应用概率统计 第一卷
第一期 1985年8月

Chinese. Journal of Applied Probability and
Statistics Vol. 1, No. 1, Aug. 1985

扩散速度有限的多物种反应扩散过程的存在性及唯一性

唐 守 正

(北京师范大学)

§1 引言和符号

反应扩散过程的实际背景见[1], [2]. 严士健、陈木法在[3]中讨论了有限维反应扩散过程的存在性及唯一性以及常返性和遍历性等问题. 陈木法在[4]中首先讨论了一般的单物种无穷维反应扩散过程的存在性. 从现在发表的关于无穷粒子系统的文献来看, 大多数是讨论单物种的生灭及扩散运动, 涉及到无穷维多物种反应扩散过程的文章仅见于[2].

多物种反应扩散过程的直观描述如下:

设对空间进行了一个可数分划 s, 其中每个位置 $u\in s$ 中含有 $d+l$ 种粒子, 我们考虑其中 d 种粒子的反应和扩散, 另外 l 种粒子是参加反应的物种, 在反应过程中保持恒定, 因而不在研究范围之内[2]. 在每一位置 u 上, d 种所研究的粒子数, 记为 $\eta(u)$, 是一个 d 维非负整值向量, 即 $\eta(u)\in Z_+^d=\{0, 1, 2, \cdots\}^d$. 在每一位置 u 上, 物种内或物种间的反应速度用一个 Q 矩阵

$$Q_u=\{q_u(\eta(u), \xi(u)):\eta(u), \xi(u)\in Z_+^d\}$$

来刻划. 第 i 种所研究的粒子在不同位置间的扩散核是一个不可约转移概率矩阵 $P_i=\{p_i(u, v), u, v\in s\}$, $i=1, 2\cdots d$. 第 i 种粒子由 u 扩散到 v 的速度为 $C_{ui}(\eta(u))p_i(u, v)$, $\eta(u)\in Z_+^d$. C_{ui} 是 Z_+^d 上的非负函数, 满足

$$C_{ui}(0)=0, i=1, 2\cdots d, u\in s.$$

为了数学上叙述清楚, 引入下述记号及约定. 令 $E=(Z_+^d)^s$, s 可数, 取 $\alpha\in(s\to R_+)$ 为 s 上严格正函数, 且满足

$$\sum_{v\in s}p_i(u, v)\alpha(v)\leqslant M\alpha(u)\quad i=1, 2\cdots d, u\in s \tag{1.1}$$

我们假定

$$\sup\sum_{x\in s}\hat{p}(x, v)=\Gamma<\infty \tag{1.2}$$

其中

$$\hat{p}(u, v)=\sum_{i=1}^{d}p_i(u, v).$$

注意在条件(1.2)之下, 我们取定 $y_0\in s$, 令

$$\alpha(u)=\sum_{n=0}^{\infty}M^{-n}\hat{p}^n(u, y_0), u\in s$$

本文1984年12月8日收到, 1985年2月7日收到修改稿.

其中 $M>d$ 取定，则 α 满足(1.1)且可和．今后我们取定这样一个 α．

在 E 中引入距离

$$\rho(\eta, \xi)=\sum_u(1-\delta(\eta(u), \xi(u)))\alpha(u).$$

由于 α 可和，对任意 η, $\xi\in E$, $\rho(\eta, \xi)<\infty$. 由 ρ 产生的拓扑就是 E 中的乘积拓扑．按 ρ 距离，E 是完备可分距离空间．则 $\eta^{(k)}\xrightarrow{\rho}\eta$ 等价于对任意 $u\in s$, $\eta^{(k)}(u)\to\eta(u)$．由 ρ 导出的 σ 代数就是 E 中乘积 σ 代数．

称 f 为相对 Lipschitz 函数，若对任意 η、$\xi\in E$

$$|f(\eta)-f(\xi)|\leqslant C\rho(\eta, \xi) \tag{1.3}$$

满足 (1.3) 式的最小 C 记为 $L^\circ(f)$．相对 Lipschitz 函数类记为 $\mathscr{L}^\circ$．注意 $\mathscr{L}^\circ$ 包含在有界一致连续函数类中．

为了与传统的结果对比．我们引入

$$\mathscr{E}=\{\eta\in E: \|\eta\|<\infty\}$$

其中 $\|\eta\|=\sum_{i=1}^d\sum_u\eta_i(u)\alpha(u)$, η_i 为 η 的第 i 个分量．$(\mathscr{E}, \|\cdot\|)$ 也是完备可分距离空间．由 $\|\cdot\|$ 所导出的 σ 代数与 E 中 σ 代数在 $\mathscr{E}$ 中的相对 σ 代数相同．$(\mathscr{E}, \|\cdot\|)$ 中的 Lipschitz 函数类记为 $\mathscr{L}$.

注意，若 $f\in\mathscr{L}^\circ(\mathscr{E})$，则 f 可唯一扩张成 E 上的函数，在这种意义上有 $\mathscr{L}^\circ\subset\mathscr{L}$．特别 $\mathscr{L}^\circ$ 和 $\mathscr{L}$ 包括有界柱函数类．

为了书写方便，约定一些记号，令 $e_{ui}\in(Z_+^d)^s$, $u\in s$, $i=1, 2\cdots d$, 表示 E 中单位向量．记 $e_u=\sum_{i=1}^d e_{ui}$．在 Z_+^d 及 E 中按通常方法引入偏序．若 $k\in Z_+^d$, 约定 $ke_u=\sum_{i=1}^d k_ie_{ui}$.

文中要引入耦合过程，即考虑 $E\times E$ 上的过程，为此按一般方法定义点对 (η, ξ) 和 (η', ξ') 之间的距离

$$\rho((\eta, \xi), (\eta', \xi'))=\rho(\eta, \eta')+\rho(\xi, \xi')$$

类似地定义 $E\times E$ 上的相对 Lipschitz 函数．

§2　定理的陈述和例

现在我们可以用上述符号将多物种反应扩散方程的母元的一般形式写成(2.1)式，为了方便，我们约定在 q_u 的定义域外，$q_u(k, j)=0(k, j<0)$.

$$\begin{aligned}\Omega f(\eta)=&\sum_{u\in s}\sum_{0\neq k\in Z^d}q_u(\eta(u), \eta(u)+k)[f(\eta+ke_u)-f(\eta)]\\&+\sum_{u\in s}\sum_{i=1}^d C_{ui}(\eta(u))\sum_{v\neq u}p_i(u, v)[f(\eta-e_{ui}+e_{vi})-f(\eta)]\end{aligned} \tag{2.1}$$

所谓扩散速度有限，是指

$$0\leqslant C_{ui}(\eta(u))\leqslant R \quad 且 \quad C_{ui}(0)=0 \tag{2.2}$$

为了保证反应速度不太快，我们引入下述条件：称母元满足条件 B，指存在 Z_+^d 上的非负增函数 B 具有下述四条性质

$$当\ |j|\to\infty\ 时, B(j)\to\infty \tag{2.3}$$

$$q_u(j)\equiv\sum_{k\neq0}q_u(j,\ j+k)\leqslant B(j) \tag{2.4}$$

$$B(\eta(u)+e_{ui}(u))-B(\eta(u))\leqslant C_1B(\eta(u))+C_2 \tag{2.5}$$

$$\sum_{k\neq0}q_u(\eta(u),\ \eta(u)+k)(B(\eta(u)+k)-B(\eta(u)))\leqslant a_0B(\eta(u))+b_0 \tag{2.6}$$

其中 a_0, b_0, C_1, C_2 为非负常数．令

$$H=\{\eta\in E:\ \sum_u B(\eta(u))\alpha(u)<\infty\} \tag{2.7}$$

注意到，若 $|\eta|\equiv\sum_{u\in S}\sum_{i=1}^{d}\eta_i(u)<\infty$，则 $\eta\in H$．因而 H 是 E 中稠子集．在条件(2.2)及条件 B 之下，对任意 $f\in\mathscr{L}^\circ$，$\eta\in H$，$\Omega f(\eta)$ 有定义．事实上有

$$\begin{aligned}|\Omega f(\eta)|&\leqslant\sum_u\sum_{k\neq0}q_u(\eta(u),\ \eta(u)+k)L^\circ(f)\alpha(u)\\&\quad+\sum_u\sum_i C_{ui}(\eta(u))\sum_v p_i(u,\ v)L^\circ(f)(\alpha(u)+\alpha(v))\\&\leqslant L^\circ(f)\sum_u B(\eta(u))\alpha(u)+L^\circ(f)R(M+1)d\sum_u\alpha(u)\end{aligned}$$

此外，令

$$g(\eta)=\sum_u B(\eta(u))\alpha(u)\quad \eta\in H \tag{2.8}$$

则在条件(2.2)和条件 B 之下

$$\begin{aligned}\Omega g(\eta)&\leqslant\sum_u\sum_k q_u(\eta(u),\ \eta(u)+k)(B(\eta(u)+k)-B(\eta(u)))\alpha(u)\\&\quad+\sum_u\sum_i C_{ui}(\eta(u))\sum_v p_i(u,\ v)(C_1B(\eta(u))+C_2)\alpha(v)\\&\leqslant a_0\sum_u B(\eta(u))\alpha(u)+b_0\sum_u\alpha(u)\\&\quad+R\Gamma dC_1\sum_v B(\eta(v))\alpha(v)+R\Gamma dC_2\sum_v\alpha(v)\\&\equiv ag(\eta)+b\end{aligned} \tag{2.9}$$

因而当 $\eta\in H$ 时，$\Omega g(\eta)$ 有定义．因此 Ω 的定义域至少包括 $\mathscr{L}^\circ(H)\oplus\{g\}$.

因为若 $f\in\mathscr{L}^\circ(H)$，则 f 可以唯一扩张成 $\mathscr{L}^\circ$ 中的函数，因而以后我们不再区分 $f\in\mathscr{L}^\circ(H)$ 或 $f\in\mathscr{L}^\circ$.

现在我们可以把扩散速度有限时多物种反应扩散过程的存在唯一性定理述叙如下．关于唯一性的确切含义见命题 3.5.

定理 2.1 若 $\sup_v\sum_u\hat{p}_i(u,\ v)=\Gamma<\infty$，假定 Ω 满足条件(2.2)及条件 B，则存在 $\mathscr{L}^\circ$ 上唯一的一个以 Ω 为无穷小算子(依一致范数)的压缩半群 $S(t)$，$S(0)=I$，使得对一切 $f\in\mathscr{L}^\circ$，它具有如下性质:

$$|S(t)f(\eta)-S(t)f(\eta')|\leqslant L^\circ(f)e^{2RMdt}\rho(\eta,\ \eta'),\quad \eta,\ \eta'\in E \tag{2.10}$$

$$S(t)f(\eta)=f(\eta)+\int_0^t\Omega S(s)f(\eta)ds\quad \eta\in H \tag{2.11}$$

$$S(t)f(\eta)\text{关于 } t \text{ 连续}\quad \eta\in E \tag{2.12}$$

$$\Omega S(t)f(\eta)\text{关于 } t \text{ 连续}\quad \eta\in H \tag{2.13}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)f(\eta)-f(\eta)}{t}=\Omega f(\eta)\quad \eta\in H \tag{2.14}$$

此外，存在取值于 E 上的马氏过程($\{\eta_t\}$, P^η)，使得

$$S(t)f(\eta)=E^{\eta}f(\eta_t)=\int f(\xi)P(t,\ \eta,\ d\xi)$$

$$f\in\mathscr{L}^{\circ},\ \eta\in E \tag{2.15}$$

其中 $P(t,\ \eta,\ d\xi)$ 为 $\{\eta_t\}$ 相应的转移概率函数.

进一步,若有

$$\sum_{k\neq 0}\Big(q_u(\eta(u),\ \eta(u)+k)\sum_{i=1}^{d}k_i\Big)\leqslant a_1\sum_{i=1}^{d}\eta_i(u)+b_1 \tag{2.16}$$

则对任意 $\eta\in\mathscr{E}$ 有

$$P(t,\ \eta,\ \mathscr{E})=1 \tag{2.17}$$

因而可将相空间限制到 $\mathscr{E}$ 上,而将 $S(t)$ 的定义域扩张到 $\mathscr{L}$ 类上,(2.15)仍然成立,即

$$S(t)f(\eta)=E^{\eta}f(\eta_t)=\int_{\mathscr{E}}f(\xi)P(t,\ \eta,\ d\xi)$$

$$f\in\mathscr{L},\ \eta\in\mathscr{E} \tag{2.18}$$

但这时不一定有 $S(t)f\in\mathscr{L}$.

最后举两个例子说明上述条件的应用.

例 1 Volterra-Lotka 模型([2]). 其物种间反应为

$$A+X_1\xrightarrow{\lambda_1}2X_1,\quad X_1+X_2\xrightarrow{\lambda_2}2X_2,\quad X_2+B\xrightarrow{\lambda_3}E+B$$

因而对应的表示反应速度的 Q 矩阵 q_u 为

$$q_u((j_1,\ j_2),\ (k_1,\ k_2))=\begin{cases}\lambda_1 j_1 & k_1=j_1+1,\ k_2=j_2,\\ \lambda_2 j_1 j_2 & k_1=j_1-1,\ k_2=j_2+1,\\ \lambda_3 j_2 & k_1=j_1,\ k_2=j_2-1,\\ 0 & \text{其它}(j_1,\ j_2)\neq(k_1,\ k_2),\end{cases}$$

$$q_u(j_1,\ j_2)=\lambda_1 j_1+\lambda_2 j_1 j_2+\lambda_3 j_2,$$

取 $B(j_1,\ j_2)=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(j_1+j_2)^2$,则 B 满足条件 B. 因而只要扩散速度有限,相应的过程存在且唯一.

例 2 Brusselator 模型([2]),其反应为

$$q_u((j_1,\ j_2)(k_1,\ k_2))=\begin{cases}\lambda_1 & k_1=j_1+1,\ k_2=j_2,\\ \lambda_2 j_1 & k_1=j_1-1,\ k_2=j_2+1,\\ \dfrac{\lambda_3}{2}j_1(j_1-1)j_2 & k_1=j_1+1,\ k_2=j_2-1,\\ \lambda_4 j_1 & k_1=j_1-1,\ k_2=j_2,\\ 0 & \text{其它}(j_1,\ j_2)\neq(k_1,\ k_2),\end{cases}$$

$$q_u((j_1,\ j_2))=\lambda_1+(\lambda_2+\lambda_4)j_1+\frac{\lambda_3}{2}j_1(j_1-1)j_2,$$

取 $B(j_1,\ j_2)=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)(j_1+j_2)^3$, 则 B 满足条件 B. 因而只要扩散速度有限,该过程存在且唯一. 同时易验证上述两例的 q_u 都满足(2.16)式,因而可将其相空间限制到 $\mathscr{E}$ 上.

§3 唯一性证明

为了方便,我们先证明 $\mathscr{L}^{\circ}(E)$上的半群 $s(t)$ 在一定意义下若存在则唯一. 在证明过程中

推论出几个以后要用的估计式. 为此先讨论 Polish 空间上的极大值原理及其推论. 然后再回到反应扩散过程.

设 (E, ρ) 是 Polish 空间, $C_u(E)$ 是 E 上的一致连续函数类. Φ 是 $C_u(E)$ 的线性子集, $1\in\Phi$. H 是 E 的 σ 紧稠子集,即存在 $H_n\uparrow H$, H_n 是紧集列, H 在 E 中稠, Φ 在 H 上的限制记为 Φ_H. 若 $f\in\Phi_H\subset C_u(H)$,则 f 可唯一扩张成 Φ 中函数,因而可将 f 看成定义在 E 上的函数. 设 Ω 是 Φ_H 上有定义的算子.

引理 3.1(极大值原理) 若 Ω 满足下述条件:

(i) $\Omega 1=0$ (3.1)

(ii) 若 $\varphi\in\Phi_H$, 存在 $\eta_0\in H$ 使 $\varphi(\eta_0)=\inf\limits_{\eta\in H}\varphi(\eta)$, 则

$$\Omega\varphi(\eta_0)\geqslant 0 \tag{3.2}$$

(iii) 存在 $g\in\Phi_H$, $g(\eta)\geqslant 0$ 满足

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(a) 存在常数 } a\geqslant 0,\ b\geqslant 0 \text{ 使 } \Omega g(\eta)\leqslant ag(\eta)+b & \eta\in H\\ \text{(b) 对任意 } m\geqslant 0 \text{ 存在紧集 } H_m\subset H \text{ 使当 } \eta\in H-H_m\end{array}\right\}\text{时}, g(\eta)\geqslant m \tag{3.3}$$

则下述极大值原理成立:

设 $F(\cdot, \cdot)$是 $[0, \infty)\times H$ 上的二元连续函数,对任意 $s\in[0, \infty)$, $F(s, \cdot)\in\Phi_H$ 有下界. 对任意 $\eta\in H$, $F(\cdot, \eta)$连续可微,且

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial F}{\partial s}(s, \eta)\geqslant\Omega F(s, \eta) & \eta\in H,\ s\in[0, \infty)\\ F(0, \eta)\geqslant 0 & \eta\in H\end{array}\right\} \tag{3.4}$$

则

$$F(s, \eta)\geqslant 0, \quad s\in[0, \infty),\ \eta\in E \tag{3.5}$$

特别, 如果 H 是 E 的可数稠集, H_m 是 H 的有限子集,则去掉 F 是二元连续函数的条件,结论仍然成立.

证明 在唯一扩张意义下, $F(s, \cdot)\in\Phi\subset C_u(E)$, 因而(3.5)式有意义. 由一致连续性,为证(3.5)式,只需证明

$$F(s, \eta)\geqslant 0, \quad s\in[0, \infty),\ \eta\in H$$

(A) 取定 $T>0$, 令 $f(t, \eta)=F(T-t, \eta)$, $(t\leqslant T)$. (3.4)式可以写成

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial f}{\partial s}(s, \eta)+\Omega f(s, \eta)\leqslant 0 & \eta\in H,\ s\leqslant T\\ f(T, \eta)\geqslant 0 & \eta\in H\end{array}\right\} \tag{3.6}$$

先假定

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, \eta)+\Omega f(s, \eta)<0 \quad \eta\in H,\ s\leqslant T \tag{3.7}$$

这时若存在 $s_0<T$, $\eta_0\in H$, 使

$$f(s_0, \eta_0)\leqslant f(s, \eta) \quad s\leqslant T,\ \eta\in H$$

由条件(ii)知 $\Omega f(s_0, \eta_0)\geqslant 0$ 且 $\dfrac{\partial f}{\partial s}(s_0, \eta_0)\geqslant 0$ 与(3.7)矛盾, 故 f 在 $[0, T]\times H$ 上若有最小值,不能在 $[0, T)\times H$ 上达到.

(B) 现在对 f 去掉条件(3.7), 设 f 满足(3.6). 令

$$f_\varepsilon(s, \eta)=f(s, \eta)+(T-s)\varepsilon+\varepsilon e^{-as}\left(g(\eta)+\frac{b}{a}\right)$$

(显然不妨设 $a>0$)，于是

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial s}(s, \eta)=\frac{\partial f(s, \eta)}{\partial s}-\delta-\varepsilon e^{-as}(ag(\eta)+b) \quad \eta\in H$$

$$\Omega f_\varepsilon(s, \eta)=\Omega f(s, \eta)+\varepsilon e^{-as}\Omega g(\eta) \quad \eta\in H$$

由条件(iii)的 a)及(3.6)得

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial s}(s, \eta)+\Omega f_\varepsilon(s, \eta)<0$$

按(A)，f_ε 若在 $[0, T]\times H$ 上有最小值，不能在 $[0, T)\times H$ 上达到.

由条件(iii)的(b)，存在 m 当 $\eta\in H-H_m$，$s\in[0, T]$ 时 $f_\varepsilon(s, \eta)\geqslant 0$. 由于 $[0, T]\times H_m$ 是紧集，f_ε 是二元连续函数，所以 $f_\varepsilon(s, \eta)$ 必在 $[0, T]\times H_m$ 上达到最小.（特别，如果 H 是可数集，$H_m\subset H$ 是有限集，只要求对任意 $\eta\in H_m\subset H$，$f(\cdot, \eta)$ 是连续函数，f_ε 就必在 $[0, T]\times H_m$ 上达到最小）. 即存在 $(s_1, \eta_1)\in[0, T]\times H_m$ 使

$$r\equiv f_\varepsilon(s_1, \eta_1)=\inf_{\substack{s\in[0,T]\\ \eta\in H_m}} f_\varepsilon(s, \eta)$$

若 $r<0$，则推出 $r=\inf\limits_{\substack{s\in[0,T]\\ \eta\in H}} f_\varepsilon(s, \eta)$. 由(A)知这时必有 $s_1=T$，这与 $f_\varepsilon(T, \eta_1)\geqslant 0$ 矛盾. 综上所述，得到 $f_\varepsilon(s, \eta)\geqslant 0$，$\forall(s, \eta)\in[0, T]\times H$，令 $\varepsilon\to 0$ 得 $F(T-s, \eta)\geqslant 0$，由 T 的任意性知(3.5)成立.

我们首先把极大值原理用于 E 是可数集的情况，这时取 $H=E$，$\{H_n\}$ 是 H 的有限子集列. 若 $Q=\{q(\eta, \xi):\eta, \xi\in E\}$ 是全稳定保守 Q 矩阵，则由 Q 所决定的母元 Ω 自然满足条件(3.1)和(3.2). 取 Φ 为 $H=E$ 上的如下函数类

$$\Phi=\{f: \sum_\xi q(\eta, \xi)f(\xi)<\infty\}$$

记 $\mathscr{G}$ 为 E 上有紧支撑的函数类. 因为当 $f\in\mathscr{G}$ 时，保守 Q 过程 $S(t)f$ 自然满足向后方程

$$\frac{\partial S(t)f}{\partial t}=\Omega S(t)f \tag{3.8}$$

因而得到保守 Q 过程唯一性的一个充分条件.

引理 3.2 若 E 可数，q 是 E 上全稳定保守 Q 矩阵，并且存在 $g(\eta)\geqslant 0$，$g\in\Phi$，使

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)}\ \ \Omega g(\eta)\leqslant ag(\eta)+b\\ &\text{(ii)}\ \lim_{\eta\to\infty} g(\eta)=\infty\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

则此 Q 过程唯一.

证明 因为由 q 所决定的母元 Ω 自然满足条件(3.1)和(3.2)，由条件(3.9)保证条件(3.3)，因而极大值原理成立，固定 $\xi\in E$，取 $f(\eta)=\delta(\eta, \xi)$. 若存在二个 Q 过程 $S_1(t)$ 和 $S_2(t)$，令 $F(t, \eta)=(S_1(t)-S_2(t))f(\eta)$ 由(3.8)得

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, \eta)=\Omega F(t, \eta)$$

$$F(0, \eta)=0$$

由极大值原理推出 $F(t, \eta)=0$，即 $S_1(t)=S_2(t)$.

下面再由此推出二个以后要用的估计式.

引理 3.3 设 E 是可数集，Ω 是全稳定保守 Q 矩阵对应的母元，满足条件(3.9)，$S(t)$ 是相应的半群. $F(s, \cdot)$ 下有界，$F(\cdot, \eta)$ 连续可微，$F(0, \eta)\geqslant f(\eta)\geqslant 0$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,\ \eta)\geqslant \Omega F(t,\ \eta) \tag{3.10}$$

则
$$F(t,\ \eta)\geqslant S(t)f(\eta)$$

证明 令

$$f_n(\eta)=\begin{cases} f(\eta)\wedge n & |\eta|\leqslant n \\ 0 & |\eta|>n \end{cases}$$

$$\varphi_n(t,\ \eta)=F(t,\ \eta)-S(t)f_n(\eta)$$

于是 φ_n 满足(3.4),下有界.由极大值原理 $\varphi_n(t,\eta)\geqslant 0$,即 $F(t,\eta)\geqslant S(t)f_n(\eta)$,因 $f_n(\eta)\uparrow f(\eta)$.由单调收敛定理得 $F(t,\ \eta)\geqslant S(t)f(\eta)$.

引理 3.4 设 E 为可数集,Ω 是全稳定保守 Q 矩阵相应的母元,满足条件(3.9),$f(\eta)\geqslant 0$,

$$\Omega f(\eta)\leqslant a(f(\eta)+b) \quad a,\ b\geqslant 0 \tag{3.11}$$

则
$$S(t)f(\eta)\leqslant e^{at}f(\eta)+b(e^{at}-1)$$

证明 令 $F(t,\ \eta)=e^{at}f(\eta)+b(e^{at}-1)$. 由条件(3.11)易验证 F 满足(3.10),由引理 3.3 知结论成立.

现在我们把极大值原理用于反应扩散过程,相空间 $E=(Z_+^q)^s$,母元 Ω 由(2.1)定义.

命题 3.5 在定理 2.1 的条件下,具有性质(2.10),(2.11),(2.13) 的半群若存在则唯一.

证明 令

$$H_n=\{\eta\in E:\sum_u B(\eta(u))\alpha(u)\leqslant n\} \quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

$$H=\bigcup_n H_n$$

于是 H 就是(2.7)式定义的 H.

(1) 往证 H_n 是$(E,\ \rho)$中的紧集.

因为$(E,\ \rho)$的拓扑是乘积拓扑,令

$$K_n=\left\{\eta\in E:B(\eta(u))\leqslant\frac{n}{\alpha(u)},\ u\in S\right\}$$

由条件(2.3)知 $\{j\in Z_+^q:B(j)\leqslant m\}$ 是有限集,所以 K_n 是紧集. 由于 $H_n\subset K_n$,为证 H_n 是紧集,只需证 H_n 是闭集. 令 $H_n\ni\eta_{(k)}\xrightarrow{\rho}\eta$. 于是对任意 $u\in S$, $\eta_{(k)}(u)\to\eta(u)$. 再由

$$\begin{aligned} n&\geqslant\varliminf_{k\to\infty}\sum_u B(\eta_{(k)}(u))\alpha(u)\geqslant\sum_u\lim_{k\to\infty}B(\eta_{(k)}(u))\alpha(u) \\ &=\sum_u B(\eta(u))\alpha(u) \end{aligned}$$

即 $\eta\in H_n$,知 H_n 是闭集,因而是紧集.

(2) 由(1)知 H 是 σ 紧集,H 是 E 中稠子集,按(2.8)式取 g,则当 $\eta\in H-H_m$ 时 $g(\eta)\geqslant m$, 再由(2.9)式知 Ω 满足(3.3). 由 Ω 定义,显然 Ω 满足(3.1)和(3.2), 因此极大值原理成立.

(3) 若存在二个半群 $S_1(t)$ 和 $S_2(t)$,则对任意 $f\in\mathscr{L}^\circ$(必有界),由 $S_i(t)$的压缩性,$S_i(t)f$ 有界,令 $F(t,\ \eta)=S_1(t)f(\eta)-S_2(t)f(\eta)$,于是 F 下有界, 由条件(2.10)易证 $F(t,\ \eta)$二元连续,由(2.11)及(2.13) 知 $\frac{\partial F}{\partial t}(t,\ \eta)=\Omega F(t,\ \eta)$ 及 $F(0,\ \eta)=0$. 由极大值原理知 $F(t,\ \eta)\equiv 0$. 因而 $S_1(t)$和 $S_2(t)$在 $\mathscr{L}^\circ$ 上相同. 唯一性证毕.

§4 存在性证明

存在性证明与[4]中存在性证明类似，因而我们只写出证明的主要步骤及估计式，而略去细节的讨论.

当 S 有限时，$E=(Z_+^d)^S$ 是可列集，由(2.9)式及引理 3.2 知 Ω 所对应的 Q 过程存在且唯一. 现在引入 $\mathscr{L}^\circ(E\times E)$ 上的耦合算子

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}f(\eta,\xi)=&\sum_{\substack{u\\ \eta(u)\neq\xi(u)}}\sum_{k\neq 0}q_u(\eta(u),\eta(u)+k)[f(\eta+ke_u,\xi)-f(\eta,\xi)]\\&+\sum_{\substack{u\\ \eta(u)\neq\xi(u)}}\sum_{k\neq 0}q_u(\xi(u),\xi(u)+k)[f(\eta,\xi+ke_u)-f(\eta,\xi)]\\&+\sum_{\substack{u\\ \eta(u)=\xi(u)}}\sum_{k\neq 0}q_u(\eta(u),\xi(u)+k)[f(\eta+ke_u,\xi+ke_u)-f(\eta,\xi)]\\&+\sum_{\substack{u\\ \xi(u)\neq\eta(u)}}\sum_{i=1}^{d}C_{ui}(\eta(u))\sum_{v\neq u}p_i(u,v)[f(\eta-e_{ui}+e_{vi},\xi)-f(\eta,\xi)]\\&+\sum_{\substack{u\\ \xi(u)\neq\eta(u)}}\sum_{i=1}^{d}C_{ui}(\xi(u))\sum_{v\neq u}p_i(u,v)[f(\eta,\xi-e_{ui}+e_{vi})-f(\eta,\xi)]\\&+\sum_{\substack{u\\ \xi(u)=\eta(u)}}\sum_{i=1}^{d}C_{ui}(\eta(u))\sum_{v\neq u}p_i(u,v)[f(\eta-e_{ui}+e_{vi},\xi-e_{ui}+e_{vi})-f(\eta,\xi)]\\&f\in\mathscr{L}^\circ(E\times E),\ (\eta,\xi)\in E\times E\end{aligned}\tag{4.1}$$

$\overline{\Omega}$ 仍然对应一个 Q 矩阵，取 $g:E\times E\to R$

$$g(\eta,\xi)=\sum_u(B(\eta(u))+B(\xi(u)))\alpha(u)$$

类似于(2.9)知存在常数 $a',\ b'\geqslant 0$ 使

$$\Omega g(\eta)\leqslant a'g(\eta)+b'\tag{4.2}$$

由引理 3.2 相应的 Q 过程唯一.

引理 4.1 令 $\overline{p}(t,(\eta,\xi),(\eta',\xi'))$ 是由 $\overline{\Omega}$ 所决定的 Q 过程，则有下述估计式

$$\sum_{(\eta',\xi')\in E\times E}\overline{p}(t,(\eta,\xi),(\eta',\xi'))\rho(\eta',\xi')\leqslant\rho(\eta,\xi)e^{2RMdt}$$

证明 由引理 3.3 及(4.2)式，只须证明

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\eta,\xi)e^{2MRdt}\geqslant\Omega\rho(\eta,\xi)e^{2MRdt}$$

或只须证

$$2dRM\rho(\eta,\xi)\geqslant\Omega\rho(\eta,\xi)\tag{4.3}$$

事实上

(4.3)式右端反应项

$$\begin{aligned}&-\sum_{\substack{u\\ \eta(u)\neq\xi(u)}}\sum_{k\neq 0}q_u(\eta(u),\eta(u)+k)[\delta(\eta(u),\xi(u))-\delta(\eta(u)+k,\xi(u))]\alpha(u)\\&+\sum_{\substack{u\\ \eta(u)\neq\xi(u)}}\sum_{k\neq 0}q_u(\xi(u),\xi(u)+k)[\delta(\eta(u),\xi(u))-\delta(\eta(u),\xi(u)+k)]\alpha(u)\\&\leqslant 0\end{aligned}$$

(4.3)式右端扩散项

$$=\sum_{\substack{u\\ \eta(u)\neq\xi(u)}}\sum_{i=1}^{d} C_{ui}(\eta(u))\sum_{v\neq u}p_i(u,v)[\delta(\eta(u),\xi(u))\alpha(u)+\delta(\eta(v),\xi(v))\alpha(v)$$

$$-\delta(\eta(u)-e_{ui}(u),\xi(u))\alpha(u)-\delta(\eta(v)+e_{vi}(v),\xi(v))\alpha(v)]$$

$$+\sum_{\substack{u\\ \eta(u)\neq\xi(u)}}\sum_{i=1}^{d} C_{ui}(\xi(u))\sum_{v\neq u}p_i(u,v)[\delta(\eta(u),\xi(u))\alpha(u)+\delta(\eta(v),\xi(v))\alpha(v)$$

$$-\delta(\eta(u),\xi(u)-e_{ui}(u))\alpha(u)-\delta(\eta(v),\xi(v)+e_{vi}(v))\alpha(v)]$$

$$\leqslant 2RM\sum_{i=1}^{d}\sum_{\substack{u\\ \eta(u)\neq\xi(u)}}\alpha(u)=2RMd\rho(\eta,\xi)$$

引理证毕.

推论 4.2 当 S 有限时,若 $f\in\mathscr{L}^\circ$,则 $S(t)f\in\mathscr{L}^\circ$ 且 $L^\circ(S(t)f)\leqslant L^\circ(f)e^{2RMdt}$

证明 令 $f(\eta,\xi)=|f(\eta)-f(\xi)|$, $\bar{S}(t)$ 是 $\bar{\Omega}$ 所决定的半群,则

$$|S(t)f(\eta)-S(t)f(\xi)|\leqslant\bar{S}(t)f(\eta,\xi)\leqslant L^\circ(f)\bar{S}(t)\rho(\eta,\xi)$$

$$\leqslant L^\circ(f)e^{2MRdt}\rho(\eta,\xi)$$

以下设 S 可数无穷,取定 S 的有限子集列 S_n 上升到 S,定义 $E_n=(Z_+^d)^{S_n}$ 上的母元 Ω_n

$$\Omega_nf(\eta)=\sum_{u\in S_n}\sum_{k\neq 0}q_u(\eta(u),\eta(u)+k)[f(\eta+ke_u)-f(\eta)]$$

$$+\sum_{u\in S_n}\sum_{i=1}^{d}C_{ui}(\eta(u))\sum_{v\neq u}p_{in}(u,v)[f(\eta-e_{ui}+e_{vi})-f(\eta)]\tag{4.3}$$

其中

$$p_{in}(u,v)=\begin{cases}p_i(u,v), & u,v\in S_n,\ u\neq v,\\ p_i(u,u)+\sum_{v\notin S_n}p_i(u,v), & u\in s_n,\ u=v,\\ 1, & u=v\notin S_n,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

Ω_n 对应的半群记为 $S_n(t)$, 由 Ω_n 按(4.1)造耦合算子 $\bar{\Omega}_n$及其对应半群 $\bar{S}_n(t)$. 检查引理 4.1 及推论 4.2 的证明知, 对 $\bar{S}_n(t)$ 引理 4.1 成立,因而对 $S_n(t)$ 推论 4.2 成立,但需将估计式中的 M 换成 $M+1$.

引理 4.3 对一切 $n\leqslant m<\infty$, $t>0$, $f\in\mathscr{L}^\circ$ 有

$$|S_n(t)f(\eta)-S_m(t)f(\eta)|\leqslant C(t,f,\eta,n,m)$$

其中

$$C(t,f,\eta,n,m)$$

$$=(e^{2R(M+1)dt}/2Rd(M+1))L^\circ(f)[\sum_{u\in S_m-S_n}B(\eta(u))\alpha(u)$$

$$+R\sum_u\sum_v\sum_{i=1}^{d}|p_{in}(u,v)-p_{im}(u,v)|(\alpha(u)+\alpha(v))]\quad \eta\in(Z_+^d)^{S_m}$$

证明 我们可将 $S_n(t)f(\eta)$看成$(Z_+^d)^{S_m}$ 上的函数因而 $S_n(t)f(\eta)$, $\eta\in(Z_+^d)^S$,有意义. 用 $q_u^l(\eta(u),\eta(u)+k)=q_u(\eta(u),\eta(u)+k)\wedge l$ 代替(4.3)式中的 q_u, 得到有界算子 Ω_n^l. 因而有([5])

$$S_n^l(t)f(\eta)-S_m^l(t)f(\eta)=\int_0^t S_n^l(s)(\Omega_n^l-\Omega_m^l)S_m^l(t-s)f(\eta)ds\tag{4.4}$$

因为引理 4.1, 推论 4.2. 对 Ω_n^l 也成立,所以有

$$|(\Omega_n^l-\Omega_m^l)S_m^l(t-s)f(\eta)|\leqslant L^\circ(f)e^{2R(M+1)dt}\sum_{u\in S_m-S_n}B(\eta(u))\alpha(u)$$
$$+L^\circ(f)Re^{2R(M+1)dt}\sum_u\sum_v\sum_{i=1}^d|p_{in}(u,v)$$
$$-p_{im}(u,v)|(\alpha(u)+\alpha(v))$$

代入(4.4)式，注意 $S_n^l(s)f(\eta)$ 的值与 η 在 S_n 外的坐标无关，因而有

$$|S_n^l(t)f(\eta)-S_m^l(t)f(\eta)|\leqslant C(t,f,\eta,n,m)$$

由[6]知存在子列 $l_k\to\infty$ 使 $S_n^{l_k}(t)f(\eta)\to S_n(t)f(\eta)$，因而得证引理.

引理 4.4 对每个 $f\in\mathscr{L}^\circ$, $\eta\in H$, $t\geqslant0$ 有

(i) $S_n(t)f(\eta)$ 是 Cauchy 列，其极限记为 $S(t)f(\eta)$；

(ii) $S(t)f(\eta)\in\mathscr{L}^0(H)$ 且

$$L^\circ(S(t)f(\eta))\leqslant L^\circ(f)e^{2R(M+1)dt}\tag{4.5}$$

由此 $S(t)f\in\mathscr{L}^\circ(E)$；

(iii) $S(t)$ 是 $\mathscr{L}^\circ$ 上的正算子，依一致范数压缩.

证明 由引理 4.3 及控制收敛定理得(i). 由推论 4.2 及(i)得(ii), (iii)可由(i)及 $S_n(t)$ 的压缩性得到.

引理 4.5 $S(t)$ 是 $\mathscr{L}^\circ$ 上的半群.

证明 首先注意由引理 4.3, 及 $S(t)f$ 的构造，若 $\mathscr{G}\subset\mathscr{L}^\circ$，对任意 $f\in\mathscr{G}$, $L^\circ(f)\leqslant C<\infty$, 则 $S_n(t)f(\eta)\to S(t)f(\eta)$ 对 $f\in\mathscr{G}$ 是一致的，即对任意 $\eta\in H$, $\varepsilon>0$ 存在 $N(\eta,\varepsilon)$，使对任意 $f\in\mathscr{G}$，当 $n\geqslant N(\eta,\varepsilon)$ 时

$$|S_n(t)f(\eta)-S(t)f(\eta)|<\varepsilon.$$

由引理 4.2 及引理 4.4 知族 $\{S_n(t)f,\ S(t)f\}$ 的 Lipschitz 范数一致有界，由此得

$$(S_n(t)-S(t))S_n(s)f(\eta)\to0$$

类似可证 $S(t)(S_n(s)-S(s))f(\eta)\to0$，由此得到

$$S_n(t)S_n(s)f(\eta)\to S(t)S(s)f(\eta)\quad(\eta\in H)$$

再由
$$S_n(t)S_n(s)f(\eta)=S_n(t+s)f(\eta)\to S(t+s)f(\eta),\quad\eta\in H$$
及 $S(t+s)f$ 的一致连续性，得 $S(t)$ 的半群性.

由 $S(t)$ 的半群性及 E 是 Polish 空间，可用标准方法得到以 E 为相空间的随机过程 $\{\eta_t, p^\eta\}$，它满足

$$E^{p^\eta}f(\eta_t)=\int f(\xi)p(t,\eta,d\xi)=S(t)f(\eta)\quad f\in\mathscr{L}^\circ\tag{4.6}$$

$p(t,\eta,d\xi)$ 是相应的转移概率.

引理 4.6 半群 $S(t)$ 满足性质(2.10)$\simeq$(2.14).

证明 (2.10)即引理 4.4 的(ii). 由 $S(t)$ 的构造引理(4.3)及

$$|\Omega f(\eta)|\leqslant L^\circ(f)\sum_u B(\eta(u))\alpha(u)+L^\circ(f)R(M+1)d\sum_u\alpha(u)\tag{4.7}$$

以及

$$S_n(t)f(\eta)=f(\eta)+\int_0^t\Omega_nS_n(s)f(\eta)ds\quad f\in\mathscr{L}^\circ,\ \eta\in H\tag{4.8}$$

由控制收敛定理，得(2.11). (2.12)显然. 由(4.7)式及引理 4.4 可直接估计 $\Omega S(t)f(\eta)$ 的连续性. 最后由(2.10), (2.11)可得(2.14).

到此我们已经证明了定理 2.1 的前一部分. 现在来证明定理 2.1 的最后一个结论，即若

q_u满足(2.16)则有(2.17)和(2.18).

首先往证(2.17). 若 $\eta\in\mathscr{E}$, 令

$$f_k(\eta)=\sum_{u\in S}\sum_{i=1}^{d}(\eta_i(u)\wedge k)\alpha(u)$$

于是

$$\begin{aligned}|f_k(\xi)-f_k(\eta)|&\leqslant\sum_{u\in S}\sum_{i=1}^{d}|\eta_i(u)\wedge k-\xi_i(u)\wedge k|\alpha(u)\\&\leqslant kd\sum_{\substack{u\\ \eta(u)\neq\xi(u)}}\alpha(u)=kd\rho(\eta,\ \xi)\end{aligned}$$

因此, 对任意 $k>0$, $f_k\in\mathscr{L}^\circ$. 另一方面, 显然 $f_k(\xi)\uparrow\|\xi\|$.

当 $S=S_n$ 有限时, 由(2.16)及引理 3.4(不妨设 $a_1>0$)得

$$\int\|\xi\|p_n(t,\ \eta,\ d\xi)\leqslant e^{a_1t}\|\eta\|+\frac{b_1}{a_1}(e^{a_1t}-1)$$

从而

$$\int f_k(\xi)p_n(t,\ \eta,\ d\xi)\leqslant e^{a_1t}\|\eta\|+\frac{b_1}{a_1}(e^{a_1t}-1)$$

令 $n\to\infty$, 由 $f_k\in\mathscr{L}^\circ$ 及引理 4.4(i)得

$$\int f_k(\xi)p(t,\ \eta,\ d\xi)\leqslant e^{a_1t}\|\eta\|+\frac{b_1}{a_1}(e^{a_1t}-1)$$

再令 $k\to\infty$, 由单调收敛定理得

$$\int\|\xi\|p(t,\ \eta,\ d\xi)<\infty$$

由此得(2.17).

最后由 $f\in\mathscr{L}$ 蕴含 $|f(\eta)|\leqslant L(f)\|\eta\|+|f(0)|$ 立得(2.18). 定理证毕.

致谢. 本文是在严士健教授指导下完成的, 并得到陈木法及讨论班上其他同志的帮助, 特此致谢.

参 考 文 献

[1] Haken, H., *Synergetics*, *Springer-Verlag*, 1977.

[2] 严士健, 李占炳, 非平衡系统的模型及 *Master* 方程的建立. 物理学报, **29** (1980), 139—152.

[3] 严士健, 陈木法, 多维 Q 过程. 待发表

[4] Chen, M. F., *Infinite dimentional reaction-diffusion precesses*, to appear.

[5] Liggett. T. M., Spitzer. F., Ergodic theorems for coupled random walks and other system with locally interacting components, *Z. W. V. G.*, **56** (1981), 443—468.

[6] 陈木法, 马链的基本耦合, 北京师范大学学报, No. **4** (1984), 3—10.

THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF MULTI-SPECIES REACTION-DIFFUSION PROCESSES

TANG SHOUZHENG
(*Beijing Normal University*)

Let S be a countable set and $E=(Z^d)^S$ the configuration space, $(P_i(u,v): u, v\in S)$ is a Markov matrix representing diffusion kernel of i-species. $(q_u(k, j): k, j\in Z)$ is a Q-matrix representing reactions among the species in position $u\in S$. In the paper, we use two kinds of distance. One is

$$\rho(\eta, \xi)=\sum_{u\in S}(1-\delta(\eta(u), \xi(u)))\alpha(u) \quad \eta, \xi\in E$$

where α is a strict positive function on S, it is summable and satisfies

$$\sum_{v\in S}\Big(\sum_{i=1}^{d} P_i(u, v)\Big)\alpha(v)\leqslant M\alpha(u) \quad u\in S.$$

On the other hand, the norm of $\eta\in E$ induces a distance on $\mathscr{E}=(\eta\in E:\|\eta\|<\infty)$, which we call norm distance. The set of all Lipschitz function on E, relative to ρ, is denoted by $\mathscr{L}^\circ$ and the one on $\mathscr{E}$, relative to the norm distance, is denoted by $\mathscr{L}$.

The formal generator of a multi-species reaction-diffusion processes(M. R. D. P) is that

$$\Omega f(\eta)=\sum_{u\in S}\sum_{k\neq 0}q_u(\eta(u), \eta(u)+k)(f(\eta+ke)-f(\eta))$$
$$+\sum_{u\in S}\sum_{i=1}^{d} C_{ui}(\eta(u))\sum_{v\neq u} P_i(u, v)(f(\eta-e_{ui}+e_{vi})-f(\eta)) \quad f\in\mathscr{L}^\circ, \eta\in H$$

where e_{ui} is a unit vector in E, $ke_u=\sum_{i=1}^{d}k_ie_{ui}$. H is a σ-compact subset of E.

If $$0\leqslant C_{ui}(\eta(u))\leqslant R \quad\text{and}\quad C_{ui}(0)=0,$$

and the following condition holds: there exists a nonnegative, non-decreasing function B on Z_+^d such that

(1) $B(k)\to\infty$ as $|k|\to\infty$

(2) $q_u(j)\equiv\sum_{k\neq 0}q_u(j, j+k)\leqslant B(j)$

(3) $B(\eta(u)+e_{ui}(u))-B(\eta(u))\leqslant cB(\eta(u))+d \quad i=1, 2, \cdots, d$

(4) $\sum_{k\neq 0}q_u(\eta(u), \eta(u)+k)(B(\eta(u)+k)-B(\eta(u)))\leqslant aB(\eta(u))+b$

where, a, b, c, d are nonnegative constants, then there exists a unique constract semigroup $S(t)$ on $\mathscr{L}^\circ$ with the generator Ω, and there exists a Markov process $((\eta_t), p^\eta)$, associated with $S(t)$. Moreover, if

$$\sum_{k\neq 0}(q_u(\eta(u), \eta(u)+k)\sum_{i=1}^{d}k_i)\leqslant a_1\sum_{i=1}^{d}\eta_i(u)+b_1,$$

then $P(t, \eta, \mathscr{E})=1$ for any $\eta\in\mathscr{E}$. Therefore, the state space of M. R. D. P can be restricted to $\mathscr{E}$ and the domain of $S(t)$ can be extended to $\mathscr{L}$.