty$$

对足够大的 $H_4 > 0$ 成立. 取条件 (6) 中 $q = 1$ 得 $\mathsf{E}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s\right) < \infty$. 取 $\beta_3 > 0$ 满足式 (12), 令 $\mathrm{e}^{\beta_3 A} = \sup_{s\in(0,t]}\mathsf{E}\mathrm{e}^{\beta_3\xi(s)} + 1$, 则 $\sup_{s\in(0,t]}\mathsf{P}(\xi(s) > A) \leqslant \frac{\sup_{s\in(0,t]}\mathsf{E}\mathrm{e}^{\beta_3\xi(s)}}{\mathrm{e}^{\beta_3 A}} < 1$. 所以, 该 Heston 模型满足条件 (6).

4　数值模拟

本节采用 R 软件验证定理 1 的结论。我们选取 3.2 节情形 (I) 引入的 Vasicek 模型描述投资收益过程 $\xi(t)$. 令索赔额 X_1, X_2, $\cdots$ 是独立同分布的随机变量, 其共同分布 F 是参数为 (α,β) 的 Pareto 分布, 即 $F(x) = 1 - [\beta/(x+\beta)]^\alpha \in \mathcal{R}_{-\alpha}, x > 0$. 假设索赔到达时间间隔 θ_1, θ_2, $\cdots$ 是独立同分布且参数为 λ 的指数随机变量. 故根据式 (7), 我们得到破产概率 $\Psi(x,t)$ 的渐近估计为

$$\Psi(x,t) \sim \overline{F}(x)\int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}\mathrm{d}\lambda(s) = \lambda\left(\frac{\beta}{x+\beta}\right)^\alpha \int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}\mathrm{d}s := \Psi_1(x,t), \tag{14}$$

其中 $\mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}$ 可以由式 (9) 得到.

本节用 $\Psi_2(x,t)$ 表示破产概率 $\Psi(x,t)$ 的蒙特卡洛仿真结果. 根据文献 [11] 的第 150 页可得

$$\xi(t) = \int_0^t \left[\mathrm{e}^{-ms}r_0 + l(1-\mathrm{e}^{-ms}) + \delta\mathrm{e}^{-ms}\int_0^s \mathrm{e}^{mu}\mathrm{d}W_u\right]\mathrm{d}s. \tag{15}$$

选取参数 $\lambda=0.5$, $\alpha=1.5$, $\beta=1$, $t=1$, $c=10$, $m=1$, $l=1$, $\delta=1$, $r_0=0.5$, 当初始资本 x 分别为 100, 300, 500, 700, 900 时, $\Psi_2(x,t)$ 的仿真算法为:

1. 令 $\tau_0=0, N=n=0, S=0$;
2. 产生随机变量 X 和 θ, 令 $\tau_1=\theta$;
3. 令 $\tau_1=\tau_0+\tau_1$. 若 $\tau_1>t$, 令 $N=N+1$. 若 $\tau_1\leqslant t$, 划分区间 $[\tau_0,\tau_1]$, 其分点为 t_0, t_1, $\cdots$, t_{10}. 取 $s=\tau_1$, t_1, t_2, $\cdots$, t_{10}. 划分区间 $[0,s]$, 其分点为 s_0, s_1, $\cdots$, s_{10}. 进一步划分区间 $[0,s_i]$,$1\leqslant i\leqslant 10$, 其分点为 $s_{i,0}$, $s_{i,1}$, $\cdots$, $s_{i,10}$. 故计算表达式

$$\xi(s)=\sum_{i=1}^{10}\{l+\mathrm{e}^{-ms_i}[r_0-l+\delta\sum_{j=1}^{10}\mathrm{e}^{ms_{i,j}}(W_{s_{i,j}}-W_{s_{i,j-1}})]\}(s_i-s_{i-1})$$

和 $S=S+X\mathrm{e}^{-\xi(\tau_1)}-c\sum_{i=1}^{10}\mathrm{e}^{-\xi(t_i)}(t_i-t_{i-1})$. 若 $S>x$, 则 $n=n+1,N=N+1$. 否则, 令 $\tau_0=\tau_1$, 并重复步骤 2, 3;

4. 令 $\tau_0=0,S=0$. 重复步骤 2, 3 直到 $N=10^6$;
5. 计算 $\Psi_2(x,t)=n/N$.

基于上述算法, 当初始资本分别为 $x=100$, 300, 500, 700, 900 时, 我们得到表 1. 由表 1 可知: (1) 破产概率随初始资本 x 增大而减小; (2) 当初始资本 x 增大时, 比值 $\frac{\Psi_2(x,t)}{\Psi_1(x,t)}$ 更接近 1.

表 1　渐近估计 $\Psi_1(x,t)$ 与蒙特卡洛仿真 $\Psi_2(x,t)$ 的比较

x	$\Psi_1(x,t)$	$\Psi_2(x,t)$	$\frac{\Psi_2(x,t)}{\Psi_1(x,t)}$
100	3.34×10^{-4}	2.65×10^{-4}	0.79
300	6.48×10^{-5}	5.2×10^{-5}	0.8
500	3.02×10^{-5}	2.5×10^{-5}	0.83
700	1.82×10^{-5}	1.6×10^{-5}	0.88
900	1.25×10^{-5}	1.3×10^{-5}	1.04

5　主要结果的证明

根据定理 1 的条件 (6) 知, 对任意 $t\in\Lambda_T$, 存在 $0<u_0<1$ 使得不等式

$$\sup_{s\in(0,t]}\mathsf{P}(\xi(s)>A_1)\leqslant 1-u_0$$

对充分大的 $A_1>0$ 成立. 当 $0\leqslant l\leqslant\kappa$ 时,

$$\begin{aligned}\inf_{s\in(0,t]}\mathsf{E}\mathrm{e}^{-l\xi(s)}&\geqslant\inf_{s\in(0,t]}\mathsf{E}\left(\mathrm{e}^{-l\xi(s)}\mathbb{I}_{[\mathrm{e}^{-l\xi(s)}\geqslant\mathrm{e}^{-lA_1}]}\right)\\&\geqslant\mathrm{e}^{-lA_1}\cdot\inf_{s\in(0,t]}\mathsf{P}\left(\mathrm{e}^{-l\xi(s)}\geqslant\mathrm{e}^{-lA_1}\right)=\mathrm{e}^{-lA_1}\cdot\inf_{s\in(0,t]}\mathsf{P}\left(\xi(s)\leqslant A_1\right)\\&=\mathrm{e}^{-lA_1}\cdot\left[1-\sup_{s\in(0,t]}\mathsf{P}\left(\xi(s)>A_1\right)\right]\geqslant u_0\mathrm{e}^{-lA_1}.\end{aligned}\tag{16}$$

根据定理 1 的条件 (6) 和 Hölder 不等式可得

$$\sup_{s\in(0,t]}\mathsf{E}\mathrm{e}^{-l\xi(s)}\leqslant\left(\sup_{s\in(0,t]}\mathsf{E}\mathrm{e}^{-\kappa\xi(s)}\right)^{l/\kappa}\leqslant H^{l/\kappa},\quad 0\leqslant l\leqslant\kappa. \tag{17}$$

于是, 当 $0\leqslant l\leqslant\kappa$ 且 $i\geqslant 1$ 时, 由不等式 (16) 和 (17) 知下列不等式在 $t\in\Lambda_T$ 一致成立:

$$\begin{aligned}u_0\mathrm{e}^{-lA_1}\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t)&\leqslant\inf_{s\in(0,t]}\mathsf{E}\mathrm{e}^{-l\xi(s)}\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t)\\&\leqslant\int_0^t\mathsf{E}\mathrm{e}^{-l\xi(s)}\mathsf{P}(\tau_i\in\mathrm{d}s)=\mathsf{E}\left(\mathrm{e}^{-l\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}\right)\\&\leqslant\sup_{s\in(0,t]}\mathsf{E}\mathrm{e}^{-l\xi(s)}\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t)\leqslant H^{\frac{l}{\kappa}}\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t).\end{aligned}\tag{18}$$

5.1　引理

引理 2　在定理 1 的条件下, 当 $i<j$ 时, 渐近关系

$$\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x,X_j\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}>x\right)=o(1)\overline{F}(x)\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t)$$

对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立.

证明:　对任意给定的实数 $\varepsilon>0$ 和 $\alpha<p<\kappa$, 取 $L>1$ 满足不等式 $L^{-\kappa(1-p/\kappa)}<\varepsilon$.

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x,X_j\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}>x\right)\\\leqslant&\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x,X_j\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}>x,\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}\leqslant L,\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}\leqslant L\right)\\&+\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x,\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>L\right)\\&+\mathsf{P}\left(X_j\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}>x,\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}>L\right):=K_1(x,t)+K_2(x,t)+K_3(x,t).\end{aligned}$$

考虑 $K_1(x,t)$,

$$\begin{aligned}&K_1(x,t)=\left(\iint_{0<u\leqslant v\leqslant L}+\iint_{0<v<u\leqslant L}\right)\mathsf{P}(X_i>x/u,X_j>x/v)\\&\quad\mathsf{P}\left(\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}\in\mathrm{d}u,\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}\in\mathrm{d}v\right)\\&\leqslant\iint_{0<u\leqslant v\leqslant L}\mathsf{P}(X_i>x/v,X_j>x/v)\mathsf{P}\left(\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}\in\mathrm{d}u,\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}\in\mathrm{d}v\right)\\&\quad+\iint_{0<v<u\leqslant L}\mathsf{P}(X_i>x/u,X_j>x/u)\mathsf{P}\left(\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}\in\mathrm{d}u,\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}\in\mathrm{d}v\right)\\&\leqslant\int_{v\in(0,L]}\mathsf{P}(X_i>x/v,X_j>x/v)\mathsf{P}\left(\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}\in\mathrm{d}v\right)\\&\quad+\int_{u\in(0,L]}\mathsf{P}(X_i>x/u,X_j>x/u)\mathsf{P}\left(\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}\in\mathrm{d}u\right):=K_{11}(x,t)+K_{12}(x,t).\end{aligned}$$

由不等式 (3) 可知, 存在正实数 C_p 和 D_p 使得不等式

$$P(X_k>x/v)\leqslant C_p\overline{F}(x)v^p,\quad k=i,j,$$

对所有 $v\in(1,L]$ 和所有 $x>LD_p$ 一致成立. 根据二元上尾独立的定义 (见式 (2)), 存在实数 $x_0>LD_p$ 使得对所有的 $x>x_0$,

$$\sup_{v\in(0,L]}\left\{\frac{\mathsf{P}(X_i>x/v,X_j>x/v)}{\overline{F}(x/v)}\right\}\leqslant\varepsilon.$$

当 $x>x_0$ 时, 根据上面两个不等式和不等式 (18) 可得

$$\begin{aligned}\frac{K_{11}(x,t)}{\overline{F}(x)}=&\int_{(0,1]}\frac{\mathsf{P}(X_i>x/v,X_j>x/v)}{\overline{F}(x/v)}\frac{\overline{F}(x/v)}{\overline{F}(x)}\mathsf{P}\left(\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}\in\mathrm{d}v\right)\\&+\int_{(1,L]}\frac{\mathsf{P}(X_i>x/v,X_j>x/v)}{\overline{F}(x/v)}\frac{\overline{F}(x/v)}{\overline{F}(x)}\mathsf{P}\left(\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}\in\mathrm{d}v\right)\\\leqslant&\int_{(0,1]}\frac{\mathsf{P}(X_i>x/v,X_j>x/v)}{\overline{F}(x/v)}\mathsf{P}\left(\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}\in\mathrm{d}v\right)\\&+C_p\int_{(1,L]}\frac{\mathsf{P}(X_i>x/v,X_j>x/v)}{\overline{F}(x/v)}v^p\mathsf{P}\left(\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}\in\mathrm{d}v\right)\\\leqslant&\sup_{v\in(0,L]}\left\{\frac{\mathsf{P}(X_i>x/v,X_j>x/v)}{\overline{F}(x/v)}\right\}\left[\mathsf{P}\left(0<\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}\leqslant1\right)+C_p\mathsf{E}\left(\mathrm{e}^{-p\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}\right)\right]\\\leqslant&C\varepsilon\mathsf{P}(\tau_j\leqslant t)\leqslant C\varepsilon\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t)\end{aligned}$$

对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立. 根据 $K_{11}(x,t)$ 与 $K_{12}(x,t)$ 的对称性知, 存在实数 $x_1>x_0$ 使得对所有的 $x>x_1$,$K_{12}(x,t)\leqslant C\varepsilon\overline{F}(x)\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t)$ 对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立. 于是对所有的 $x>x_1$,

$$K_1(x,t)\leqslant C\varepsilon\overline{F}(x)\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t)$$

对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立.

对 $K_2(x,t)$, 根据式 (5), Hölder 不等式, Markov 不等式及式 (18) 知, 存在 $x_2>x_1$ 使得当 $x>x_2$ 时有

$$\begin{aligned}K_2(x,t)=&\mathsf{E}\left\{\mathbb{I}_{[\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>L]}\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x|\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}\right)\right\}\\\leqslant&C\overline{F}(x)\mathsf{E}\left(\mathrm{e}^{-p\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}\mathbb{I}_{[\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>L]}\right)\\\leqslant&C\overline{F}(x)\left[\mathsf{E}\left(\mathrm{e}^{-\kappa\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}\right)\right]^{p/\kappa}\left[\mathsf{P}(\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>L)\right]^{1-p/\kappa}\\\leqslant&C\overline{F}(x)H^{p/\kappa}\left[\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t)\right]^{p/\kappa}\left[L^{-\kappa}\mathsf{E}\left(\mathrm{e}^{-\kappa\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}\right)\right]^{1-p/\kappa}\\\leqslant&CHL^{-\kappa(1-p/\kappa)}\overline{F}(x)\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t)\leqslant C\varepsilon\overline{F}(x)\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t)\end{aligned}$$

对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立. 类似于 $K_2(x,t)$, 存在 $x_3>x_2$ 使得当 $x>x_3$ 时有 $K_3(x,t)\leqslant C\varepsilon\overline{F}(x)\mathsf{P}(\tau_j\leqslant t)\leqslant C\varepsilon\overline{F}(x)\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t)$. 综上所述, 引理 2 得证. □

引理 3 在定理 1 的条件下, 渐近关系

$$\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^nX_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)\sim\sum_{i=1}^n\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)\sim\overline{F}(x)\int_0^t\mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}\sum_{i=1}^n\mathsf{P}(\tau_i\in\mathrm{d}s)$$

对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立.

证明: 根据文献 [12] 中引理 5.3 和式 (18) 可以得到

$$\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)\sim\overline{F}(x)\int_0^t\mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}\mathsf{P}(\tau_i\in ds)\asymp\overline{F}(x)\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t)\tag{19}$$

对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立. 故只需证明 $\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)\sim\sum_{i=1}^n\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)$ 对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立.

首先, 我们证明 $\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)$ 的一致渐近上界. 由于 $F\in\mathcal{R}_{-\alpha}$, 对任意给定的实数 $\varepsilon>0$, 存在常数 $0<\delta<1$ 满足 $(1-\delta)^{-\alpha}<1+\varepsilon$. 令 $A=\bigcup_{i=1}^n\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>(1-\delta)x\right)$, 于是根据渐近关系 (19) 和引理 2 得

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)=\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x,A\bigcup A^c\right)\\
&\leqslant\sum_{i=1}^n\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>(1-\delta)x\right)+\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x,\bigcap_{i=1}^n\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}\leqslant(1-\delta)x\right)\right)\\
&\sim\sum_{i=1}^n(1-\delta)^{-\alpha}\overline{F}(x)\int_0^t\mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}\mathsf{P}(\tau_i\in\mathrm{d}s)\\
&\quad+\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x,\bigcap_{i=1}^n\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}\leqslant(1-\delta)x\right)\right)\\
&\leqslant(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^n\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)+\sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n}\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>\frac{\delta x}{n},X_j\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}>\frac{\delta x}{n}\right)\\
&\leqslant(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^n\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)+o(1)\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)
\end{aligned}$$

对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立.

随后, 我们证明渐近关系 $\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)$ 的一致渐近下界. 由引理 2 得

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)>\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)\right)\\
&\geqslant\sum_{i=1}^n\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)-\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x,X_j\mathrm{e}^{-\xi(\tau_j)}\mathbb{I}_{[\tau_j\leqslant t]}>x\right)\\
&\sim\sum_{i=1}^n\mathsf{P}\left(X_i\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}>x\right)
\end{aligned}$$

对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立. 综上, 引理 3 得证. □

5.2　证明定理 1

证明: 显然, 模型 (1) 中的 U_t 等价于

$$U_t = \mathrm{e}^{\xi(t)} \left(x + c \int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)} \mathrm{d}s - \sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)} \mathbb{I}_{[\tau_i \leqslant t]} \right). \tag{20}$$

于是, 对 $t \in \Lambda_T$, 有限时间破产概率 $\Psi(x,t)$ 可写为

$$\Psi(x,t) = \mathsf{P}\left(\text{存在 } 0 < s \leqslant t \text{ 使得 } U_s < 0 \mid U_0 = x\right).$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 当 $w \geqslant 0$ 时, $\sum_{i=1}^{\infty} i^w \cdot [\mathsf{P}(\theta \leqslant t)]^{i-1} < \infty$ 对 $t \in \Lambda_T$ 一致成立. 所以存在常数 $n_1 > 0$ 使得 $\sum_{i=n_1+1}^{\infty} i^w \cdot [\mathsf{P}(\theta \leqslant t)]^{i-1} < \varepsilon$. 于是, 由式 (18) 得

$$\sum_{i=n_1+1}^{\infty} i^w \mathsf{P}(\tau_i \leqslant t) \leqslant \mathsf{P}(\theta \leqslant t) \sum_{i=n_1+1}^{\infty} i^w \cdot [\mathsf{P}(\theta \leqslant t)]^{i-1} \leqslant C\varepsilon \int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)} \mathsf{P}(\tau_1 \in \mathrm{d}s) \tag{21}$$

对 $t \in \Lambda_T$ 一致成立. 根据 Markov 不等式和条件 (6) 知, 存在足够大的 $A' > 0$ 使得

$$\mathsf{P}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)} \mathrm{d}s > A' \right) \leqslant A'^{-q}\, \mathsf{E}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)} \mathrm{d}s \right)^q < C\varepsilon \tag{22}$$

对 $t \in \Lambda_T$ 一致成立.

接下来分两步证明 $\Psi(x,t)$ 的一致渐近估计式. 第一步, 我们证明渐近关系 (7) 的一致渐近上界. 由 $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ 知存在 $v_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ 满足 $v_0^{-\alpha} < 1 + \varepsilon$. 于是,

$$\begin{aligned}
\Psi(x,t) &= \mathsf{P}\left(\bigcup_{0<s\leqslant t} \left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)} \mathbb{I}_{[\tau_i \leqslant s]} - c\int_0^s \mathrm{e}^{-\xi(u)} \mathrm{d}u > x \right) \right) \\
&\leqslant \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)} \mathbb{I}_{[\tau_i \leqslant t]} > x \right) \\
&\leqslant \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)} \mathbb{I}_{[\tau_i \leqslant t]} > v_0 x \right) + \mathsf{P}\left(\sum_{i=n_1+1}^{\infty} X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)} \mathbb{I}_{[\tau_i \leqslant t]} > (1-v_0)x \right) \\
&:= I_1(x,t) + I_2(x,t).
\end{aligned} \tag{23}$$

对于 $I_1(x,t)$, 根据引理 3 得, 存在 $x_4 > x_3$, 使得对所有 $x > x_4$,

$$I_1(x,t) \sim v_0^{-\alpha} \overline{F}(x) \int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)} \sum_{i=1}^{n_1} \mathsf{P}(\tau_i \in \mathrm{d}s) \leqslant (1+\varepsilon)\overline{F}(x) \int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)} \mathrm{d}\lambda(s)$$

对 $t \in \Lambda_T$ 一致成立. 对于 $I_2(x,t)$, 当 $\alpha < p < \kappa$ 时, 由式 (5), 式 (17) 和式 (21) 得, 存在 $x_5 > x_4$, 使得对所有 $x > x_5$ 和足够大的 n_1,

$$
\begin{aligned}
I_2(x,t) &\leqslant P\left(\sum_{i=n_1+1}^{\infty} X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]} > \sum_{i=n_1+1}^{\infty}\frac{(1-v_0)x}{2i^2}\right)\\
&\leqslant \sum_{i=n_1+1}^{\infty}\mathsf{P}\left(X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]} > \frac{(1-v_0)x}{2i^2}\right)\\
&= \sum_{i=n_1+1}^{\infty}\mathsf{E}\left\{\mathsf{P}\left(X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]} > \frac{(1-v_0)x}{2i^2}|\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}\right)\right\}\\
&\leqslant C\overline{F}(x)\sum_{i=n_1+1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1-v_0}{2}\right)^{-p} i^{2p}\mathsf{E}\left(\mathrm{e}^{-p\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}\right)+\mathsf{E}\left(\mathbb{I}_{[\mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]}<\frac{1-v_0}{2i^2}]}\right)\right\}\\
&\leqslant C\overline{F}(x)\sum_{i=n_1+1}^{\infty}[i^{2p}\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t)+\mathsf{P}(\tau_i\leqslant t)]\\
&\leqslant C\varepsilon\overline{F}(x)\int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}P(\tau_1\in \mathrm{d}s)\leqslant C\varepsilon\overline{F}(x)\int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}\mathrm{d}\lambda(s)
\end{aligned}
$$

对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立. 因此, 我们得到 $\Psi(x,t)\leqslant(1+C\varepsilon)\overline{F}(x)\int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}\mathrm{d}\lambda(s)$ 对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立.

第二步, 证明渐近关系 (7) 的一致渐近下界. 显然

$$
\begin{aligned}
\Psi(x,t) &\geqslant \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]} - c\int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s > x\right)\\
&\geqslant \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]} > x+cA', \int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s\leqslant A'\right)\\
&= \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]} > x+cA'\right) - \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]} > x+cA', \int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s > A'\right)\\
&:= I_1'(x,t)-I_2'(x,t). \qquad (24)
\end{aligned}
$$

对 $I_1'(x,t)$, 取 v_1 满足 $(1+v_1)^{-\alpha}\geqslant 1-\varepsilon$, 且存在 $x_6>x_5$, 使得对所有 $x>x_6$ 都有 $v_1x>cA'$ 成立. 根据引理 3, $F\in\mathcal{R}_{-\alpha}$, 式 (17) 式及 (21) 得

$$
\begin{aligned}
I_1'(x,t) &\geqslant \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)}\mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]} > (1+v_1)x\right) \sim (1+v_1)^{-\alpha}\overline{F}(x)\int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}\sum_{i=1}^{n_1}\mathsf{P}(\tau_i\in\mathrm{d}s)\\
&\geqslant (1-\varepsilon)\overline{F}(x)\int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}\left(\sum_{i=1}^{\infty}-\sum_{i=n_1+1}^{\infty}\right)\mathsf{P}(\tau_i\in\mathrm{d}s)\\
&\geqslant (1-C\varepsilon)\overline{F}(x)\int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}\lambda(\mathrm{d}s)
\end{aligned}
$$

对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立. 对 $I_2'(x,t)$, 根据式 (5), Hölder 不等式, 式 (17), (18) 和 (22) 知存在 $x_7>x_6$, 使得对所有 $x>x_7$ 有

$$
\begin{aligned}
I_2'(x,t) &\leqslant \sum_{i=1}^{n_1} \mathsf{P}\left(X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)} \mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t]} > \frac{x}{n_1}, \int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s > A'\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} \mathsf{P}\left(X_i \mathrm{e}^{-\xi(\tau_i)} \mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t,\, \int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s > A']} > \frac{x}{n_1}\right) \\
&\leqslant C\overline{F}(x) \sum_{i=1}^{n_1} \mathsf{E}\left(n_1^p \mathrm{e}^{-p\xi(\tau_i)} \mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t, \int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s > A']} + \mathbb{I}_{[\tau_i\leqslant t, \int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s > A']}\right) \\
&= C\overline{F}(x) \sum_{i=1}^{n_1} \int_0^t \mathsf{E}\left(\mathrm{e}^{-p\xi(s)} \mathbb{I}_{[\int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(u)}\mathrm{d}u > A']}\right) \mathsf{P}(\tau_i \in \mathrm{d}s) \\
&\quad\quad + C\overline{F}(x) \sum_{i=1}^{n_1} \mathsf{P}\left(\tau_i \leqslant t\right) \mathsf{P}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\xi(s)}\mathrm{d}s > A'\right) \\
&\leqslant C\overline{F}(x) \sum_{i=1}^{n_1} \int_0^t \left(\mathsf{E}\mathrm{e}^{-\kappa\xi(s)}\right)^{p/\kappa} \left(\mathsf{P}\left(\int_0^t e^{-\xi(s)}\mathrm{d}s > A'\right)\right)^{1-p/\kappa} \mathsf{P}(\tau_i \in \mathrm{d}s) \\
&\quad\quad + C\varepsilon\overline{F}(x) \sum_{i=1}^{n_1} \int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)} \mathsf{P}(\tau_i \in \mathrm{d}s) \\
&\leqslant C\varepsilon\overline{F}(x) \int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)} \sum_{i=1}^{n_1} \mathsf{P}(\tau_i \in \mathrm{d}s) \leqslant C\varepsilon\overline{F}(x) \int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}\lambda(\mathrm{d}s)
\end{aligned}
$$

对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立. 故 $\Psi(x,t) \geqslant (1+C\varepsilon)\overline{F}(x)\int_0^t \mathsf{E}\mathrm{e}^{-\alpha\xi(s)}\lambda(\mathrm{d}s)$ 对 $t\in\Lambda_T$ 一致成立. 综上, 定理 1 得证. $\square$

参考文献

[1] CHEN Y, YANG Y, JIANG T. Uniform asymptotics for finite-time ruin probability of a bidimensional risk model [J]. *J Math Anal Appl*, 2019, **469(2)**: 525–536.

[2] CHENG D Y, Yu C J. Uniform asymptotics for the ruin probabilities in a bidimensional renewal risk model with strongly subexponential claims [J]. *Stochastics*, 2019, **91(5)**: 643–656.

[3] FU K A, NG C Y A. Uniform asymptotics for the ruin probabilities of a two-dimensional renewal risk model with dependent claims and risky investments [J]. *Statist Probabil Lett*, 2017, **125**: 227–235.

[4] GUO F L, WANG D C. Finite- and infinite-time ruin probabilities with general stochastic investment return processes and bivariate upper tail independent and heavy-tailed claims [J]. *Adv Appl Probab*, 2013, **45(1)**: 241–273.

[5] LI J Z. Uniform asymptotics for a multi-dimensional time-dependent risk model with multivariate regularly varying claims and stochastic return [J]. *Insur Math Econ*, 2016, **71**: 195–204.

[6] TANG Q H, YANG Y. Interplay of insurance and financial risks in a stochastic environment [J]. *Scandinavian Actua J*, 2019, **2019(5)**: 432–451.

[7] BINGHAM N H, GOLDIE C M, TEUGEL J L. *Regular Variation* [M]. London: Cambridge

University Press, 1987.

[8] HEYDE C C, WANG D C. Finite-time ruin probability with an exponential Lévy process investment return and heavy-tailed claims [J]. *Adv Appl Probab*, 2009, **41(1)**: 206–224.

[9] WILLEKENS E. On the supremum of an infinitely divisible process [J]. *Stochastic Process Appl*, 1987, **26**: 173–175.

[10] GUO F L, WANG D C, YANG H L. Asymptotic results for ruin probability in a two-dimensional risk model with stochastic investment returns [J]. *J Comput Appl Math*, 2017, **325**: 198–221.

[11] SHREVE S E. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models* [M]. New York: Springer, 2004.

[12] TANG Q H, WANG G J, YUEN K C. Uniform tail asymptotics for the stochastic present value of aggregate claims in the renewal risk model [J]. *Insur Math Econ*, 2010, **46(2)**: 362–370.

Uniform Asymptotic Estimate for the Finite-Time Ruin Probability in a Risk Model with Stochastic Investment Returns

CHENG Ming　　WANG Dingcheng

School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, 611731, China

Abstract: This paper establishes a risk model for an insurer with càdlàg investment returns and heavy-tailed claim sizes which are bivariate upper tail independent. On one hand, we propose condition (6), under which a uniform asymptotic estimate of the finite-time ruin probability in the risk model is obtained. On the other hand, considering the universality of condition (6), we find that the condition (6) can be easily verified by some important stochastic processes, such as the Lévy process, Vasicek model, Cox-Ingersoll-Ross (CIR) model, and Heston model.

Keywords: asymptotics; uniform; stochastic return; ruin probability; risk model

2020 Mathematics Subject Classification: 62P05