应用概率统计 第十四卷
第四期 1998年11月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 14 No. 4 Nov. 1998

随机赔偿、随机折现下的保险概率模型及若干结果

尹居良 周玉丽
(暨南大学, 广州, 510632) (华东师范大学, 上海, 200062)

摘 要

本文首先构造了保险的随机过程模型, 即随机赔偿和随机折现的双随机模型. 运用测度扩张理论将赔偿过程发展为随机赔偿测度, 在模型的基本假定之下研究赔偿过程的性质, 给出保险和年金的测度表示以及诸多精算公式. 最后针对随机利率的Gauss过程模型得到Hoem模型随机赔偿测度的现值矩发展了[7]中的主要结果.

关键词: 随机赔偿, 随机折现, 随机赔偿测度, 随机利率, Gauss过程, Hoem模型, Markov链, Wiener过程, White Noise过程, Ornstein-Uhlenbeck过程.

§1. 引 言

人寿保险与养老金保险本质上依赖于人的生存或死亡的赔付问题, 随机分析方法自然成为重要的数学工具[2]. Norberg, R.([1]1990)把收人和支出形成的赔偿流看作实直线上的测度, 并从一组基本原则出发, 提出了用于赔偿测度估值的相容性原则, 给出了能把赔偿测度表示为正的折现函数关于赔偿测度积分的正则条件. 本文给出更一般的随机赔偿测度.

§2中运用测度扩张理论将赔偿过程发展为随机赔偿测度, 给出通常年金的测度表示, 特别对广泛用于健康保险、人寿保险、疾病保险、养老金保险的Hoem模型及其测度表示考查一般连续保险情形.

§3在随机赔偿测度和随机折现的基本假定下, 研究赔偿过程的性质, 得到诸多精算公式.

在一般保险文献当中, 利率被假定为常数. 但是保险精算的首要问题是未来利率的随机本质必然决定保险公司的偿还能力估值或应急准备金估值, 而且由利率产生的风险较之因赔偿产生的风险可能更大[2].

一般而言, 随机利率有两种模型, 一是利率力随机模型, 二是利率力累积函数模型. 对此, Beekman & Fulling, Parker, G. ([4],[5]1994)都有深入研究.

在§4中针对随机利率的Gauss过程模型得到Hoem模型随机赔偿测度的现值均值以及某些随机赔偿测度的现值矩, 并在利率力的Wiener过程, White Noise过程, Ornstein-Unlenbek过程予以具体表述, 同时发展了[7]中的结果.

§2. 随机赔偿测度

假定$(\Omega, \mathcal{F}, F)$为一带流$F=\{F_t\}_{t\geq 0}$的完备概率空间. $\mathcal{F}$的子σ-代数流$\{F_t\}_{t\geq 0}$满足通常条件.

(1) 递增性. $0\leq s\leq t\Longrightarrow \mathcal{F}_s\subseteq \mathcal{F}_t$.

(2) 完备性. $\mathcal{F}_0$包含$\mathcal{F}$中的一切零测度集, $\mathcal{F}=\mathcal{F}_\infty=\bigvee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$.

本文1997年4月27日收到. 1998年3月10日收到修改稿.

(3) **右连续性.** $\forall t \in R_+, \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$.

设实直线 R 表示时间, $\forall t \in R$ 以 $A(t)$ 表示时间区间 $(-\infty, t]$ 上的随机赔偿. 实际上, 研究的赔付问题发生在参考时点 0 之后, 所以 $A(t)$ 即是在 $[0,t]$ 上的随机赔偿. 采用上述形式主要考虑测度扩张.

假定随机赔偿过程 $\{A(t)\}_{t\in R_+}$ 关于概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, F)$ 是右连续的有限变差过程.

$$A(t) = B(t) - C(t) \qquad \forall t \geq 0$$

$\{B(t)\}_{t\geq 0}$, $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ 都是右连续、非负、非降、有限值且关于 $(\Omega, \mathcal{F}, F)$ 适应的随机过程. 其中 (1) 右连续指轨道的右连续, 这意味着赔付到期或其后的短时期内, 接受人自由支取. (2) 通常条件 $\mathcal{F}_t$ 包含 $[0,t]$ 内赔偿和利息的全部信息. (3) 在 $A(t) = B(t) - C(t)$ 中, $B(t)$ 表示在 $[0,t]$ 内承保人的支出, $C(t)$ 表示在 $[0,t]$ 内的收入.

定理 2.1 随机赔偿过程 $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ 可唯一扩张成 $\mathcal{B}(R)$ 上的随机测度, 记为 $\mathcal{B}$, 即

(1) $\forall \omega \in \Omega$, $\mathcal{B}(\omega, \bullet)$ 是 $\mathcal{B}(R)$ 上 σ–有限测度.

(2) $\forall \mathcal{T} \in \mathcal{B}(R), \mathcal{B}(\bullet, \mathcal{T})$ 是 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的随机变量.

证明: 显然. (参阅 [3],1950).

该定理对 $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ 也成立, 由此得到

定理 2.2 随机赔偿过程 $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ 可唯一扩张成 $\mathcal{B}(R)$ 上 σ-广义测度, 简称随机赔偿测度, 记为 $\mathcal{A} = \mathcal{B} - \mathcal{C}$. 以 $\mathcal{Z}$ 表示随机赔偿测度集合.

记 $\mathcal{A}_t^d(\omega) = \mathcal{A}_t(\omega) - \mathcal{A}_{t-}(\omega) \quad \forall t \in R_+,\ \omega \in \Omega \quad D_{\mathcal{A}}(\omega) = \{t \in R_+,\ \mathcal{A}_t^d(\omega) \neq 0\}$, 类似 [1] 中结论有

定理 2.3

(1) $\forall \omega \in \Omega$, $D_{\mathcal{A}}(\omega)$ 至多可数.

(2) $\forall \omega \in \Omega$, σ-有限广义测度 $\mathcal{A}(\omega, \bullet)$ 可唯一分解成

$$\mathcal{A}(\omega, \bullet) = \mathcal{A}^c(\omega, \bullet) + \mathcal{A}^d(\omega, \bullet)$$

这里, $\mathcal{A}^d(\omega, \mathcal{T}) = \mathcal{A}(\omega, D_{\mathcal{A}(\omega)} \bigcap \mathcal{T}) = \sum_{t\in\{D_{\mathcal{A}}(\omega)\bigcap \mathcal{T}\}} \mathcal{A}_t^d(\omega) \quad \forall \mathcal{T} \in \mathcal{B}(R)$.

(3) $\mathcal{A}(\omega, \bullet)$ 可唯一分解成

$$\mathcal{A}^c(\omega, \bullet) = \mathcal{A}^{ac}(\omega, \bullet) + \mathcal{A}^{cs}(\omega, \bullet)$$

其中, $\mathcal{A}^{ac}(\omega, \mathcal{T}) = \int_{\mathcal{T}} b^{ac}(\omega, t)dt \quad \forall \mathcal{T} \in \mathcal{B}(R)$ 是 $\mathcal{A}^c(\omega, \bullet)$ 中的绝对连续部分, 而 $\mathcal{A}^{cs}(\omega, \bullet)$ 是集中在 Lebesgue 零测度集的奇异连续部分.

证明: 参阅 [1] 的证明类似得到.

§3. 随机测度表示

[A] **离散随机测度**

(1) 简单的非平凡赔偿测度[1]

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}(\omega) = \begin{cases} 0 & t \in \mathcal{T} \\ b & t \notin \mathcal{T} \end{cases} \qquad \forall \omega \in \Omega, \quad \mathcal{T} \in \mathcal{B}(R) \tag{1}$$

上述测度表示只在 t 处赔偿 b 元, 记 $\mathcal{A}(\omega, \bullet) = b\varepsilon_t(\omega)$, $\varepsilon_t(\omega)$ 是在 t 处的单位原子测度.

(2) 分期赔偿离散测度[1] 在时点 t_i, $i=1,2\cdots$ 处赔偿 b_i 元, 则赔偿测度

$$\mathcal{A}(\omega,\bullet)=\sum_i b_i\varepsilon_{t_i}(\omega) \qquad \forall\omega\in\Omega \tag{2}$$

籍此得到通常年金和保险的测度表示.

(3) 每年支付一元, 年内 m 期期首支付的 n 年期年金测度 $\mathcal{A}$ 满足

$$\mathcal{A}_t(\omega)=\mathcal{A}(\omega,[0,t])=\frac{[mt]+1}{m}\bigwedge n \qquad \forall\omega\in\Omega \tag{3}$$

如果 $m=1$ 即为 n 年期初付年金, $n=\infty$ 变成永久年金.

(4) 每年支付一元, 年内 m 期期末支付的 n 年期年金测度 $\mathcal{A}$ 有

$$\mathcal{A}_t(\omega)=\mathcal{A}(\omega,[0,t])=\frac{[mt]}{m}\bigwedge n \qquad \forall\omega\in\Omega \tag{4}$$

如果 $m=1$ 即为 n 年期延付年金.

(5) 设 T 表示 (x) 岁人的剩余寿命, 在其生存期间 t_i $i=1,2\cdots$ 处赔偿 b_{t_i} 的随机赔偿测度

$$\mathcal{A}(\omega,\bullet)=\sum_i b_{t_i}\varepsilon_{t_i}(\omega)I_{[t_i\le T]} \qquad \forall\omega\in\Omega, \tag{5}$$

由此得到

(6) n 年定期生存年金随机测度 $\mathcal{A}$ 满足

$$\text{期初:}\qquad \mathcal{A}_t(\omega)=\{[t]+1\}\bigwedge(n\bigwedge T) \tag{6}$$

$$\text{期末:}\qquad \mathcal{A}_t(\omega)=[t]\bigwedge[n\bigwedge T] \tag{7}$$

取 $n=+\infty$ 成为终身年金. 一般保险的测度表示参考(12)(13)(14)(15)容易得到.

[B] 连续随机测度

(1) 给付率 $b(s)$ $(s\in R_+)$ 的 n 年期变额连续年金测度

$$\mathcal{A}_t(\omega)=\int_0^{t\bigwedge n} b(s)ds \tag{8}$$

特别, $b(s)=1$ 时, $\mathcal{A}_t(\omega)=t\bigwedge n$ 为 n 年连续年金[1]. $n=+\infty$ 时变为终身年金.

(2) 给付率 $b(s)$ $(s\in R_+)$ 的 n 年期变额连续生命年金随机测度

$$\mathcal{A}_t(\omega)=\int_0^{t\bigwedge(nT)} b(s)ds \tag{9}$$

同样, $n=\infty$ 时为终身生命年金. $b(s)=1$ 时为 n 年期连续水平年金.

(3) 一般年金-保险模型 (Hoem, J.M. 1969)

(一) 基本模型 设保单自生效之日起 $(t=0)$, 其可能发展状态 $\Xi=\{0,1,2,\cdots\phi\}$. 在0时处于状态0, 任何时间保单只处于一种状态, 所给的赔偿有两种:

(A) 普通寿命年金 在时间区间 $(s,t]$, 只要逗留状态 $g\in\Xi$, 则连续赔偿年金 $\mathcal{A}_g^0(t)-\mathcal{A}_g^0(s)$

(B) 普通保险 若在 t 时发生状态转移 $g\to h(g\neq h)$, 则赔偿 $a_{gh}^0(t)$ 元, 这里 $a_{gh}^0(t)$ 为有限值函数.

(二) 随机赔偿测度

随机过程 $\{x(t)\}_{t\geq 0}$ 表示保单的发展状态, 假定 $\{x(t)\}_{t\geq 0}$ 右连续, 在任何有限区间只有有限个转移, $x(0)\equiv 0$. 记 $N_{gh}(t)$ 表示 $[0,t]$ 内发生 $g\to h$ 的次数, 即

$$N_{gh}(t)=\#\{s\in[0,t];\ x(s-)=g,\ x(s)=h\}\qquad N_{gh}(0)=0\quad(g\neq h)$$

则随机赔偿测度

$$\mathcal{A}=\sum_{g\in\Xi}\Big(\mathcal{A}_g+\sum_{h:h\neq g}\mathcal{A}_{gh}\Big)\tag{10}$$

其中, $d\mathcal{A}_g(t)=I_{(x(t)=g)}d\mathcal{A}_g^0(t)$, $d\mathcal{A}_{gh}(t)=a_{gh}^0(t)dN_{gh}(t)$, $dN_{gh}(t)$ 表示在 $[t,t+dt)$ 内的跳跃数(0 或 1).

如果 t 时保单处于状态 $i\in\Xi$ 投保人连续上缴保险费, 缴纳率为 $b_i(t)$, $b_i(t)$ 非负, 且为有限值函数, 则

$$\mathcal{A}=\sum_{g\in\Xi}\Big(\mathcal{A}_g+\sum_{h:h\neq g}\mathcal{A}_{gh}\Big)-\sum_{i\in\Xi}\mathcal{B}_i\tag{11}$$

其中 $d\mathcal{B}_i(t)=I_{(x(t)=i)}b_i(t)dt$.

Hoem 模型不仅可以刻划健康保险, 人寿保险, 疾病保险, 养老金保险, 而且也涵盖一般非寿险情形, 同时一般保险(连续情形)的随机测度表示容易表述. 例如

(3.1) n 年期养老金 (以下均没有考虑缴纳保险费, 而且 $t>0$)

$$\mathcal{A}_t(\omega)=(t-n)I_{[n\leq t\leq T]}\tag{12}$$

(3.2) n 年期定期保险

$$\mathcal{A}_t(\omega)=I_{[n\geq t\geq T]}\tag{13}$$

(3.3) n 年期两全保险

$$\mathcal{A}_t(\omega)=I_{[T\leq t<n]}+(t-n)I_{[T\wedge t\geq n]}\tag{14}$$

(3.4) 广义寿险 (受保人在 t 时死亡, 承保人即付 $C(t)$ 元)

$$\mathcal{A}_t(\omega)=C(T)I_{[t\geq T]}\tag{15}$$

§4 赔偿过程的基本性质和精算公式

假定1 随机折现函数 $V=\{V_t\}_{t\geq 0}$ 是正的, 有界且关于基本概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},F)$ 适应的左连续随机过程, $V(0)\equiv 0$. 以 $\mathcal{Y}$ 表示上述随机折现全体.

假定2 随机赔偿测度 $\mathcal{A}\in\mathcal{Z}$ 满足

$$\int_{[0,\infty)}|d\mathcal{A}_t(\omega)|<\infty\qquad\forall\omega\in\Omega$$

即按轨道的 Lebesgue–Stieltjes 积分存在. 以后所考虑的随机折现函数和随机赔偿测度都满足假定 1, 假定 2.

定义 4.1 随机赔偿测度 $\mathcal{A}\in\mathcal{Z}$, 对于集合 $\mathcal{E}\in\mathcal{B}(R_+)$, 其在 t 时的现值 (present value)

$$V(t,\mathcal{A}_{|\mathcal{E}})=\frac{1}{V_t}\int_{\mathcal{E}}V_sd\mathcal{A}_s\tag{16}$$

显然, 在上述假定下 $V(t,\mathcal{A})$ 在轨道的 Lebesgue–Stietjes 积分意义下存在且为随机变量.

引理 4.1 对于 $\mathcal{A}\in\mathcal{Z}, V\in\mathcal{Y}$, 令 $\bigwedge_t(\omega)=\int_{[0,t]}V_s(\omega)d\mathcal{A}_s(\omega)$, $\forall\omega\in\Omega$, 则

(1) $\bigwedge=\{\bigwedge_t\}_{t\geq 0}$ 为有限变差过程.

(2) 如果 $\mathcal{A}$ 连续, 则 $\bigwedge$ 也连续.

证明: 由于

$$\bigwedge_t(\omega)=\int_{[0,t]}V_s(\omega)d\mathcal{A}_s(\omega)=\int_{[0,t]}V_s^+(\omega)d\mathcal{B}_s(\omega)+\int_{[0,t]}V_s^-(\omega)d\mathcal{C}_s(\omega)$$
$$-\int_{[0,t]}V_s^-(\omega)d\mathcal{B}_s(\omega)-\int_{[0,t]}V_s^+(\omega)d\mathcal{C}_s(\omega)$$

则知 $\bigwedge_t(\omega)$ 为两个不减函数之差, 由 $\mathcal{B}_s(\omega)$ 和 $\mathcal{C}_s(\omega)$ 的右连续性, 则

$$0\leq\lim_{\Delta t\downarrow 0}\int_t^{t+\Delta t}V_s^+(\omega)d\mathcal{B}_s(\omega)\leq\lim_{\Delta t\downarrow 0}M\left(\mathcal{B}_{t+\Delta t}(\omega)-\mathcal{B}_t(\omega)\right)=0$$

M 为 $\{V_t\}_{t\geq 0}$ 的上界, 所以 $\int_{[0,t]}V_s^+(\omega)d\mathcal{B}_s(\omega)$ 右连续, 同理可证其它项右连续, 由此得到(1), (2) 的证明类似(1).

定理 4.1 如果随机折现函数 $V=\{V_t\}_{t\geq 0}$ 为非增过程, 则对任意 $\mathcal{A}\in\mathcal{Z}$, $V\in\mathcal{Y}$, $t<u$

$$\int_{[t,u]}V_s(\omega)d\mathcal{A}_s(\omega)=-\int_{[t,u]}\mathcal{A}_{s-}(\omega)dV_s(\omega)+\mathcal{A}_u(\omega)V_u(\omega)-\mathcal{A}_{t-}(\omega)V_t(\omega)\tag{17}$$

$$\int_{[t,u)}V_s(\omega)d\mathcal{A}_s(\omega)=-\int_{[t,u)}\mathcal{A}_{s-}(\omega)dV_s(\omega)+\mathcal{A}_{u-}(\omega)V_u(\omega)-\mathcal{A}_{t-}(\omega)V_t(\omega)\tag{18}$$

证明: 由假定 1 和分部积分公式容易得到(17)和(18).

推论 4.1 如果 $V=\{V_t\}_{t\geq 0}$ 非随机, 且为标准形式 $V(t)=\exp(-\int_0^t\delta(s)ds)$, 则

$$\int_{[t,u]}V(s)\mathcal{A}_s(\omega)=\int_t^u\mathcal{A}_{s-}(\omega)V(s)\delta(s)ds+\mathcal{A}_u(\omega)V(u)-\mathcal{A}_{t-}(\omega)V(t)\tag{19}$$

$$\int_{[t.u)}V(s)d\mathcal{A}_s(\omega)=\int_{[t,u)}\mathcal{A}_{s-}(\omega)V(s)\delta(s)ds+\mathcal{A}_{u-}(\omega)V(u)-\mathcal{A}_{t-}(\omega)V(t)\tag{20}$$

推论 4.2 如果 $V_t(\omega)=\exp(-\int_0^t\delta(s)ds)$, 这里 $\{\delta_t\}_{t\geq 0}$ 非负, 且对任意 $t\geq 0$, $\int_0^t\delta(s)ds<\infty$, 随机赔偿测度 $\mathcal{A}$ 与 $\{\delta_t\}_{t\geq 0}$ 相互独立, 则有

$$\mathsf{E}\int_{[t,u]}V_sd\mathcal{A}_s=\int_t^u\mathsf{E}\mathcal{A}_{s-}\mathsf{E}(V_s\delta_s)ds+\mathsf{E}\mathcal{A}_u\mathsf{E}V_u-\mathsf{E}\mathcal{A}_{t-}\mathsf{E}V_t\tag{21}$$

$$\mathsf{E}\int_{[t,u)}V_sd\mathcal{A}_s=\int_t^u\mathsf{E}\mathcal{A}_{s-}\mathsf{E}(V_s\delta_s)ds+\mathsf{E}\mathcal{A}_{u-}\mathsf{E}V_u-\mathsf{E}\mathcal{A}_{t-}\mathsf{E}V_t\tag{22}$$

特别, $V_t=v^t=\exp(-\delta t)$ 时, 就有

$$\mathsf{E}\int_{[t,u]}V_sd\mathcal{A}_s=\int_t^u\mathsf{E}\mathcal{A}_{s-}v^s\delta ds+\mathsf{E}\mathcal{A}_uv^u-\mathsf{E}\mathcal{A}_{t-}v^t\tag{23}$$

$$\mathsf{E}\int_{[t,u)}V_sd\mathcal{A}_s=\int_t^u\mathsf{E}\mathcal{A}_{s-}v^s\delta ds+\mathsf{E}\mathcal{A}_{u-}v^u-\mathsf{E}\mathcal{A}_{t-}v^t\tag{24}$$

利用上述结论于某些随机赔偿测度和具有常数利率力的折现函数 $v^t=\exp(-\delta t)$ 可以得到许多精算公式, 如

(1)[1] $1 = \delta \overline{a}_{\overline{n|}} + v^n$

(2)[1] $\overline{a}_{\overline{n|}} = \delta(\overline{I}\overline{a})_{\overline{n|}} + nv^n$

(3)[1] $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} = nv^n + d^{(m)}(I^{(m)}\ddot{a})^{m}_{\overline{n|}}$

(4) $\delta\overline{a}_{x:\overline{n|}} = 1 - {}_n\mathrm{E}_x - \overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}$

(5) $\overline{A}_x + \delta\overline{a}_x = 1$

(6) $\overline{A}_{x:\overline{n|}} + \delta\overline{a}_{x:\overline{n|}} = 1$

公式的精算意义可参阅[8], 至于推导过程利用§3中相应的随机赔偿测度容易得知.

§5 随机利率的 Gauss 过程模型下随机赔偿测度的现值和矩

考虑随机折现函数 $V_t = \exp(-\int_0^t \delta_s ds)$, $\{\delta_t\}_{t\geq 0}$ 为随机过程, 且$\forall\omega\in\Omega$, $\int_0^t \delta_s(\omega)ds < \infty$. 记 $y(t) = \int_0^t \delta_s ds$ 为利率力累积函数.

一般而言, 随机利率建模主要有两类, 一是利率力模型, 二是利率力累积函数模型. 这里考虑 $\{y(t)\}_{t\geq 0}$ 为Gauss过程情形, 因为Gauss过程较好地反映客观, 而且诸多利率力模型都可归结为累积函数Gauss过程.

引理5.1[4] 如果 $\{y(t)\}_{t\geq 0}$ 为Gauss过程, 则有

$$\mathrm{E}[V(0,\mathcal{A})]^m = \exp(-m\mathrm{E}y(t) + 5m^2\mathrm{Var}\, y(t)) \tag{25}$$

引理5.2 如果 $\delta_t = \delta + \sigma W_t$, $t\geq 0$, $\sigma \geq 0$, W_t 为标准的Wiener过程, 下式成立

$$\mathrm{E}y(t) = \delta t, \qquad \mathrm{Cov}\,(y(s), y(t)) = \sigma^2(\frac{s^2 t}{2} - \frac{s^2}{6}) \qquad s \leq t \tag{26}$$

证明: 由Fubini定理及Wiener过程的有关结论得证(参阅[9]).

定理5.1 设K表示(x)岁投保人余命的整年数. 在其死亡之年末承保人向其赔偿b_{K+1}元(变额寿险). 随机赔偿测度$\mathcal{A}$满足$\mathcal{A}_t = b_{K+1}I_{(t\geq K+1)}$, 在累积函数Gauss过程模型下则有

$$\mathrm{E}V^m(0,\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_kp_x q_{x+k} b^m_{k+1} \exp(-m\mathrm{E}y(k+1) + 5m^2\mathrm{Var}\, y(k+1)) \tag{27}$$

证明: 由已知条件

$$V(0,\mathcal{A}) = \int_{[0,\infty)} V_t d\mathcal{A}_t = b_{K+1}V_{K+1} = b_{K+1}\exp(-t(k+1))$$

所以

$$\mathrm{E}V^m(0,\mathcal{A}) = \mathrm{E}\Big[b_{K+1}\exp\big(-y(K+1)\big)\Big]^m = \mathrm{E}\Big[\,\mathrm{E}b^m_{K+1}\exp\big(-my(K+1)\big)\,|K\,\Big]$$
$$= \sum_{k=0}^{\omega-x-1} \mathrm{P}(K=k) b^m_{k=1}\mathrm{E}\exp(-my(k+1))$$

由此得到(27), 这里ω为极限寿命. 如果$\omega - x - 1 = n$则变为定期变额寿险. 设 $\{x(t)\}_{t\geq 0}$ 为Hoem模型的状态发展过程, 且为右连续的Markov链, 其转移概率和转移强度存在, 即

$$p_{ik}(s,t) = \mathrm{P}(x(t) = k|x(s) = i) \qquad u_{ik}(s) = \lim_{t\downarrow s}\frac{p_{ik}(s,t)}{t-s}$$

定理5.2 随机利率Gauss过程模型下Hoem模型的现值均值为

$$\mathsf{E}V(0,\mathcal{A})=\sum_{g\in\Xi}\int_{[0,\infty)}\exp[-\mathsf{E}y(s)+5\mathsf{Var}\,y(s)]p_{0g}(0,s)d\mathcal{A}_g^0(s)$$

$$+\sum_{h\neq g}\int_{[0,\infty)}\exp[-\mathsf{E}y(s)+5\mathsf{Var}\,y(s)]a_{gh}^0(s)u_{gh}(s)p_{0g}(0,s)ds \tag{28}$$

证明: 由定义4.1

$$V(0,\mathcal{A})=\sum_{g\in\Xi}\int_{[0,\infty)}V_sI_{(x(s)=g)}d\mathcal{A}_g^0(s)+\sum_{h\neq g}\int_{[0,\infty)}V_sa_{gh}^0(s)dN_{gh}(s)$$

则

$$\begin{aligned}\mathsf{E}V(0,\mathcal{A})&=\sum_{g\in\Xi}\int_{[0,\infty)}\mathsf{E}[V_sI_{(x(s)=g)}]d\mathcal{A}_g^0(s)+\sum_{h\neq g}\int_{[0,\infty)}a_{gh}^0(s)\mathsf{E}[V_sdN_{gh}(s)]\\&=\sum_{g\in\Xi}\int_{[0,\infty)}\mathsf{E}V_s\mathsf{E}I_{(x(s)=g)}d\mathcal{A}_g^0(s)+\sum_{h\neq g}\int_{[0,\infty)}a_{gh}^0(s)\mathsf{E}V_s\mathsf{E}dN_{gh}(s)(\text{由}[6])\\&=\sum_{g\in\Xi}\int_{[0,\infty)}\exp(-\mathsf{E}y(s)+5\mathsf{Var}\,y(s))p_{0g}(0,s)d\mathcal{A}_g^0(s)\\&\quad+\sum_{h\neq g}\int_{[0,\infty)}a_{gh}^0(s)\exp(-\mathsf{E}y(s)+5\mathsf{Var}\,y(s))u_{gh}(s)p_{0g}(0,s)ds\end{aligned}$$

(1) Wiener过程模型 $\delta_t=\delta+\sigma W_t$, 由引理5.2

$$\mathsf{E}V(0,\mathcal{A})=\sum_{g\in\Xi}\int_{[0,\infty)}\exp(\delta t+5\sigma^2t^3/3)p_{0g}(0,t)\Big(d\mathcal{A}_g^0(t)+\sum_{h\neq g}a_{gh}^0(t)u_{gh}(t)dt\Big) \tag{29}$$

(2) White Noise 过程模型 $\delta_t\sim N(\delta,\sigma^2)$, $\mathsf{E}y(t)=\delta t\quad \mathsf{Var}\,y(t)=\sigma^2t$

$$\mathsf{E}V(0,\mathcal{A})=\sum_{g\in\Xi}\int_{[0,\infty)}\exp(-\delta t+5\sigma^2t)p_{0g}(0,t)\Big(d\mathcal{A}_g^0(t)+\sum_{h:h\neq g}a_{gh}^0(t)u_{gh}(t)dt\Big) \tag{30}$$

(3) Ornstein-Uhlenbeck过程模型 $d\delta_t=-\alpha(\delta_t-\delta)dt+\sigma dW_t$, $\alpha\geq 0\quad\sigma\geq 0$

$$\mathsf{E}y(t)=\delta t\qquad \mathsf{Var}\,y(t)=\frac{\delta^2}{\alpha^2}t+\frac{\delta^2}{2\alpha^3}\Big(-3+4\exp(-\alpha t)-\exp(-2\alpha t)\Big)$$

$$\mathsf{E}V(0,\mathcal{A})=\sum_{g\in\Xi}\int_{[0,\infty)}\exp\Big[-\delta t+5\Big(\frac{\delta^2}{\alpha^2}t+\frac{\delta^2}{2\alpha^3}(-3+4\exp(-\alpha t)-\exp(-2\alpha t))\Big)\Big]$$

$$p_{0g}(0,t)\Big(d\mathcal{A}_g^0(t)+\sum_{h\neq g}a_{gh}^0(t)u_{gh}(t)dt\Big) \tag{31}$$

推论5.1 广义寿险: 即(x)岁被保险人在t时死亡, 承保人即付$C(t)$元, 赔偿测度$\mathcal{A}$现值的m阶矩为

$$\mathsf{E}V^m(0,\mathcal{A})=\int_{[0,\infty)}\exp(-m\mathsf{E}y(t)+5m^2\mathsf{Var}\,y(t))C^m(t)\mu_{x+t\,t}p_xdt \tag{32}$$

证明: 由于 $V(0,\mathcal{A})=C(T)V_T$, T 为剩余寿命. 注意到

$$u_{gh}(t)=\mu_{x+t}\qquad p_{0g}(0,t)=p_{00}(0,t)={}_tp_x$$

由引理5.1，结论即知．利用此容易给出[7]中的主要结果．

参 考 文 献

[1] Norberg, R., Payment measure, interest, and discouting-an axiomatic approch with application to insurance. Scand. Actuarial J. 1990, 14-33.
[2] 伍超标, Some applied aspects of probability and statistics, 华东师范大学, 1995. (博士后工作报告).
[3] Halmos, P.P. *Measure theory*, Van Nostrand, 1950.
[4] Parker, G. Two stochastic approch for discouting acturial function. Astin Bulletin Vol 24. 1994, 168-180.
[5] Parker, G. Moments of the present value of portfolio of policies. Scand. Acturial J. 1994, 53-67.
[6] Norberg, R. Reserve in life and pension insurance. Scand. Acturial J. 1991, 3-34.
[7] 何文炯, 蒋庆荣, 随机利率下的增额寿险, 高校应用数学学报, (待发表), 1996.
[8] Gerber, H.U. *Life insurance mathematics*, Spring-Verlag, Berlin, 1990.
[9] Ross, S,M., *Stochastic Processes*, John wiley& Sons. Inc. 1983

A Probability Model of Insurance for Random Indemnity and Random Discount and Some of its Results

YIN JU LIANG   ZHOU YU LI

(University of Ji Nan, Guang Zhou) *(East China Normal University, Shanghai)*

In this paper, a stochastic process model of insurance, i.e. a double random model for random payment and random discounting is constructed firstly, and the properties of payment process are studied under the basic assumptions of the model. Using the theory of measure extension, we devolop the payment process into a random payment measure, aand give the measure representations for insurance and annuity, and give some famous actuarial formulas as well. Finally, we obtain the present value moments of the random payment measure of Hoem model for the random interest rate Gauss process model, which is an extension of the results in [7].

Keywords: random indemnity, random discount, random indemnity measure, random interest rate, Gauss process, Hoem model.