应用概率统计　第 36 卷
第 2 期　2020 年 4 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Apr., 2020, Vol. 36, No. 2, pp. 173-180
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2020.02.006

随机 Volterra 方程的中心极限定理

李　宇　勐

(中南财经政法大学统计与数学学院, 武汉, 430073)

摘　要: 在本文中, 我们研究一类随机 Volterra 方程, 它包含了分数布朗运动驱动的随机微分方程等模型. 我们利用 Itô (1979) 建立的一个极大不等式, 在连续函数空间中关于一致收敛拓扑, 建立了中心极限定理.

关键词: 随机 Volterra 方程; 中心极限定理; 分数布朗运动

中图分类号: O211.6

英文引用格式: LI Y M. Central limit theorem for stochastic Volterra equation [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2020, 36(2): 173–180. (in Chinese)

§1. 引　言

考虑下面的随机 Volterra 方程

$$X_t^{\varepsilon}=x_0+\int_0^t f(t,s,X_s^{\varepsilon})\mathrm{d}s+\sqrt{\varepsilon}\int_0^t g(t,s,X_s^{\varepsilon})\mathrm{d}W_s, \tag{1}$$

其中 $x_0\in\mathbb{R}$, $t\in[0,T]$, $\varepsilon>0$, W 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant0},\mathsf{P})$ 上的一维标准布朗运动, $f(t,s,x)$ 和 $g(t,s,x)$ 是从 $\{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}\times\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的 $\mathscr{F}_s$-可测的连续函数.

假设 (H): 存在常数 $K>0$ 使得

(H1) $|f(t,s,x)|\leqslant K(1+|x|)$, $|g(t,s,x)|\leqslant K(1+|x|)$;

(H2) $|f(t,s,x_1)-f(t,s,x_2)|\leqslant K|x_1-x_2|$, $|g(t,s,x_1)-g(t,s,x_2)|\leqslant K|x_1-x_2|$;

(H3) $|g(t_1,s,x)-g(t_2,s,x)|\leqslant K|t_1-t_2|$.

在条件 (H) 下, Itô [1] 证明了方程 (1) 存在唯一的解. 当参数 ε 趋于 0 时, 方程 (1) 的解 X^{ε} 会趋于下面确定性方程的解:

$$X_t^0=x_0+\int_0^t f(t,s,X_s^0)\mathrm{d}s. \tag{2}$$

Rovira 和 Sanz-Solé [2] 研究了平面上的随机 Volterra 方程, 并且当系数关于变量 t, s, x 都是 Lipschitz 连续时, 证明了大偏差原理. 当系数关于 x 是 Lipschitz 连续且关于 t 是

E-mail: li-yu-meng@163.com.

本文 2019 年 3 月 1 日收到, 2019 年 4 月 14 日收到修改稿.

Hölder 连续时, Nualart 和 Rovira [3] 对多维随机 Volterra 方程证明了大偏差原理. Zhang [4] 证明了 Banach 空间上的随机 Volterra 方程的大偏差原理.

令

$$Y_t^{\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}h(\varepsilon)}(X_t^{\varepsilon}-X_t^0),\qquad t\in[0,T] \tag{3}$$

为渐近行为, 其中 $h(\varepsilon)$ 是某个偏差尺度. 它的大小会影响 Y^{ε} 的行为:

(i) 若 $h(\varepsilon)=\varepsilon^{-1/2}$, 这是 Wentzell-Freidlin 型大偏差估计. 随机 Volterra 方程的大偏差结果, 参见文献 [2,3].

(ii) 若

$$h(\varepsilon)\to+\infty,\quad \sqrt{\varepsilon}h(\varepsilon)\to 0,\qquad 当\ \varepsilon\to 0. \tag{4}$$

这是中偏差估计. 随机 Volterra 方程的中偏差结果, 参见文献 [5].

(iii) 若 $h(\varepsilon)=1$, 这是泛函中心极限定理. 这是本文研究的课题. 详细地讲, 我们将证明: 随着 ε 趋于 0, $(X^{\varepsilon}-X^0)/\sqrt{\varepsilon}$ 将 L^2 收敛到某个布朗运动驱动的随机微分方程的解, 详见下面的定理 1.

中心极限定理是概率统计中的一个经典课题. 它可以告诉我们收敛速度和构造有效的渐近置信区间. 由于协方差函数是一个二次型, 容易算出它的最小值, 进而容易地算出逃逸时的渐近估计.

最近, 带有小扰动的随机微分方程的中心极限定理引起了人们的研究, 参见文献 [6–8]. 在证明中, 鞅的 Burkholder 不等式起到了关键的作用. 但是对于随机 Volterra 方程, 由于方程 (1) 中的随机积分项不是鞅, 因此无法使用 Burkholder 不等式. 这为证明带来了新的困难. 本文我们采用 Itô [1] 文章中的关于随机积分的一个极大不等式.

随机 Volterra 方程为提供了研究随机微分方程的一个很广泛的框架, 例如它包含了分数布朗运动驱动的随机微分方程和双曲随机偏微分方程, 见文献 [3]. 因此, 在适当的条件下, 中心极限定理对这些随机动力系统也是成立的.

在第二部分, 我们将陈述中心极限定理, 并给出证明. 在最后一部分, 给出定理的一个应用.

§2. 中心极限定理

为了证明中心极限定理, 我们需要进一步假设下列条件成立:

(A): 系数 $f(t,s,x)$ 关于变量 x 是可微的, 其偏导数记为 $f'(t,s,x)$. 并且存在常数 K' 满足: 对任意的 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, $x,y\in\mathbb{R}$,

$$|f'(t,s,x)-f'(t,s,y)|\leqslant K'|x-y|. \tag{5}$$

结合 f 的 Lipschitz 连续性, 可得

$$|f'(t,s,x)| \leqslant K, \qquad \forall\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,\ x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

由条件 (5) 和条件 (6) 知, 方程

$$Y_t^0 = \int_0^t f'(t,s,X_s^0)Y_s^0 \mathrm{d}s + \int_0^t g(t,s,X_s^0)\mathrm{d}W_s \tag{7}$$

存在唯一的解.

我们将证明 $(X^\varepsilon - X^0)/\sqrt{\varepsilon}$ 收敛到 Y^0, 这是下面的中心极限定理.

定理 1 假设条件 (H) 和 (A) 成立. 则对任意的 $T>0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathsf{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\frac{X_t^\varepsilon - X_t^0}{\sqrt{\varepsilon}} - Y_t^0\Big|^2\Big] = 0.$$

在证明定理 1 之前, 我们首先给出三个引理.

引理 2 存在常数 $C_1(x_0,T,K)>0$ 满足: 对任意的 $\varepsilon\in(0,1]$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathsf{E}|X_t^\varepsilon|^4 \leqslant C_1(x_0,T,K).$$

证明: 对任意的 $\varepsilon\in(0,1]$, 由基本不等式 $(a+b+c)^4 \leqslant 27(a^4+b^4+c^4)$, 得

$$\mathsf{E}|X_t^\varepsilon|^4 \leqslant 27x_0^4 + 27\mathsf{E}\Big[\Big(\int_0^t |f(t,s,X_s^\varepsilon)|\mathrm{d}s\Big)^4\Big] + 27\varepsilon^2\mathsf{E}\Big[\Big|\int_0^t g(t,s,X_s^\varepsilon)\mathrm{d}W_s\Big|^4\Big].$$

对任意固定的 $t\in[0,T]$, $u\in[0,t]$, 令

$$M_u = \int_0^u g(t,s,X_s^\varepsilon)\mathrm{d}W_s.$$

则 M_u 是一个 $\mathscr{F}_u$-鞅. 因此, 由鞅的 BDG 不等式 (参见文献 [9; Section 4.3]) 知: 对任意的 $u\in[0,t]$,

$$\mathsf{E}M_u^4 \leqslant c\,\mathsf{E}\Big[\int_0^u |g(t,s,X_s^\varepsilon)|^2\mathrm{d}s\Big]^2.$$

特别地, 取 $u=t$, 得

$$\mathsf{E}\Big[\Big|\int_0^t g(t,s,X_s^\varepsilon)\mathrm{d}W_s\Big|^4\Big] \leqslant c\,\mathsf{E}\Big[\Big(\int_0^t |g(t,s,X_s^\varepsilon)|^2\mathrm{d}s\Big)^2\Big].$$

因此, 由条件 (H) 和 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}|X_t^\varepsilon|^4 &\leqslant C\Big\{x_0^4 + t^3\mathsf{E}\Big[\int_0^t |f(t,s,X_s^\varepsilon)|^4\mathrm{d}s\Big] + \varepsilon^2\mathsf{E}\Big[\Big(\int_0^t |g(t,s,X_s^\varepsilon)|^2\mathrm{d}s\Big)^2\Big]\Big\}\\ &\leqslant C\Big\{x_0^4 + K^4t^3\mathsf{E}\Big[\int_0^t (1+|X_s^\varepsilon|)^4\mathrm{d}s\Big] + K^4t\mathsf{E}\Big[\int_0^t (1+|X_s^\varepsilon|)^4\mathrm{d}s\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式得: 对任意的 $\varepsilon \in (0,1]$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathsf{E}|X_t^\varepsilon|^4 \leqslant C_1(x_0,K,T).$$

证明完毕. □

引理 3 存在常数 $C_2(x_0,T,K)>0$, 满足

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathsf{E}|X_t^\varepsilon - X_t^0|^4 \leqslant \varepsilon^2 C_2(x_0,T,K).$$

证明: 注意到:

$$X_t^\varepsilon - X_t^0 = \int_0^t [f(t,s,X_s^\varepsilon) - f(t,s,X_s^0)]\mathrm{d}s + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t g(t,s,X_s^\varepsilon)\mathrm{d}W_s. \tag{8}$$

对方程 (8) 两侧取期望, 由条件 (H) 和 Hölder 不等式, 可得:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}|X_s^\varepsilon - X_s^0|^4 &\leqslant 8\mathsf{E}\Big[\int_0^t |f(t,s,X_s^\varepsilon) - f(t,s,X_s^0)|\mathrm{d}s\Big]^4 + 8\varepsilon^2\mathsf{E}\Big[\Big(\int_0^t g(t,s,X_s^\varepsilon)\mathrm{d}W_s\Big)^4\Big] \\
&\leqslant 8t^3K^4\mathsf{E}\Big[\int_0^t |X_s^\varepsilon - X_s^0|^4\mathrm{d}s\Big] + 8c\varepsilon^2\mathsf{E}\Big[\Big(\int_0^t |g(t,s,X_s^\varepsilon)|^2\mathrm{d}s\Big)^2\Big] \\
&\leqslant 8t^3K^4\mathsf{E}\Big[\int_0^t |X_s^\varepsilon - X_s^0|^4\mathrm{d}s\Big] + 8c\varepsilon^2K^4t\mathsf{E}\Big[\int_0^t (1+|X_s^\varepsilon|)^4\mathrm{d}s\Big].
\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式和引理 2, 可得:

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathsf{E}|X_t^\varepsilon - X_t^0|^4 \leqslant \varepsilon^2 C_2(x_0,T,K).$$

证明完毕. □

由于随机积分 $\int_0^t g(t,s,X_s^\varepsilon)\mathrm{d}W_s$ 不是鞅, 我们不能使用鞅的 Burkholder 不等式. 这带来了困难. 这里我们采用 Itô [1] 文章中的一个极大不等式.

引理 4 ([1; Lemma 2.2]) 若 $\gamma_i(t)$ $(i=1,2)$ 满足 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \mathsf{E}|\gamma_i(t)|^4 < \infty$, 则

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_0^t [g(t,s,\gamma_1(s)) - g(t,s,\gamma_2(s))]\mathrm{d}W_s\Big| \geqslant r\Big\} \leqslant r^{-4}K_0T^2C_1,$$

其中 K_0 是一个普适常数,

$$C_1 = 288K^4\Big(16T^2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathsf{E}|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)|^2 + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathsf{E}|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)|^4\Big).$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, 令

$$Y^\varepsilon := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(X^\varepsilon - X^0).$$

定理 1 的证明: 注意到

$$\begin{aligned}
&Y_t^\varepsilon - Y_t^0\\
&= \int_0^t \Big[\frac{f(t,s,X_s^\varepsilon) - f(t,s,X_s^0)}{\sqrt{\varepsilon}} - f'(X_s^0)Y_s^0\Big]\mathrm{d}s + \int_0^t [g(t,s,X_s^\varepsilon) - g(t,s,X_s^0)]\mathrm{d}W_s\\
&= I_1^\varepsilon(t) + I_2^\varepsilon(t) + I_3^\varepsilon(t),
\end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1^\varepsilon(t) &:= \int_0^t \Big[\frac{f(t,s,X_s^\varepsilon) - f(t,s,X_s^0)}{\sqrt{\varepsilon}} - f'(t,s,X_s^0)Y_s^\varepsilon\Big]\mathrm{d}s,\\
I_2^\varepsilon(t) &:= \int_0^t [f'(t,s,X_s^0)(Y_s^\varepsilon - Y_s^0)]\mathrm{d}s,\\
I_3^\varepsilon(t) &:= \int_0^t [g(t,s,X_s^\varepsilon) - g(t,s,X_s^0)]\mathrm{d}W_s.
\end{aligned}$$

由 Taylor 公式知, 存在取值在 $(0,1)$ 上的随机变量 $\eta_{\varepsilon,t}(s)$ 满足

$$f(t,s,X_s^\varepsilon) - f(t,s,X_s^0) = f'[t,s,X_s^0 + \eta_{\varepsilon,t}(s)(X_s^\varepsilon - X_s^0)] \times (X_s^\varepsilon - X_s^0).$$

由于 f' 也是 Lipschitz 连续的,

$$|f'[t,s,X_s^0 + \eta_{\varepsilon,t}(s)(X_s^\varepsilon - X_s^0)] - f'(t,s,X_s^0)| \leqslant K'\eta_{\varepsilon,t}(s)|X_s^\varepsilon - X_s^0| \leqslant K'|X_s^\varepsilon - X_s^0|.$$

因此,

$$|I_1^\varepsilon(t)|^2 \leqslant \frac{K^2 t}{\varepsilon}\int_0^t |X_s^\varepsilon - X_s^0|^4\mathrm{d}s. \tag{10}$$

对上式取期望, 由引理 3 知: 对任意的 $t \in [0,T]$,

$$\mathsf{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|I_1^\varepsilon(s)|^2\Big] \leqslant \frac{K^2 t}{\varepsilon}\mathsf{E}\Big[\int_0^t |X_s^\varepsilon - X_s^0|^4\mathrm{d}s\Big] \leqslant \varepsilon C_1(x_0,T,K,K'). \tag{11}$$

由于 $|f'| \leqslant K$, 对任意的 $t \in [0,T]$,

$$\mathsf{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|I_2^\varepsilon(s)|^2\Big] \leqslant K^2 t\mathsf{E}\Big[\int_0^t |Y_s^\varepsilon - Y_s^0|^2\mathrm{d}s\Big]. \tag{12}$$

由引理 4 得: 对任意的 $r > 0$,

$$\mathsf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|I_3^\varepsilon(t)| \geqslant r\Big) \leqslant r^{-4}K_0T^2C_{1,\varepsilon}, \tag{13}$$

其中 K_0 是一个普适常数,

$$C_{1,\varepsilon}=288K^4\Big(16T^2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathsf{E}|X_t^\varepsilon-X_t^0|^2+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathsf{E}|X_t^\varepsilon-X_t^0|^4\Big).$$

由引理 3 知, 常数 $C_{1,\varepsilon}\leqslant C_{2,1}(T,K)\varepsilon$.

由 Fubini 定理和方程 (13), 对任意的 $\delta>0$, 下式成立

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|I_3^\varepsilon(t)|^2\Big]&=\int_0^\infty 2r\mathsf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|I_3^\varepsilon(t)|\geqslant r\Big)\mathrm{d}r\\&=\int_0^\delta 2r\mathsf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|I_3^\varepsilon(t)|\geqslant r\Big)\mathrm{d}r+\int_\delta^\infty 2r\mathsf{P}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|I_3^\varepsilon(t)|\geqslant r\Big)\mathrm{d}r\\&\leqslant\int_0^\delta 2r\mathrm{d}r+\varepsilon K_0T^2C_{2,1}\int_\delta^\infty 2r^{-3}\mathrm{d}r\\&=\delta^2+\varepsilon\delta^{-2}K_0T^2C_{2,1}.\end{aligned}\tag{14}$$

联立方程 (9), (11), (12) 和 (14), 由 Gronwall 不等式, 可得

$$\mathsf{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^\varepsilon-Y_t^0|^2\Big]\leqslant[\delta^2+\delta^{-2}K_0T^2C_{2,1}\varepsilon+\varepsilon C_1(x_0,T,K,K')]\exp\{K^2T^2/2\}.$$

令 $\varepsilon\to 0$, 得

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\mathsf{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^\varepsilon-Y_t^0|^2\Big]\leqslant\delta^2\exp\{K^2T^2/2\}.$$

由 δ 的任意性, 可知结论成立.

证明完毕. □

§3. 分数布朗运动驱动的随机微分方程

这一节, 我们将利用定理 1, 对分数布朗运动驱动的随机微分方程的证明中心极限定理. 首先, 我们给出这类方程的一些性质, 参见文献 [3].

对任意的 $H\in(0,1)$, 令 $\{W_t^H:t\geqslant 0\}$ 是参数为 H 的分数布朗运动, 即它是一个零均值的高斯过程, 协方差矩阵为

$$R_H(t,s)=\frac{V_H}{2}\big(s^{2H}+t^{2H}-|t-s|^{2H}\big),$$

其中 V_H 是正则化常数

$$V_H=\frac{\Gamma(2-2H)\cos(\pi H)}{\pi H(1-2H)}.$$

我们知道分数阶布朗运动有下列表示形式

$$W_t^H=\int_0^t K_H(t,s)\mathrm{d}W_s,\tag{15}$$

其中 W 是标准布朗运动, $K_H(t,s)$ 是协方差矩阵 $R_H(t,s)$ 的平方根, 即

$$R_H(s,t)=\int_0^1 K_H(s,r)K_H(t,r)\mathrm{d}r.$$

此时,

$$K_H(t,r)=\frac{(t-r)^{H-1/2}}{\Gamma(H+1/2)}F\Big(\frac{1}{2}-H,H-\frac{1}{2},H+\frac{1}{2},1-\frac{t}{r}\Big)1_{[0,t)},$$

其中 F 是高斯超几何函数, 参见文献 [10] 对它的详细的描述. 考虑下列随机微分方程

$$X_t=x_0+\int_0^t K_H(t,s)\widetilde{f}(s,X_s)\mathrm{d}s+\int_0^t K_H(t,s)\widetilde{g}(s,X_s)\mathrm{d}W_s, \tag{16}$$

其中 $\widetilde{f}$ 和 $\widetilde{g}$ 是确定性的函数, $\{W_t: t\geqslant 0\}$ 是 (15) 中出现的标准布朗运动.

假设函数 $\widetilde{g}$ 和 $\widetilde{f}$ 是有界可测的, 关于 x 是 Lipschitz 的, $\widetilde{f}$ 关于 x 是可导的, 并且它的导数关于 x 也是 Lipschitz 的. 则当 $1/2\leqslant H<1$ 时, 系数

$$g(t,s,x):=K_H(t,s)\widetilde{g}(s,x),$$
$$f(t,s,x):=K_H(t,s)\widetilde{f}(s,x)$$

满足定理 1 中的条件 (H) 和 (A). 因此, 分数布朗运动驱动的方程 (16) 满足中心极限定理.

参 考 文 献

[1] ITÔ I. On the existence and uniqueness of solutions of stochastic integral equations of the Volterra type [J]. *Kodai Math J*, 1979, **2(2)**: 158–170.

[2] ROVIRA C, SANZ-SOLÉ M. Large deviations for stochastic Volterra equations in the plane [J]. *Potential Anal*, 2000, **12(4)**: 359–383.

[3] NUALART D, ROVIRA C. Large deviations for stochastic Volterra equations [J]. *Bernoulli*, 2000, **6(2)**: 339–355.

[4] ZHANG X C. Stochastic Volterra equations in Banach spaces and stochastic partial differential equation [J]. *J Funct Anal*, 2010, **258(4)**: 1361–1425.

[5] LI Y M, WANG R, YAO N, et al. A moderate deviation principle for stochastic Volterra equation [J]. *Statist Probab Lett*, 2017, **122**: 79–85.

[6] CAI Y J, WANG S C. Central limit theorem and moderate deviation principle for CKLS model with small random perturbation [J]. *Statist Probab Lett*, 2015, **98**: 6–11.

[7] GAO F Q, WANG S C. Asymptotic behaviors for functionals of random dynamical systems [J]. *Stoch Anal Appl*, 2016, **34(2)**: 258–277.

[8] LI Y M, ZHANG S G. Moderate deviations and central limit theorem for positive diffusions [J]. *J Inequal Appl*, 2016, **2016(1)**: Article No. 87 (10 pages).

[9] REVUZ D, YOR M. *Continuous Martingales and Brownian Motion* [M]. 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1999.

[10] DECREUSEFOND L, ÜSTÜNEL A S. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion [J]. *Potential Anal*, 1999, **10(2)**: 177–214.

Central Limit Theorem for Stochastic Volterra Equation

LI Yumeng

(*School of Statistics and Mathematics, Zhongnan University of Economics and Law, Wuhan, 430073, China*)

Abstract: In this paper, we study a class of stochastic Volterra equations, which include the stochastic differential equation driven by fractional Brownian motion. By using a maximal inequality due to Itô (1979), we establish the central limit theorem for stochastic Volterra equation on the continuous path space, with respect to the uniform norm.

Keywords: stochastic Volterra equation; central limit theorem; fractional Brownian motion

2010 Mathematics Subject Classification: 60H15; 60F10