

混合指数跳扩散模型下交换期权定价

宋瑞丽 卢义陈*

南京财经大学应用数学学院, 南京, 210023

摘要: 本文主要研究了在随机利率、随机波动率以及服从混合指数跳扩散模型下交换期权的定价问题. 考虑到近几年市场上出现了负利率的情况, 本文假设随机利率服从 Hull-White(HW) 模型, 并在 Heston 波动率模型的基础上加入了混合指数跳, 建立了混合指数跳扩散的 Heston-HW(简记为 MEJ-Heston-HW) 模型. 首先, 采用测度变换的思路, 通过傅里叶变换的方法推导出了交换期权的定价公式; 然后, 基于快速傅里叶算法得到了期权价值的数值解; 最后, 着重分析了随机波动率中的波动项、相关系数及跳跃强度对期权价值的影响. 在数值模拟中, 本文 MEJ-Heston-HW 模型与双指数跳 Heston-HW(简记为 DEJ-Heston-HW) 模型及 Black-Scholes 模型相比, 本文的模型能更好地刻画金融资产价格的变动, 因此本文得到的 MEJ-Heston-HW 模型下交换期权定价公式更符合金融市场规律, 所得结果推广了已有的关于交换期权定价的相关结论.

关键词: 交换期权; 混合指数跳扩散; H-W 随机利率; 快速傅里叶算法

中图分类号: O211.6

英文引用格式: SONG R L, LU Y C. Exchange option pricing under the hybrid exponential jump diffusion model [J]. *Chinese J Appl Probab Statist*, 2025: 1–16. (in Chinese)

1 引言

交换期权是一种奇异期权, 是指期权持有人在到期日 T 时有权以一种资产交换另一种资产. 交换期权的底层标的是互换合约, 通常是利率互换、货币互换或其他商品互换. 交换期权的买方可以通过支付期权费, 获得未来以一个固定的利率、汇率或价格进行互换的权利, 而不用承担互换合约的义务. Black 和 Scholes^[1] 开创性地推导出了欧式期权的定价公式, 为期权定价问题奠定了研究的范式基础. Margrabe^[2] 首先在 Black-Scholes 模型(以下简称 BS 模型) 下推导出了交换期权的定价公式, 旨在对冲两种资产相对于彼此的波动风险, 这种选择对各种常见的金融计划具有重要影响, 但在 BS 模型下考虑的风险资产价格服从几何布朗运动, 其中波动项与漂移项均为常数. 目前已有许多学者发现金融资产的价格具有“尖峰厚尾”^[3] 的现象, 为了更好的刻画这些特征, 许多学者在几何布朗运动模型的基础上改变几何布朗运动中的利率与波动率为常数的假设, 并且添加了跳过程, 以此来更好的刻画资产本身的特征. Heston^[4] 假设波动率符合随机微分方程, 在单因素随机波动率模型下得到了欧式期权的封闭解, 此文中的模型是目前大多数学者们使用的经典 Heston 波动率模型, 并且在这个经典模型的基础上, 学者们做出了许多的改进, 如 Fonseca

* 通讯作者, E-mail: 1214478820@qq.com.

本文 2024 年 2 月 4 日收到, 2024 年 3 月 28 日收到修改稿, 2024 年 6 月 20 日录用.

等^[5] 将 Heston 模型扩展为多因素波动模型, 并证明了多因素波动扩展后的适用性, He 和 Zhu^[6] 在 Heston 波动率模型中的波动率服从马尔科夫链的混合模型下得到了欧式期权定价的解析公式. 除了波动率外, 随机利率也是一个非常重要的风险项, 最简单亦是最常用的利率模型是 Vasicek^[7] 模型, Vasicek 模型的参数都为常数, 为了使随机利率更加符合市场规律, John 和 Alan^[8] 提出了参数为函数, 利率可能为负的 Hull-White 模型. Cox 等^[9] 用均值回归的平方根过程对利率建模, 提出了具有非负性的 CIR 利率模型. 考虑到近几年某些地区出现了利率为负的情况^[3], 本文采用 HW 模型描述实际的利率情况.

同时, 在期权定价模型中添加跳扩散模型来描绘金融资产价格的跳跃情况, 也是当前的研究趋势之一. 跳扩散模型最早由 Merton^[9] 将跳过程引入期权定价, 采用复合泊松过程来模拟股票价格的不连续变化. 在 Merton 的基础上, Kou^[10] 提出了双指数跳跃-扩散模型. 之后 Cai 和 Kou^[11] 在 DEJ 模型的基础上提出了混合指数跳扩散模型, 混合指数跳扩散模型能够近似绝大多数常见的分布. 借鉴他们的思想, 本文采用 MEJ 模型, 以此能够更好地刻画金融资产的变化. 在目前的模型求解上, 将模型中的常数参数假设改变为随机项能够更加符合实际中金融资产的特征, 但同时也会使得模型更加的复杂, 从而导致模型的解析解几乎是不存在的^[12], 因此要借助数值方法来计算. 目前最常用的数值方法有蒙特卡罗方法与有限差分法, 但蒙特卡罗方法运算工作量过大, 为了得到想要的精度甚至需要进行上万次的数值模拟运算, 而有限差分法很难处理模型中所含有的跳扩散项. 为了解决这些问题, 本文借鉴了 Carr 等^[13] 的思想, 采用快速傅里叶算法 (以下简称 FFT 算法), 能够有效处理模型中跳扩散项产生在偏微分方程中的积分项, 还能够更加快速有效地模拟出想要的精度的结果. 王宇帆^[14] 在双指数跳模型下研究了交换期权的定价, Ma 等^[15] 将 Hawkes 跳扩散模型引入到交换期权的模型中推导出解析定价公式, Puneet 和 Anubha^[16] 在随机波动率框架下通过 Duffie 等^[17] 的仿射结构解思想推导出了欧式交换期权的定价公式, Cheang 和 Garces^[18] 在随机波动率跳扩散模型下推导出欧式交换期权的定价公式.

对交换期权的研究, 大多是基于 DEJ 模型或仅考虑随机波动率或随机利率的模型上, 无法较好地刻画真实的金融市场, 本文考虑到关于交换期权定价的文献还未涉及到服从含混合指数跳、随机波动率与随机利率模型下交换期权的定价问题的研究. 由于新冠疫情的影响, 在一些国家和地区出现了利率为负的情况, 因此在 MEJ-Heston-HW 模型下研究交换期权的定价问题十分必要.

综上, 本文研究了 MEJ-Heston-HW 模型下交换期权的定价问题, 采用傅里叶变换的方法, 得到交换期权的定价公式, 再将本文模型下的交换期权价格与以往模型进行比较, 最后通过数值分析研究了随机波动率的波动项、相关系数及跳跃强度在本文模型下对交换期权价格的影响. 与文献 [14] 相比, 本文将双指数跳扩散模型下交换期权的定价问题的研究推广至混合指数跳扩散模型下交换期权的定价问题的研究; 混合指数跳扩散模型为双指数跳扩散模型的扩展, 在模型优势上, 混合指数跳的权重可以为负, 并且可以近似任何分布与 Merton^[9] 的正态跳扩散模型, 这些都是双指数跳扩散模型所不具备的. 与文献 [3] 相比,

本文将 MEJ-Heston-HW 模型下欧式期权定价问题的研究推广至交换期权定价问题的研究. 与文献 [18] 相比, 文献 [18] 研究了在随机波动率正态跳扩散模型下交换期权的定价公式, 本文将模型推广至含混合指数跳扩散、随机利率与随机波动率模型下交换期权定价公式的研究. 本文所得的结果推广了已有的关于交换期权定价的相关结论, 最后通过数值分析的结果表明本文的结论具有一定的理论和实际意义.

2 模型假设

给定一个完备的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, Q)$, 其中 $\mathcal{F}_t$ 为 σ -代数流, Q 为风险中性概率测度, 在此概率空间中本文所有的随机过程都是可测过程.

假设利率模型满足以下的 HW 利率模型

$$dr(t) = k_r(\theta_r - r(t))dt + \sigma_r dB_r(t), \quad (1)$$

其中 k_r 为拉力速度, θ_r 为长期均值, k_r, θ_r 均为常数.

假设两标的资产的跳扩散过程满足

$$dS_i(t) = S_i(t)(r(t) - \lambda_i h_i)dt + S_i(t)\sqrt{v_i(t)}dB_i(t) + S_i(t)(j_i - 1)dN_i(t), i = 1, 2, \quad (2)$$

其中 $\{B_i(t), t \geq 0\}$ 代表标准布朗运动, $\{N_i(t), t \geq 0\}$ 代表强度为 λ_i 的泊松过程, $v_i(t)$ 为随机波动率, $h_i = E(j_i - 1)$, 其中 j_i 为标的资产的跳跃幅度, 并且 $B_i(t), N_i(t)$ 都是相互独立的 ($i = 1, 2$).

根据 Itô 引理^[19] 及定理 8.33^[20] 可知 (2) 式可改写为

$$x_i(T) = x_i(t) + \int_t^T (r(s) - \lambda_i h_i - \frac{v_i(s)}{2})ds + \int_t^T \sqrt{v_i(s)}dB_i(s) + \sum_{i=1}^{N_{T-t}} \ln j_i, i = 1, 2, \quad (3)$$

其中 $x_i(T) = \ln S_i(T), x_i(t) = \ln S_i(t)$, 并且假设 $Z = \ln j_1, \hat{Z} = \ln j_2$ 为服从混合指数分布且相互独立的随机变量, 概率密度分别为

$$\begin{cases} f_Z(z) = p_{u_1} \sum_{k_1=1}^m p_{k_1} \eta_{k_1} e^{-\eta_{k_1} z} I_{\{z \geq 0\}} + q_{d_1} \sum_{k_2=1}^n q_{k_2} \theta_{k_2} e^{-\theta_{k_2} z} I_{\{z < 0\}}, \\ f_{\hat{Z}}(\hat{z}) = p_{u_2} \sum_{k_3=1}^m p_{k_3} \eta_{k_3} e^{-\eta_{k_3} \hat{z}} I_{\{\hat{z} \geq 0\}} + q_{d_2} \sum_{k_4=1}^n q_{k_4} \theta_{k_4} e^{-\theta_{k_4} \hat{z}} I_{\{\hat{z} < 0\}}. \end{cases} \quad (4)$$

这里为 m 个正半轴的指数分布与 n 个负半轴的指数分布的混合分布, 其中正跳的概率 $p_{u_i} \geq 0$, 负跳的概率 $q_{d_i} \geq 0$, $p_{u_i} + q_{d_i} = 1, i = 1, 2$. $p_{k_1}, q_{k_2}, p_{k_3}, q_{k_4} \in (-\infty, +\infty)$ 为混合指数中各个指数权重比率, 满足 $\sum_{k_1=1}^m p_{k_1} = \sum_{k_2=1}^n q_{k_2} = \sum_{k_3=1}^m p_{k_3} = \sum_{k_4=1}^n q_{k_4} = 1$.

$\eta_{k_1}, \theta_{k_2}, \eta_{k_3}, \theta_{k_4}$ 为各指数分布的参数, 并且满足以下约束条件

$$\begin{cases} \sum_{k_1=1}^{U_1} p_{k_1} \eta_{k_1} \geq 0, \forall U_1 = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{k_2=1}^{U_2} q_{k_2} \theta_{k_2} \geq 0, \forall U_2 = 1, 2, \dots, n, \\ \eta_{k_1} > 1, \forall k_1 = 1, 2, \dots, m, \\ \theta_{k_2} > 0, \forall k_2 = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{k_3=1}^{U_1} p_{k_3} \eta_{k_3} \geq 0, \forall U_1 = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{k_4=1}^{U_2} q_{k_4} \theta_{k_4} \geq 0, \forall U_2 = 1, 2, \dots, n, \\ \eta_{k_3} > 1, \forall k_3 = 1, 2, \dots, m, \\ \theta_{k_4} > 0, \forall k_4 = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

通过期望计算公式可以得到

$$\begin{cases} h_1 = E(j_1 - 1) = E(e^Z - 1) = p_{u_1} \sum_{k_1=1}^m \frac{p_{k_1} \eta_{k_1}}{\eta_{k_1} - 1} + q_{d_1} \sum_{k_2=1}^n \frac{q_{k_2} \theta_{k_2}}{\theta_{k_2} + 1} - 1, \\ h_2 = E(j_2 - 1) = E(e^{\hat{Z}} - 1) = p_{u_2} \sum_{k_3=1}^m \frac{p_{k_3} \eta_{k_3}}{\eta_{k_3} - 1} + q_{d_2} \sum_{k_4=1}^n \frac{q_{k_4} \theta_{k_4}}{\theta_{k_4} + 1} - 1. \end{cases} \quad (6)$$

由 (1)-(6) 式, 我们得到了本文的 MEJ-Heston-HW 模型为

$$\begin{cases} dS_i(t) = S_i(t) (r(t) - \lambda_i h_i) dt + S_i(t) \sqrt{v_i(t)} dB_i(t) + S_i(t) (j_i - 1) dN_i(t), \\ dr(t) = k_r (\theta_r - r(t)) dt + \sigma_r dB_r(t), \\ dv_i(t) = \alpha_i (\beta_i - v_i(t)) dt + \sigma_i \sqrt{v_i(t)} dB_i^v(t). \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\{B_i(t), t \geq 0\}, \{B_r(t), t \geq 0\}, \{B_i^v(t), t \geq 0\}$ 都为标准布朗运动, 并有 $dB_i(t)dB_r(t) = 0, dB_i(t)dB_i^v(t) = \rho_i, dN_i(t)dN_i(t) = 0$, 当 $i \neq j$ 时, $dB_i(t)dB_j^v(t) = 0, dB_i(t)dB_j(t) = 0, dN_i(t)dN_j(t) = 0, i = 1, 2, j = 1, 2$.

3 MEJ-Heston-HW 模型下交换期权的定价公式

在风险中性测度 Q 下交换期权的鞅定价公式为

$$C_t = E^Q \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} (S_1(T) - S_2(T))^+ \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (8)$$

现将到期支付为 1 的零息债券 $P(r, t; T)$ 作为计价单位, 通过 Radon-Nikodym 导数^[20] 可得

$$\frac{dQ^f}{dQ} = \frac{e^{-\int_0^T r(s) ds}}{P(r, 0; T)}.$$

此时将风险中性测度 Q 变换到远期测度 Q^f 下, 此时在 Q^f 测度下以零息债券为计价单位的期权价格就是一个鞅, 通过 (8) 式得到 Q^f 测度下的定价公式为

$$C_t = P(r, t; T) E^{Q^f} [(S_1(T) - S_2(T))^+ | \mathcal{F}_t]. \quad (9)$$

由于利率是不可交换资产, 因此在风险管理和衍生产品定价的研究中, 作为利率的载体——零息债券, 在随机利率的研究中起着独特的作用, 可以将零息债券看作随机利率的衍生品, 所以在风险中性测度下零息债券 $e^{-\int_0^t r(s) ds} P(r, t; T)$ 为一个鞅.

定理 1 若利率满足 (7) 式中的随机微分方程, 则零息债券 $P(r, t; T)$ 唯一的仿射结构解如下:

$$P(r, t; T) = e^{A(t)+B(t)r}, \quad (10)$$

其中

$$\begin{cases} A(t) = -\frac{\sigma_r^2}{4k_r} [e^{-2k_r(T-t)} - 1] + \frac{\sigma_r^2 - k_r^2 \theta_t}{k_r^3} [e^{-k_r(T-t)} - 1] + \left(\frac{\sigma_r^2 - 2k_r^2 \theta_t}{2k_r^2} \right) (T - t), \\ B(t) = \frac{e^{-k_r(T-t)} - 1}{k_r}. \end{cases} \quad (11)$$

证明: 根据 Itô 引理, 可知 $e^{-\int_0^t r(s) ds} P(r, t; T)$ 的微分形式为

$$\begin{aligned} & d e^{-\int_0^t r(s) ds} P \\ &= P d e^{-\int_0^t r(s) ds} + e^{-\int_0^t r(s) ds} d P \\ &= e^{-\int_0^t r(s) ds} \left[\frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} (dr)^2 \right] - e^{-\int_0^t r(s) ds} Pr dt \\ &= e^{-\int_0^t r(s) ds} \left[\frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial r} [k_r (\theta_r - r) dt + \sigma_r dB_r(t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \sigma_r^2 dt - Pr dt \right] \\ &= e^{-\int_0^t r(s) ds} \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r} k_r (\theta_r - r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \sigma_r^2 - Pr \right] dt + e^{-\int_0^t r(s) ds} \frac{\partial P}{\partial r} \sigma_r dB_r(t). \end{aligned} \quad (12)$$

由鞅的性质, $e^{-\int_0^t r(s) ds} P(r, t; T)$ 微分形式中的漂移项为 0, 因此得到零息债券的 PDE 方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r} k_r (\theta_r - r) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \sigma_r^2 - Pr = 0, \\ P(r, t; T) = 1. \end{cases} \quad (13)$$

根据 Duffie 的仿射结构解思想, 将零息债券的仿射结构解 (10) 式代入 (13) 式得到 ODE 方程

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} + B k_r \theta_r + \frac{1}{2} B^2 \sigma_r^2 = 0, \\ \frac{dB}{dt} - k_r B - 1 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

根据 $P(r, T; T) = 1$, 可知终值条件 $A(T) = B(T) = 0$, 代入并求解 (14) 式, 得 (11) 式. 将 (11) 式代入 (10) 式, 定理 1 结论成立, 证毕. $\square$

定理 2 若金融市场满足 (7) 式中的模型假设, 则交换期权在 $t \in [0, T]$ 时刻的价格 C_t 为

$$C_t = \frac{e^{-\eta k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivk} h(v) dv = \frac{e^{-\eta k}}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ivk} h(v) dv, \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} h(v) &= P(r, t; T) \frac{H((v - i(\eta + 1)), (-v + i\eta); x_1^c, x_2^c, v_1, v_2, r, t)}{(iv + \eta)(iv + \eta + 1)}, i^2 = -1, \\ H(u_1, u_2; x_1^c, x_2^c, v_1, v_2, r, t) &= \frac{\varphi_1(u_1, u_2; x_1^c, x_2^c, v_1, v_2, r, t) \varphi_2(u_1) \varphi_3(u_2)}{P(r, t; T)}, \\ \varphi_1(u_1, u_2; x_1^c, x_2^c, v_1, v_2, r, t) &= e^{(C(u_1, u_2, t) + D_1(u_1, u_2, t)v_1 + \hat{D}(u_1, u_2, t)v_2 + E(u_1, u_2, t)r + iu_1x_1^c + iu_2x_2^c)}, \\ \varphi_2(u_1) &= e^{\lambda_1(T-t) \left(p_{u_1} \sum_{k_1=1}^m \frac{pk_1 \eta_{k_1}}{\eta_{k_1} - iu_1} + q_{d_1} \sum_{k_2=1}^n \frac{qk_2 \theta_{k_2}}{\theta_{k_2} + iu_1} - 1 \right)}, \\ \varphi_3(u_2) &= e^{\lambda_2(T-t) \left(p_{u_2} \sum_{k_3=1}^m \frac{pk_3 \eta_{k_3}}{\eta_{k_3} - iu_2} + q_{d_2} \sum_{k_4=1}^n \frac{qk_4 \theta_{k_4}}{\theta_{k_4} + iu_2} - 1 \right)}, \\ C(u_1, u_2, t) &= - \sum_{i=1}^2 iu_i \lambda_i h_i(T-t) - \left[l_1(T-t) - \frac{l_1}{k} (e^{-k_r(T-t)} - 1) \right] \\ &\quad + l_2 \left[(T-t) - \frac{1}{2k_r} (e^{-2k_r(T-t)} - 1) + \frac{2}{k_r} (e^{-k_r(T-t)} - 1) \right] \\ &\quad + \frac{\alpha_1 \beta_1 l_3}{m} \left(\ln \left(\frac{c_1}{e^{-m(T-t)} + c_1} \right) + \frac{1}{c_1} \ln \left(\frac{(c_1 + 1) e^{-m(T-t)}}{e^{-m(T-t)} + c_1} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\alpha_2 \beta_2 l_4}{n} \left(\ln \left(\frac{c_2}{e^{-n(T-t)} + c_2} \right) + \frac{1}{c_2} \ln \left(\frac{(c_2 + 1) e^{-n(T-t)}}{e^{-n(T-t)} + c_2} \right) \right), \\ D(u_1, u_2, t) &= \frac{[m - (\sigma_1 \rho_1 iu_1 - \alpha_1)] [e^{-m(T-t)} - 1]}{\sigma_1^2 \left[(e^{-m(T-t)} - 1) + \frac{2m}{m + \sigma_1 \rho_1 iu_1 - \alpha_1} \right]}, \\ \hat{D}(u_1, u_2, t) &= \frac{[n - (\sigma_2 \rho_2 iu_2 - \alpha_2)] [e^{-n(T-t)} - 1]}{\sigma_2^2 \left[(e^{-n(T-t)} - 1) + \frac{2n}{n + \sigma_2 \rho_2 iu_2 - \alpha_2} \right]}, \\ E(u_1, u_2, t) &= \frac{(e^{-k_r(T-t)} - 1) (1 - i(u_1 + u_2))}{k_r}, \\ c_1 &= \frac{2m}{m + \sigma_1 \rho_1 iu_1 - \alpha_1} - 1, c_2 = \frac{2n}{n + \sigma_2 \rho_2 iu_2 - \alpha_2} - 1, \\ l_1 &= \theta_r (1 - i(u_1 + u_2)), l_2 = \frac{\sigma^2 [1 - i(u_1 + u_2)]^2}{2k_r^2}, \\ l_3 &= \frac{[m - (\sigma_1 \rho_1 iu_1 - \alpha_1)]}{\sigma_1^2}, l_4 = \frac{[n - (\sigma_2 \rho_2 iu_2 - \alpha_2)]}{\sigma_2^2}, \end{aligned}$$

$$m = \sqrt{(\sigma_1 \rho_1 i u_1 - \alpha_1)^2 + \sigma_1^2 (u_1^2 + i u_1)}, n = \sqrt{(\sigma_2 \rho_2 i u_2 - \alpha_2)^2 + \sigma_2^2 (u_2^2 + i u_2)}.$$

证明: 将 (3) 式代入 (9) 式, 得到远期测度下交换期权的鞅定价公式为

$$C_t = P(r, t; T) \mathbb{E}^{Q^f} \left[e^{x_2(T)} \left(e^{x_1(T) - x_2(T)} - 1 \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (16)$$

由于本文交换期权的定价公式中缺少常数变量, 因此无法使用傅里叶变换与逆变换, 本文所求的交换期权的定价公式为下式含常数变量 k 的鞅定价公式当 $k = 0$ 时的特例

$$C_t(k) = P(r, t; T) \mathbb{E}^{Q^f} \left[e^{x_2(T)} \left(e^{x_1(T) - x_2(T)} - e^k \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (17)$$

因此下文只要求出公式 (17) 式的定价公式, 并将 $k = 0$ 代入即可得到本文模型下交换期权的定价公式, 接着对 (17) 式进行 Fourier 变换, 为了使 (17) 式为平方可积, 对 (17) 式进行一个简单的处理, 将 C_t 乘上一个阻尼系数 $e^{\eta k}$ ($\eta > 0$), 得 $\hat{C}(k) = e^{\eta k} C_t(k)$, 并对 $\hat{C}(k)$ 进行傅里叶变换得到

$$\begin{aligned} h(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} e^{\eta k} P(r, t; T) \mathbb{E}^{Q^f} \left[e^{x_2(T)} \left(e^{x_1(T) - x_2(T)} - e^k \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] dk \\ &= P(r, t; T) \mathbb{E}^{Q^f} \left[\int_{-\infty}^{x_1(T) - x_2(T)} e^{ivk} e^{\eta k} e^{x_2(T)} \left(e^{x_1(T) - x_2(T)} - e^k \right) dk \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(r, t; T) \mathbb{E}^{Q^f} \left[\int_{-\infty}^{x_1(T) - x_2(T)} e^{(iv+\eta)k + x_1(T)} - e^{(iv+\eta+1)k + x_2(T)} dk \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(r, t; T) \frac{1}{(iv + \eta)(iv + \eta + 1)} \mathbb{E}^{Q^f} \left[e^{(iv+\eta+1)x_1(T) - (iv+\eta)x_2(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

为了求得 (18) 式, 需要求解对数价格 $x_1(T)$ 和 $x_2(T)$ 的特征函数, 即求解

$$\varphi(u_1, u_2; x_1, x_2, v_1, v_2, r, t) = \mathbb{E}^{Q^f} \left[e^{iu_1 x_1(T) + iu_2 x_2(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (19)$$

通过 Radon-Nikodym 导数将 (19) 式远期测度 Q_f 转化为风险中性测度 Q 得

$$\mathbb{E}^{Q^f} \left[e^{iu_1 x_1(T) + iu_2 x_2(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{1}{P(r, t; T)} \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} e^{iu_1 x_1(T) + iu_2 x_2(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (20)$$

为了处理方便, 将 (3) 式中的跳过程分离开, 设

$$x_1(T) + x_2(T) = x_1^c(T) + x_1^j(T) + x_2^c(T) + x_2^j(T), \quad (21)$$

其中跳跃部位为

$$x_1^j(T) = \sum_{n=1}^{N_{T-t}} Z_n, \quad x_2^j(T) = \sum_{n=1}^{N_{T-t}} \hat{Z}_n,$$

连续部分为

$$x_i^c(T) = x_i(t) + \int_t^T \left(r(s) - \lambda_i h_i - \frac{v_i(s)}{2} \right) ds + \int_t^T \sqrt{v_i(s)} dB_i(s), i = 1, 2,$$

接着将 (21) 式代入 (20) 式得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} e^{iu_1 x_1^c(T) + u_1 x_1^j(T) + iu_2 x_2^c(T) + iu_2 x_2^j(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} e^{iu_1 x_1^c(T) + iu_2 x_2^c(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \mathbb{E}^Q \left[e^{iu_1 x_1^j(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \mathbb{E}^Q \left[e^{iu_2 x_2^j(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \varphi_1(u_1, u_2; x_1^c, x_2^c, v_1, v_2, r, t) \varphi_2(u_1) \varphi_3(u_2). \end{aligned} \quad (22)$$

首先求解 (22) 式的前半部分, 要证 $e^{-\int_0^t r(s) ds} \varphi_1(u_1, u_2; x_1^c, x_2^c, v_1, v_2, r, t)$ 为鞅, 设 $0 \leq t_1 \leq t \leq T$, 得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_0^t r(s) ds} \varphi_1(u_1, u_2; x_1^c, x_2^c, v_1, v_2, r, t) \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\ &= \mathbb{E}^Q \left[\mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} e^{iu_1 x_1^c(T) + iu_2 x_2^c(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\ &= \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} e^{iu_1 x_1^c(T) + iu_2 x_2^c(T)} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\ &= e^{-\int_0^{t_1} r(s) ds} \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_{t_1}^T r(s) ds} e^{iu_1 x_1^c(T) + iu_2 x_2^c(T)} \middle| \mathcal{F}_{t_1} \right] \\ &= e^{-\int_0^{t_1} r(s) ds} \varphi_1(u_1, u_2; x_1^c, x_2^c, v_1, v_2, r, t_1). \end{aligned} \quad (23)$$

根据 Itô 引理, 可知 $e^{-\int_0^t r(s) ds} \varphi_1$ 的微分形式为

$$\begin{aligned} & d e^{-\int_0^t r(s) ds} \varphi_1 \\ &= e^{-\int_0^t r(s) ds} d\varphi_1 + \varphi_1 d e^{-\int_0^t r(s) ds} \\ &= e^{-\int_0^t r(s) ds} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i^c} \right) \left(r - \lambda_i h_i - \frac{v_i}{2} \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{v_i}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial (x_i^c)^2} \right. \\ &+ \sum_{i=1}^2 \rho_i \sigma_i v_i \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_i^c \partial v_i} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_i} [\alpha_i (\beta_i - v_i)] + \sum_{i=1}^2 \frac{\sigma_i^2 v_i}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v_i^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} [k_r (\theta_r - r)] \\ &+ \left. \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} dt - r \varphi_1 \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i^c} \sqrt{v_i} dB_i(t) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_i} \sigma_i dB_i^v(t) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \sigma_r dB_r(t). \end{aligned} \quad (24)$$

当 $t = T$ 时, $\varphi_1(u_1, u_2; x_1^c, x_2^c, v_1, v_2, r, T) = e^{iu_1 x_1^c(T) + iu_2 x_2^c(T)}$, 由鞅的性质可知 (24) 式的漂移项为 0, 所以得到 PDE

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i^c} \left(r - \lambda_i h_i - \frac{v_i}{2} \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{v_i}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial (x_i^c)^2} + \sum_{i=1}^2 \rho_i \sigma_i v_i \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_i^c \partial v_i} - r \varphi_1 \\ + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_i} [\alpha_i (\beta_i - v_i)] + \sum_{i=1}^2 \frac{\sigma_i^2 v_i}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v_i^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} [k_r (\theta_r - r)] + \frac{\sigma_r^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} = 0, \\ \varphi_1(u_1, u_2; x_1^c, x_2^c, v_1, v_2, r, T) = e^{iu_1 x_1^c(T) + iu_2 x_2^c(T)}. \end{cases} \quad (25)$$

根据 Duffie 的思想, 设仿射结构解的形式为

$$\varphi_1(u_1, u_2; x_1^c, x_2^c, v_1, v_2, r, t) = e^{C(u_1, u_2, t) + D(u_1, u_2, t)v_1 + \hat{D}(u_1, u_2, t)v_2 + E(u_1, u_2, t)r + iu_1 x_1^c + iu_2 x_2^c} \quad (26)$$

将 (26) 式的仿射结构解代入 (25) 式, 可以得到以下 ODE

$$\begin{cases} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{(iu_1)^2 - (iu_1)}{2} - D\alpha_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 D^2 + \rho_1 \sigma_1 (iu_1) D = 0, \\ \frac{\partial \hat{D}}{\partial t} + \frac{(iu_2)^2 - (iu_2)}{2} - \hat{D}\alpha_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \hat{D}^2 + \rho_2 \sigma_2 (iu_2) \hat{D} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 iu_i - k_r E - 1 = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 iu_i \lambda_i h_i + D\alpha_1 \beta_1 + \hat{D}\alpha_2 \beta_2 + E \theta_r k_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 E^2 = 0. \end{cases} \quad (27)$$

当 $t = T$ 时得终值条件, $C(u_1, u_2, T) = D(u_1, u_2, T) = \hat{D}(u_1, u_2, T) = E(u_1, u_2, T) = 0$ 此时求解得

$$\begin{cases} D(u_1, u_2, t) = \frac{[m - (\sigma_1 \rho_1 iu_1 - \alpha_1)] [e^{-m(T-t)} - 1]}{\sigma_1^2 \left[(e^{-m(T-t)} - 1) + \frac{2m}{m + \sigma_1 \rho_1 iu_1 - \alpha_1} \right]}, \\ \hat{D}(u_1, u_2, t) = \frac{[n - (\sigma_2 \rho_2 iu_2 - \alpha_2)] [e^{-n(T-t)} - 1]}{\sigma_2^2 \left[(e^{-n(T-t)} - 1) + \frac{2n}{n + \sigma_2 \rho_2 iu_2 - \alpha_2} \right]}, \\ E(u_1, u_2, t) = \frac{(e^{-k(T-t)} - 1)(1 - i(u_1 + u_2))}{k_r}, \end{cases} \quad (28)$$

其中 $m = \sqrt{(\sigma_1 \rho_1 iu_1 - \alpha_1)^2 + \sigma_1^2 (u_1^2 + iu_1)}$, $n = \sqrt{(\sigma_2 \rho_2 iu_2 - \alpha_2)^2 + \sigma_2^2 (u_2^2 + iu_2)}$.

将 (28) 式代入到 (27) 式得到

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, t) = & - \sum_{i=1}^2 iu_i \lambda_i h_i (T - t) - \left[l_1 (T - t) - \frac{l_1}{k_r} (e^{-k_r(T-t)} - 1) \right] \\ & + l_2 \left[(T - t) - \frac{1}{2k_r} (e^{-2k_r(T-t)} - 1) + \frac{2}{k} (e^{-k(T-t)} - 1) \right] \\ & + \frac{\alpha_1 \beta_1 l_3}{m} \left(\ln \left(\frac{c_1}{e^{-m(T-t)} + c_1} \right) + \frac{1}{c_1} \ln \left(\frac{(c_1 + 1) e^{-m(T-t)}}{e^{-m(T-t)} + c_1} \right) \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha_2 \beta_2 l_4}{n} \left(\ln \left(\frac{c_2}{e^{-n(T-t)} + c_2} \right) + \frac{1}{c_2} \ln \left(\frac{(c_2 + 1) e^{-n(T-t)}}{e^{-n(T-t)} + c_2} \right) \right) \quad (29)$$

下面求解跳过程的特征函数, 有

$$\begin{aligned} \varphi_2(u_1) &= \mathbf{E}^Q \left(e^{iu_1 \sum_{n=1}^{N_{T-t}} Z_n} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{\lambda_1(T-t) [\mathbf{E}^Q(e^{iuZ}) - 1]} \\ &= e^{\lambda_1(T-t) \left(p_{u_1} \sum_{k_1=1}^m \frac{p_{k_1} \eta_{k_1}}{\eta_{k_1} - iu_1} + q_{d_1} \sum_{k_2=1}^n \frac{q_{k_2} \theta_{k_2}}{\theta_{k_2} + iu_1} - 1 \right)}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(u_2) &= \mathbf{E}^Q \left(e^{iu_2 \sum_{n=1}^{N_{T-t}} \hat{Z}_n} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{\lambda_2(T-t) [\mathbf{E}^Q(e^{iu\hat{Z}}) - 1]} \\ &= e^{\lambda_2(T-t) \left(p_{u_2} \sum_{k_3=1}^m \frac{p_{k_3} \eta_{k_3}}{\eta_{k_3} - iu_2} + q_{d_2} \sum_{k_4=1}^n \frac{q_{k_4} \theta_{k_4}}{\theta_{k_4} + iu_2} - 1 \right)}. \end{aligned} \quad (31)$$

此时将 (22), (26), (28), (29), (30), (31) 式代入到 (20) 式可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{Q^f} \left[e^{iu_1 x_1(T) + iu_2 x_2(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= \frac{1}{P(r, t; T)} \mathbf{E}^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} e^{iu_1 x_1(T) + iu_2 x_2(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{\varphi_1(u_1, u_2; x_1^c, x_2^c, v_1, v_2, r, t) \varphi_2(u_1) \varphi_3(u_2)}{P(r, t; T)}, \end{aligned} \quad (32)$$

将 (32) 式代入 (18) 式可得

$$h(v) = P(r, t; T) \frac{H((v - i(\eta + 1)), (-v + i\eta); x_1^c, x_2^c, v_1, v_2, r, t)}{(iv + \eta)(iv + \eta + 1)},$$

又 $C_t = e^{-\eta k} \hat{C}(k)$, 所以傅里叶逆变换得到交换期权的定价公式为

$$C_t = \frac{e^{-\eta k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivk} h(v) dv = \frac{e^{-\eta k}}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ivk} h(v) dv.$$

此即为 (15) 式, 定理 2 成立, 证毕. $\square$

4 FFT 算法的定价公式

根据 Carr 等^[13] 的思想可知 FFT 算法是计算以下公式的有效算法

$$w(k) = \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)} x(j), k = 1, \dots, N. \quad (33)$$

此时将 (15) 式转化为适合 FFT 算法计算的形式, 设

$$v_j = \xi(j-1), j = 1, \dots, N,$$

其中 $\xi(\xi > 0)$ 为 v_j 的离散步长.

将 v_j 代入 (15), 通过梯形法得到

$$C_t(k) = \frac{e^{-\eta k}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-iv_j k} h(v_j) \xi, \quad (34)$$

此时将 k 分割成 N 个间隔大小为 ω 的区间, FFT 会根据 N 个不同的敲定价得到不同的期权价格, 并令 k 的取值范围为 $[-b, b]$, 则 $k_l = -b + \omega(l-1), l = 1, \dots, N$, 此时 $b = \frac{N\omega}{\pi}$, 将 k_l 代入 (34) 式得

$$C_t(k_l) \approx \frac{e^{-\eta k_l}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-iv_j(-b+\omega(l-1))} h(v_j) \xi \quad (35)$$

接着将 v_j 代入 (35) 式得

$$C_t(k_l) = \frac{e^{-\eta k_l}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\xi\omega(l-1)(j-1)} e^{ibv_j} h(v_j) \xi, \quad (36)$$

为了更加准确的计算结果, 通过 Simpson 法则对 v_j 的离散步长进行修正, 得到期权价格为

$$C_t(k_l) = \frac{e^{-\eta k_l}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\xi\omega(l-1)(j-1)} e^{ibv_j} h(v_j) \frac{\xi}{3} (3 + (-1)^j - \delta_{j-1}), \quad (37)$$

其中 δ_{j-1} 为 Kronecker 函数.

将 $k_l=0$ 代入 (37), 得到数值解为:

$$C_t = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-\frac{2\pi i}{N}(l-1)(j-1)} e^{ibv_j} h(v_j) \frac{\xi}{3} (3 + (-1)^j - \delta_{j-1}). \quad (38)$$

5 数值模拟

本节数值分析提出了各种模型参数对期权价格的影响, 对于基本参数的假设如下:

假设 1 $m = n = 2, r = 0.05, k_r = 1.2, \theta_r = 0.05, \sigma_r = 0.01, \sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.15, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.5, v_1 = 0.2, v_2 = 0.25, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = \eta = 3, \lambda_1 = \lambda_2 = 2, p_{u_1} = 0.4, q_{d_1} = 0.6, p_{k_1} = q_{k_2} = 0.55, p_{u_2} = p_{k_3} = q_{k_4} = 0.6, q_{d_2} = 0.4, \eta_{k_1} = 30, \eta_{k_3} = 20, \theta_{k_2} = 15, \theta_{k_4} = 10, \rho_1 = \rho_2 = -0.6, S_1 = S_2 = 10, T = 1, t = 0,$

对于快速傅里叶算法本文取 $N = 2048$, 离散步长取 $\xi = \frac{600}{N}$, 并在分析某个参数时其他参数保持不变.

首先, 将本文模型下的交换期权价格与 BS 模型和双指数跳扩散模型下的交换期权价格进行比较. BS 模型中, 标的资产的两个波动率与两个标准布朗运动的相关系数都设为 0.5, DEJ-Heston-HW 模型中, 双指数跳扩散项的指数参数都设为 5, 运用 MATLAB 绘制出随时间 T 变化的交换期权价格走势图, 如图 1 所示. 可以看出, 本文采用的 MEJ-Heston-HW 模型与 DEJ-Heston-HW 模型的价格在前半段几乎重合, 但随着时间的增加, DEJ-Heston-HW 模型的价格及其价格增长率均低于本文模型, 并且这两个模型的价格较 BS 模型的价格都偏高, 因此随机利率、随机波动率及服从混合指数跳扩散的 MEJ-Heston-HW 模型会导致期权价格大幅上涨. MEJ-Heston-HW 模型中的混合指数跳扩散含指数权重比例较 DEJ-Heston-HW 模型中的双指数跳扩散的随机性更强, 对应于股票价格的变化水平意味着看涨期权的发行人需要更高的风险成本来购买股票. 因此, 对交换期权价格的影响在到期时间 T 较大时变得更加明显, 导致卖方会期望更高的溢价来补偿价格的变动风险.

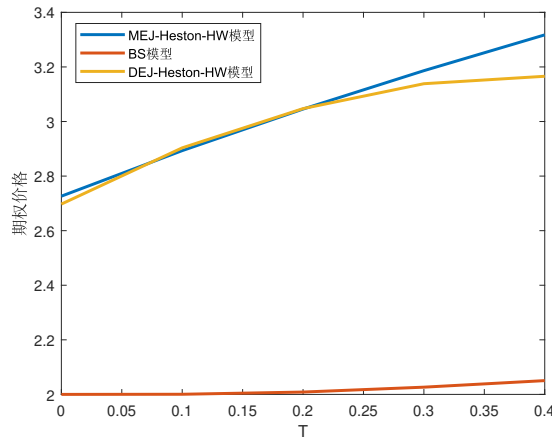


图 1 本文模型与 B-S 模型和 DEJ-Heston-HW 模型下交换期权价格对比

图 2 给出了交换期权价格与随机波动之间的关系. 从图 2(a) 中可以看出交换期权的价格与两个资产的波动率都呈负相关. 图 2(b) 图 2(c) 中可知更长的到期时间意味着合同

中的时间价值更高, 从而导致更高的保费, 因此交换期权的价格也会随之增高.

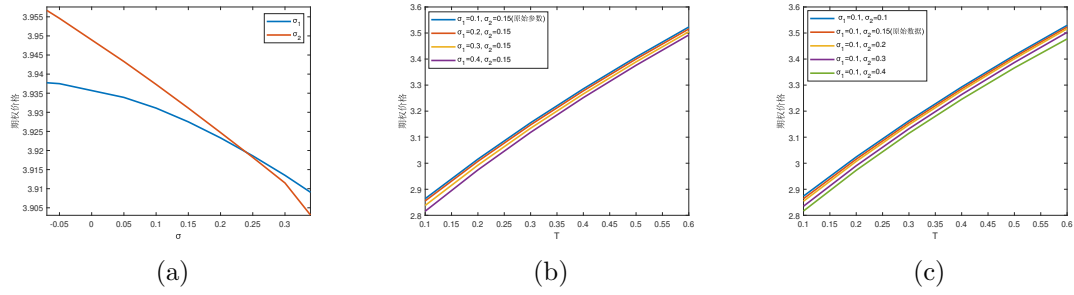


图 2 本文模型下交换期权价格与波动率 σ_1, σ_2 的关系

图 3 中给出了交换期权价格与相关系数之间的关系, 通过图 3 可以观察到相关系数 ρ_1 对期权价格有积极的影响, 而价格对于相关系数 ρ_2 是稳健的. 图 4 给出了跳跃强度对交换期权的价格的影响, 从图 4 可以看出第一个资产跳跃强度与期权价格的相关性较第二个标的资产跳跃强度的相关性高. 当跳跃强度增加时, 期权的价格上涨, 这是由于随着跳跃强度的增加, 标的资产的价格波动变大使得期权获利的机会更大, 从而导致期权价格的上升, 这种情况是合乎逻辑的. 由图 5、6 可以看出交换期权的价格随着到期时间的增加而增加, 交换期权的价格与跳跃强度呈正相关, 更高的跳跃强度导致更大的期权价格.

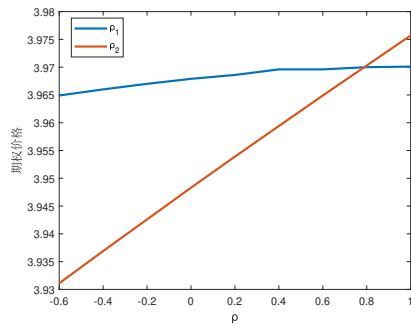


图 3 相关系数 ρ_1, ρ_2 对交换期权价格影响

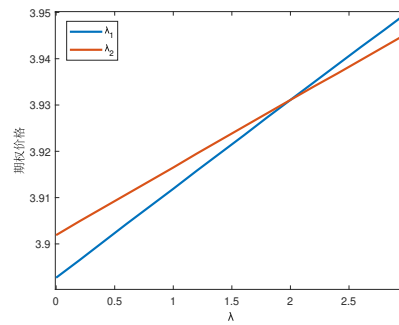


图 4 跳跃强度 λ_1, λ_2 对交换期权价格影响

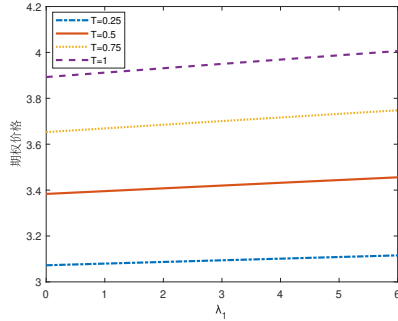


图 5 T 取不同值交换期权价格随 λ_1 变化

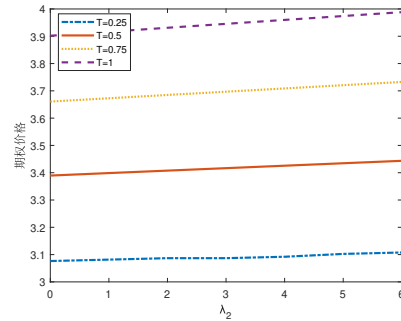


图 6 T 取不同值交换期权价格随 λ_2 变化

图 7 给出了交换期权价格与 MEJ-Heston-HW 模型跳扩散项中上跳概率 p_{u_1}, p_{u_2} 与指数参数 $\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \theta_{k_3}, \theta_{k_4}$ 的关系, 从图中可以观察到交换期权价格与上跳概率 p_{u_1}, p_{u_2} 呈现负相关. 交换期权价格随混合指数跳中指数参数 $\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \theta_{k_3}, \theta_{k_4}$ 的增大而减小. 由此, 投资者对交换期权进行交易时, 不但要关注平稳状态下系统性的风险, 还要关注因为突发事件导致的股价产生的跳风险, 这样才能进行有效的金融风险风险管理.

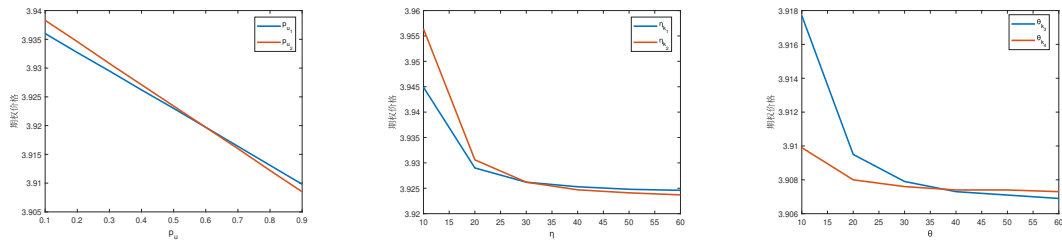


图 7 本文模型下交换期权价格与混合指数跳参数 $\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \theta_{k_3}, \theta_{k_4}$ 的关系

6 结论

本文研究了在 MEJ-Heston-HW 模型下的交换期权定价问题, 给出了服从本文模型下资产特征函数的计算方法, 利用傅里叶变换得到了 MEJ-Heston-HW 模型下交换期权的定价公式, 通过应用 FFT 算法来得到了交换期权的数值解, 通过数值模拟比较了 MEJ-Heston-HW 模型与 DEJ-Heston-HW 模型、BS 模型的交换期权价格, 研究讨论了 MEJ-Heston-HW 模型中参数 $\sigma_1, \sigma_2, \rho_1, \rho_2, \lambda_1, \lambda_2, \eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \theta_{k_3}, \theta_{k_4}$ 对交期权价格的影响. 结果显示, 这些参数对期权定价具有重要影响, 并且符合实际金融市场的规律.

参考文献

- [1] BLACK F, SCHOLES M S. The pricing of options and corporate liabilities [J]. *J Polit Econ*, 1973, 81(3): 637-654.
- [2] MARGRABE W. The value of an option to exchange one asset for another [J]. *The Journal of Finance*,

- 1978, **33**(1): 177–186.
- [3] 吴胤昊, 陈荣达, 汪圣楠, 等. 随机利率随机波动率混合指数跳扩散模型下的期权定价 [J]. 系统科学与数学, 2022, **42**(08): 2207–2234.
- [4] HESTON S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options [J]. *Rev Financ Stud*, 1993, **6**(2): 327–343.
- [5] FONSECA J D, GRASSELLI M, TEBALDI C. A multifactor volatility Heston model [J]. *Quant Financ*, 2008, **8**(6): 591–604.
- [6] HE X J, ZHU S P. An analytical approximation formula for European option pricing under a new stochastic volatility model with regime-switching [J]. *J Econ Dynam Control*, 2016, **71**(1): 77–85.
- [7] VASICEK O. An equilibrium characterization of the term structure [J]. *J Financ Econ*, 1977, **5**(2): 177–188.
- [8] JOHN H, ALAN W. Pricing interest-rate-derivative securities [J]. *Rev Financ Stud*, 1990, **3**(4): 573–592.
- [9] MERTON R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous [J]. *J Financ Econ*, 1976, **3**(1-2): 125–144.
- [10] KOU S G. A jump-diffusion model for option pricing [J]. *Manage Sci*, 2002, **48**(8): 1086–1101.
- [11] CAI N, KOU S G. Option pricing under a mixed-exponential jump diffusion model [J]. *Manage Sci*, 2011, **57**(11): 2067–2081.
- [12] 史言. 随机利率混合指数跳扩散模型下的期权定价 [J]. 数学的实践与认识, 2021, **51**(08): 87–97.
- [13] CARR P, STANLEY M, MADAN D B. Option valuation using the fast Fourier transform [J]. *J Comput Financ*, 2001, **2**(4): 61–73.
- [14] 王宇帆. 双指数跳扩散下的交换期权定价 [D]. 北京理工大学, 2016.
- [15] MA Y, PAN D T, WANG T Y. Exchange options under clustered jump dynamics [J]. *Quant Financ*, 2020, **20**(6): 949–967.
- [16] PUNEET P, ANUBHA G. A closed-form pricing formula for European exchange options with stochastic volatility [J]. *Probab Eng Inf Sci*, 2022, **36**(3): 606–615.
- [17] DUFFIE D, PAN J, SINGLETON K. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions [J]. *Econometrica*, 2000, **68**(6): 1343–1376.
- [18] CHEANG G, GARCES L P D M. Representation of exchange option prices under stochastic volatility jump-diffusion dynamics [J]. *Quant Financ*, 2020, **20**(2): 291–310.
- [19] KLEBANER F C. *Introduction To Stochastic Calculus With Applications (3rd Edition)* [M]. World Scientific Publishing Company, 2012.
- [20] SHREVE S E. *Stochastic Calculus for Finance II* [M]. Springer, 2004.

Exchange Option Pricing under the Hybrid Exponential Jump Diffusion Model

SONG Ruili LU Yichen

School of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing, 210023, China

Abstract: This paper deals with the pricing of exchange options under the stochastic interest rate, stochastic volatility and mixed exponential jump diffusion model. On the basis of Heston volatility model, random interest rate and mixed index jump diffusion are introduced, and considering the negative interest rate in the market in recent years, this paper assumes that the interest rate model satisfies the Hull-White process (H-W), and establishes the mixed index jump Heston-HW (MEJ-Heston-HW) model. By using the idea of measure transformation, deduced the pricing formula of exchange options by Fourier transform method. Finally, based on the fast Fourier algorithm, the numerical solution of option value is obtained, and the influences of fluctuation term, correlation coefficient and jump intensity in random volatility on option value are emphatically analyzed. Compared with the double exponential jump Heston-HW model (DEJ-Heston-HW) and Black-Scholes model, the MEJ-Heston-HW model can better describe the price changes of financial assets in numerical simulation. Therefore, the exchange option pricing formula under the MEJ-Heston-HW model is more consistent with the law of financial market, and the obtained results extend the existing conclusions on exchange option pricing.

Keywords: exchange options; mixed exponential jump diffusion; H-W random interest rate; fast Fourier algorithm

2020 Mathematics Subject Classification: 62xxx