应用概率统计　第九卷
第三期　1993年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 9. No. 3. Aug. 1993

两成败型元件可靠性之差的经典精确最优置信下限

范　大　茵
(浙江大学，杭州，310027)

摘　　要

设有可靠性分别为 p_1 和 p_2 的两成败型元件. 第 i 个元件试验 N_i 次，成功 S_i 次($i=1, 2$). 本文利用样本点排序的方法给出了 $Q=p_1-p_2$ 的经典的置信下限，并讨论了所得置信下限的精确性及最优性.

设有两成败型元件，第 i 个元件可靠性为 p_i，对第 i 个元件试验 N_i 次，成功 S_i 次，($i=1, 2$)，本文讨论基于数据 (N_1, S_1, N_2, S_2) 求两元件可靠性之差 $\theta=p_1-p_2$ 的经典精确置信下限的问题. 本文考虑用成功数组样本点排序的方法求 θ 的经典精确置信下限，本文并且证明了此置信下限的精确性及最优性.

我们记 X 为第一个元件的成功数，Y 为第二个元件的成功数，以 (X, Y) 表示成功数数组的随机向量，则样本空间 $S=\{(x, y)|x=0, 1, 2, \cdots, N_1, y=0, 1, 2, \cdots, N_2\}$ 共有 $G=(N_1+1)(N_2+1)$ 个样本点，且对 S 中每一个样本点 (x, y)，有

$$P_{p_1,p_2}((X, Y)=(x, y))=\binom{N_1}{x}p_1^x(1-p_1)^{N_1-x}\cdot\binom{N_2}{y}p_2^y(1-p_2)^{N_2-y}$$

$$(x=0, 1, 2, \cdots, N_1, y=0, 1, 2, \cdots, N_2)$$

为说明本文所给出的样本点的排序规则，先给出如下两个定义：

定义 1　设有两个样本点 $Z=(x, y)$，$Z'=(x', y')$，若 $x\geqslant x'$ 且 $y\leqslant y'$，且此两式中至少有一个不等号成立，则我们称样本点 Z 优于样本点 Z'，或称样本点 Z' 差于样本点 Z，且记为 $Z'<Z$ 或 $Z>Z'$，并称两者是可比的.

定义 2　设 $Z=(x, y)$，$Z'=(x', y')$，若 $x'=x-1$ 且 $y'=y$，或者 $y'=y+1$ 且 $x'=x$，此时，我们称 Z' 是 Z 的差邻点，如 $N_1=3$，$N_2=5$ 时，样本点 (3, 4) 有两个差邻点 (2, 4) 及 (3, 5).

本文给出如下的排序规则：(置信度 $1-\alpha$)，第一点 $W^{(1)}=(N_1, 0)$，即第一个元件全成功，第二个元件全失败的样本点排在第一位. 第二点在 $W^{(1)}$ 的差邻点集 $\{(N_1-1, 0), (N_1, 1)\}$ 中挑选，挑选原则是分别以这两个点逐个代入下式的*，计算：

$$\inf\{p_1-p_2|P_{p_1,p_2}((X, Y)=W^{(1)})+P_{p_1,p_2}((X, Y)=*)\geqslant\alpha\}$$

本文1991年3月8日收到，1991年11月25日收到修改稿.

以那一点代入时所得的 inf 大就将那一点排在第二位，并记为 $W^{(2)}$. 为选第三点，先考虑选第二点时的候选点集中未被选上的点，此点所成的集记为 C_1，再考虑刚被选上的 $W^{(2)}$ 的差邻点全体组成的集记为 C_2，于是考虑 C_1 与 C_2 的并集 $C=C_1\cup C_2$，再对 C 中所有点两两进行比较，并将相比之下较差的样本点从 C 中剔除（即较差的样本点不参加 $W^{(3)}$ 的候选），使得所剩下的集内部两两不可比，并记新剩下的集为 C^*，则 C^* 就是 $W^{(3)}$ 的候选点集，再将 C^* 中的点逐个代入下式的(*)计算：

$$\inf\left\{p_1-p_2\,\middle|\,\sum_{i=1}^{2}P_{p_1,p_2}((X,\ Y)=W^{(i)})+P_{p_1,p_2}((X,\ Y)=*)\geqslant\alpha\right\},$$

以 C^* 中那一个点代入时所得的 inf 最大就将那一个点排在第三位，并记为 $W^{(3)}$，…，依此类推，可将 G 个样本点全部排完，设排为 $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, …, $W^{(G)}$，于是，若实际的观察数据是成功数数组为$(S_1,\ S_2)$. 若$(S_1,\ S_2)$排在第 $K(S_1,\ S_2)$位. 即若$(S_1,\ S_2)=W^{(K(S_1,S_2))}$，那么对于置信度 $1-\alpha$，$(S_1,\ S_2)$ 所对应的 $\theta=p_1-p_2$ 的置信下限是：

$$\inf\left\{p_1-p_2\,\middle|\,\sum_{i=1}^{K(S_1,S_2)}P_{p_1,p_2}((X,\ Y)=W^{(i)})\geqslant\alpha\right\},\tag{1}$$

记此置信下限为 $CL(S_1,\ S_2)$.

注 1 由(1)式，不难算得$(0,\ N_2)$所对应的置信下限是 -1，事实上，由于本文的排序规则. $(0,\ N_2)$是最差的样本点，因此$(0,\ N_2)$总是排在最后一位. 即$(0,\ N_2)=W^{(G)}$，而由于

$$\sum_{i=1}^{G}P_{p_1,p_2}((X,\ Y)=W^{(i)})\equiv1\geqslant\alpha\quad\forall p_1,\ p_2\in(0,\ 1),$$

故

$$\begin{aligned}CL(0,\ N_2)&=\inf\left\{p_1-p_2\,\middle|\,\sum_{i=1}^{G}P_{p_1,p_2}((X,\ Y)=W^{(i)})\geqslant\alpha\right\}\\&=\inf\{p_1-p_2\,|\,0\leqslant p_1\leqslant1,\ 0\leqslant p_2\leqslant1\}=-1.\end{aligned}$$

注 2 在寻求排在第 K 位的样本点时，若出现候选点集 C_K^* 中有多于一个样本点以其逐个代入时，inf 同时达到最大，于是记这些样本点所成的集合为 A_K，那么 A_K 中的样本点排在同一位置、(记为第 K 级). 且 A_K 中每一个样本点所对应的置信限全相等，都等于：

$$\inf\left\{p_1-p_2\,\middle|\,\sum_{i=1}^{K-1}P_{p_1,p_2}((X,\ Y)=W^{(i)})+P_{p_1,p_2}((X,\ Y)\in A_K)\geqslant\alpha\right\},$$

并且接下去寻求排在第 $K+1$ 位的样本点则先考虑如下两个集的和集：1. 在挑选第 K 位时的候选点集中未被选上的点所成的集. 即 $C_K^*-A_K$. 2. 刚挑上的第 K 级点集 A_K 中每个样本点的差邻点的全体所成的集 B_{K+1}. 记 $C_{K+1}=(C_K^*-A_K)\cup B_{K+1}$，然后再对 C_{K+1} 中的元素两两相比较. 将明显较差的样本点从 C_{K+1} 中剔除（即较差的样本点不参加 $W^{(K+1)}$ 的候选），使所剩下的样本集中两两不可比，记剩下的集为 C_{K+1}^*，那么 C_{K+1}^* 就是 $W^{(K+1)}$ 的候选点集.

注 3 从直观上看，较好的样本点（第一元件的成功数多或第二元件的成功数少）应有较高的置信下限，且由 (1) 式的表达式可知排在前面的样本点由于相加项少必然有较高的下确界，于是排在前面的样本点必有较高的置信下限，本文为避免较差的样本点排在前面. 故在排序过程对于候选点集中先作了处理，这样保证两样本若可比，那么较差的样本点必然只能参加以后的竞选（而且是总会被选到的）.

下而讨论此置信下限的优良性质

§1. 置信下限 $CL(X, Y)$ 的精确性

讨论 $CL(X, Y)$ 的精确性，即要证明 $CL(X, Y)$ 满足:

$$P_{p_1,p_2}(p_1-p_2\geqslant CL(X, Y))\geqslant 1-\alpha, \quad \forall p_1, p_2\in[0, 1],$$

证明 对任 $p_1, p_2\in[0, 1]$，我们以 $\beta(p_1, p_2)$ 记为满足

$$\sum_{i=1}^{\beta(p_1,p_2)} P_{p_1,p_2}((X, Y)=W^{(i)})\geqslant\alpha$$

的最小正整数，即 $\beta(p_1, p_2)$满足

$$\sum_{i=1}^{\beta(p_1,p_2)} P_{p_1,p_2}((X, Y)=W^{(i)})\geqslant\alpha \tag{1}$$

但

$$\sum_{i=1}^{\beta(p_1,p_2)-1} P_{p_1,p_2}((X, Y)=W^{(i)})<\alpha \tag{2}$$

于是，由于

$$CL(S_1, S_2)=\inf\left\{p_1-p_2\,\middle|\,\sum_{i=1}^{K(S_1,S_2)} P_{p_1,p_2}((X, Y)=W^{(i)})\geqslant\alpha\right\},$$

于是，若(S_1, S_2)满足 $\sum_{i=1}^{K(S_1,S_2)} P_{p_1,p_2}((X, Y)=W^{(i)})\geqslant\alpha$，那么必有$p_1-p_2\geqslant CL(S_1, S_2)$. 于是，我们有:

$$\left\{(S_1, S_2)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{K(S_1,S_2)} P_{p_1,p_2}((X, Y)=W^{(i)})\geqslant\alpha\right\}\subset\{p_1-p_2\geqslant CL(S_1, S_2)\}.$$

又因 $\beta(p_1, p_2)$ 是满足 (1)，(2)，于是当 $K(S_1, S_2)\geqslant\beta(p_1, p_2)$ 时必有 $\sum_{i=1}^{K(S_1,S_2)} P_{p_1,p_2}((X, Y)=W^{(i)})\geqslant\alpha$，于是我们又有:

$$\{K(S_1, S_2)\geqslant\beta(p_1, p_2)\}\subset\left\{(S_1, S_2)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{K(S_1,S_2)} P_{p_1,p_2}((X, Y)=W^{(i)})\geqslant\alpha\right\},$$

而左端又等价于

$$\left\{(S_1, S_2)\in\bigcup_{i=\beta(p_1,p_2)}^{G}\{W^{(i)}\}\right\},$$

于是，综合我们有:

$$\left\{(S_1, S_2)\in\bigcup_{i=\beta(p_1,p_2)}^{G}\{W^{(i)}\}\right\}\subset\{p_1-p_2\geqslant CL(S_1, S_2)\},$$

由于(S_1, S_2)的随意性，我们有

$$\{p_1-p_2\geqslant CL(X, Y)\}\supset\left\{(X, Y)\in\bigcup_{i=\beta(p_1,p_2)}^{G}\{W^{(i)}\}\right\}$$

两边取概率得:

$$P_{p_1,p_2}(p_1-p_2\geqslant CL(X,Y))\geqslant\sum_{i=\beta(p_1,p_2)}^{G} P_{p_1,p_2}((X, Y)=W^{(i)})$$

由(2)知上式右端 $>1-\alpha$，即证得

$$P_{p_1,p_2}(p_1-p_2\geqslant CL(X, Y))\geqslant 1-\alpha$$

即证得置信下限 $CL(X, Y)$ 满足给定的置信度

§2. 置信下限 $CL(X,Y)$ 的最优性

此处所指最优性是指若另有一置信下限为 $M(X, Y)$，它满足如下几条性质：

(a) 若 $i\leqslant j$ 则

$$M(W^{(i)})\geqslant M(W^{(j)}), \quad (\text{正则性}) \tag{3}$$

(b) 对任 $p_1, p_2\in[0, 1]$，均有

$$P_{p_1,p_2}(p_1-p_2\geqslant M(X, Y))\geqslant 1-\alpha \quad (\text{精确性}) \tag{4}$$

(c) $M(0, N_2)=-1$.

那么必有 $CL(X, Y)\geqslant M(X, Y)$. 即此 $CL(X, Y)$ 是所有在此同一排序下满足正则性，精确性的置信下限中的最大者. 为证明这一点，先证明几个引理.

引理1 函数 $Q(p)=\sum\limits_{K=0}^{S}\binom{n}{K}p^K(1-p)^{n-K}$, $(0\leqslant p\leqslant 1)$，当 $S\neq n$ 时，是 p 的严格单调减少函数. 函数 $R(p)=\sum\limits_{K=S}^{n}\binom{n}{K}p^K(1-p)^{n-K}(0\leqslant p\leqslant 1)$，当 $S\neq 0$ 时是 p 的严格单调增加函数.

证明 利用

$$\sum_{K=0}^{S}\binom{n}{K}p^K(1-p)^{n-K}=\int_p^1\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(S+1)\Gamma(n-S)}t^S(1-t)^{n-S-1}dt$$

引理2 设 $T_K=\{W^{(1)}, W^{(2)}, \cdots, W^{(K)}\}$

记 $$f_K(p_1, p_2)=P_{p_1,p_2}((X, Y)\in T_K)$$

记 $$D_K=\{(p_1, p_2)\,|\,f_K(p_1, p_2)\geqslant\alpha,\ 0\leqslant p_1\leqslant 1,\ 0\leqslant p_2\leqslant 1\},$$

则函数 $\theta=p_1-p_2$ 在 D_K 上的下确界能达到. 即存在 $(p_1^0, p_2^0)\in D_K$，使

$$p_1^0-p_2^0=\inf\{p_1-p_2\,|\,(p_1, p_2)\in D_K\},$$

证明 因

$$P_{p_1,p_2}((X, Y)=(t_1, t_2))=\binom{N_1}{t_1}p_1^{t_1}(1-p_1)^{N_1-t_1}\cdot\binom{N_2}{t_2}p_2^{t_2}(1-p_2)^{N_2-t_2}, \quad (t_1, t_2)\in S$$

是 p_1, p_2 的连续函数，从而 $f_K(p_1, p_2)=P_{p_1,p_2}((X, Y)\in T_K)$ 亦是 p_1, p_2 的连续函数，于是 $\{(p_1, p_2)\,|\,f_K(p_1, p_2)\geqslant\alpha\}$ 是闭集. 从而

$$D_K=\{(p_1, p_2)\,|\,f_K(p_1, p_2)\geqslant\alpha\}\cap\left\{\begin{array}{l}0\leqslant p_1\leqslant 1\\0\leqslant p_2\leqslant 1\end{array}\right\}$$

是有界闭集，$\theta=p_1-p_2$ 是连续函数. 而连续函数在有界闭集上的下确界能达到. 故存在 (p_1^0, p_2^0) 满足 $(p_1^0, p_2^0)\in D_K$. 且 $p_1^0-p_2^0=\inf\{p_1-p_2\,|\,f_K(p_1, p_2)\geqslant\alpha\}$,

引理3 对任 $K(K=1, 2, \cdots, G)$. T_K 必可分解为：

$$T_K=\bigcup_{i=1}^{m_K}\{X=a_i^{(K)}, Y\leqslant b_i^{(K)}\} \tag{1}$$

且

$$T_K=\bigcup_{j=1}^{v_K}\{X\geqslant C_j^{(K)}, Y=d_j^{(K)}\} \tag{2}$$

证明 由本文所给的排序法则，可知若样本点 $(t_1, t_2)\in T_K$，那么必有

$$\{(x, y) \mid x \geqslant t_1, y \leqslant t_2\} \subset T_K$$

从而可知 T_K 必可表达为(1)，(2)的形式.

引理4 设 $K \neq G$, $0<\alpha<1$, (p_1^0, p_2^0) 是引理2中取到下确界的点.

记
$$g(p_1)=f_K(p_1, p_2^0) \quad 0 \leqslant p_1 \leqslant 1$$
$$h(p_2)=f_K(p_1^0, p_2) \quad 0 \leqslant p_2 \leqslant 1$$

则我们有：(p_1^0, p_2^0)或满足如下的条件(A)或满足条件(B)：

(A) $p_1^0<1$ 且 $g(p_1)$ 是 p_1 的严格增加函数，

(B) $p_2^0>0$ 且 $h(p_2)$ 是 p_2 的严格减少函数.

证明 由引理3, T_K 仅有如下六种情况,我们分别讨论之：

$$T_K=\{X \geqslant a, 0 \leqslant Y \leqslant N_2\} \quad (a \neq 0)$$

则 $f_K(p_1, p_2)=P_{p_1}(X \geqslant a)$ 与 p_2 无关，故 $p_2^0=1$，又因 $P_{p_1}(X \geqslant a)$ 是 p_1 的严增函数(利用引理1，$a \neq 0$)，故 p_1^0 是方程 $P_{p_1}(X \geqslant a)=\alpha$ 的根. 因 $0<\alpha<1$，故 $p_1^0 \in (0, 1)$ 且 $g(p_1)=f_K(p_1, 1)=P_{p_1}(X \geqslant a)$ 是 p_1 的严增函数. 满足(A).

$$T_K=\{0 \leqslant X \leqslant N_1, Y \leqslant b\} \quad (b \neq N_2)$$

则 $f_K(p_1, p_2)=P_{p_2}(Y \leqslant b)$ 与 p_1 无关. 故 $p_1^0=0$，且因 $P_{p_2}(Y \leqslant b)$ 是 p_2 的严减函数，故 p_2^0 是方程 $P_{p_2}(Y \leqslant b)=\alpha$ 的根. 故有 $0<p_2^0<1$，且 $h(p_2)=P_{p_2}(Y \leqslant b)$ 是 p_2 的严减函数. 满足(B).

T_K 类似图1形式.

此时，因 $f(0, p_2)=0$，故 $(0, p_2) \overline{\in} D_K$，而 $(p_1^0, p_2^0) \in D_K$ 故 $p_1^0 \neq 0$，且若 z 是方程 $P_{p_1}(X \geqslant a)=\alpha$ 之根(a 如图所示)，则 $f_K(z, 1)=P_{p_1}(X \geqslant a)=\alpha$. 于是 $(z, 1) \in D_K$. 而 (p_1^0, p_2^0) 是取到下确界的点. 故应有：$p_1^0-p_2^0 \leqslant z-1$ 由于 $0<z<1$，有

$$p_1^0 \leqslant p_2^0+z-1<p_2^0 \leqslant 1 \quad 得 \quad p_1^0<1$$
$$p_2^0 \geqslant p_1^0-z+1>p_1^0 \geqslant 0 \quad 得 \quad p_2^0>0.$$

综合有：$0<p_1^0<1$，且 $p_2^0>0$.

$h(p_2)=f_K(p_1^0, p_2)=P_{p_1^0}(X \geqslant a)+\sum_{i=1}^{m} P_{p_1^0}(X=a_i)P_{p_2}(Y \leqslant b_i)(b_i \neq N_2)$. 于是注意系数 $P_{p_1^0}(X=a_i)$，由于 $0<p_1^0<1$，故系数全为正，且 $b_i \neq N_2$，故 $h(p_2)$ 是 p_2 的严减函数，满足(B).

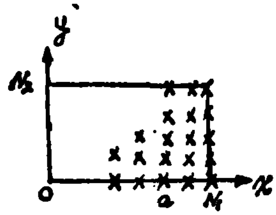

图 1

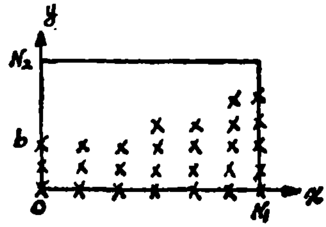

图 2

T_K 如图2所示

因 $$f_K(p_1, 1)=0,$$

故 $$(p_1, 1) \overline{\in} D_K.$$

故 $$p_2^0 \neq 1.$$

又若 z 是方程 $P_{p_2}(Y\leqslant b)=\alpha$ 的根，则 $0<z<1$. 且 $f_K(0,z)=\alpha$, 故 $(0,z)\in D_K$, 于是有

$$p_1^0-p_2^0\leqslant 0-z$$

则 $$p_1^0\leqslant p_2^0+0-z<p_2^0\leqslant 1,\ \text{即有}\quad p_1^0<1.$$

$$p_2^0\geqslant p_1^0+z>p_1^0\geqslant 0,\ \text{即有}\quad p_2^0>0.$$

综合得 $p_1^0<1$ 且 $0<p_2^0<1$.

$$g(p_1)=P_{p_2^0}(Y\leqslant b)+\sum_{i=1}^{r}P_{p_1}(X\geqslant a_i)P_{p_2^0}(Y=b_i)$$

其中 $a_i\neq 0$. 又因 $0<p_2^0<1$. 故系数 $P_{p_2^0}(Y=b_i)$ 全为正. 且 $a_i\neq 0$. 故 $g(p_1)$ 是 p_1 的严格增加函数. 满足(A).

T_K 如图 3 所示

因 $\qquad f_K(0,p_2)=0\quad$ 故 $\quad p_1^0\neq 0$

因 $\qquad f_K(p_1,1)=0\quad$ 故 $\quad p_2^0\neq 1$.

(i) 若 $p_1^0=1$. 则 p_2^0 是方程 $P_{p_2}(Y\leqslant b)=\alpha$ 的根（b 如图所示）. 故 $0<p_2^0<1$, 且 $h(p_2)=f_K(1,p_2)=P_{p_2}(Y\leqslant b)$ 是 p_2 的严减函数. 满足(B).

(ii) 若 $p_2^0=0$, 则 p_1^0 是方程 $P_{p_1}(X\geqslant a)=\alpha$ 之根(a 如图所示), 故 $0<p_1^0<1$, 且 $g(p_1)=f_K(p_1,0)=P_{p_1}(X\geqslant a)$ 是 p_1 的严格增加函数. 满足(A).

(iii) 若 $0<p_1^0<1$ 且 $0<p_2^0<1$,

则 $g(p_1)=\sum_{i=1}^{m}P_{p_1}(X\geqslant a_i)P_{p_2^0}(Y=b_i)$, 由于 $0<p_2^0<1$. 故系数 $P_{p_2^0}(Y=b_i)$ 全为正, 且 $a_i\neq 0$, 故 $g(p_1)$ 是 p_1 的严增函数. 满足(A).

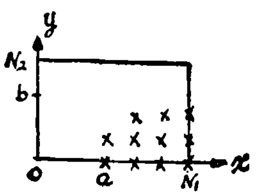

图 3

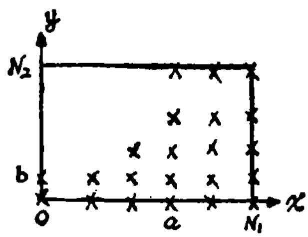

图 4

T_K 如图 4 所示.

因 $f(0,1)=0$, 故 $(0,1)\overline{\in}D_K$ 于是或 $p_1^0\neq 0$ 或 $p_2^0\neq 1$. 若 z 是方程 $P_{p_2}(Y\leqslant b)=\alpha$ 的根. (b 如图所示), 则 $0<z<1$, 且 $f(0,z)=\alpha$, 故 $(0,z)\in D_K$. 由于 (p_1^0,p_2^0) 是达到下确界的点, 故 $p_1^0-p_2^0\leqslant 0-z$ 类似易得 $p_1^0<1$, $p_2^0>0$, 于是:

(i) 若 $p_1^0\neq 0$, 此时有 $0<p_1^0<1$, 且 $p_2^0>0$, 与前面一样可证 $h(p_2)$ 是 p_2 的严减函数. 满足(B).

(ii) 若 $p_2^0\neq 1$, 则有 $p_1^0<1$, 且 $0<p_2^0<1$, 与前面类似可证 $g(p_1)$ 是 p_1 的严增函数. 满足(A).

(只要将 $f_K(p_1^0,p_2)$ 及 $f_K(p_1,p_2^0)$ 表示成和式, 注意到系数为正, 再利用引理 1 即可).

到此, 引理 4 证毕.

下面证明 $CL(X,Y)$ 之最优性.

反证法 若不然, 设另有一置信下限 $M(X,Y)$, 满足:

(a) $P_{p_1,p_2}(p_1-p_2 \geqslant M(X,Y)) \geqslant 1-\alpha \quad \forall (p_1, p_2) \in \Theta$ (3)

(b) 若 $i<j$ 则 $M(W^{(i)}) \geqslant M(W^{(j)})$ (4)

(c) $M(0, N_2) = -1.$ (5)

但在某个样本点(x_0, y_0)处却有$M(x_0, y_0) > CL(x_0, y_0)$. 不妨设$(x_0, y_0) = W^{(K)}$, 则因

$$CL(W^{(G)}) = M(W^{(G)}) = -1.$$

故 $K \neq G$. 令 $0<\alpha<1$. 于是, 由引理 3, 必存在 $(p_1^0, p_2^0) \in D_K$. 且

$$p_1^0 - p_2^0 = \inf\{p_1 - p_2 \mid (p_1, p_2) \in D_K\},$$

即 $p_1^0 - p_2^0 = CL(x_0, y_0)$ 且 $f_K(p_1^0, p_2^0) \geqslant \alpha$, 由引理 4、$(p_1^0, p_2^0)$ 或满足性质 (A). 或满足性质 (B). 则:

(i) 若(p_1^0, p_2^0)满足(A). 那么$p_1^0<1$ 且 $g(p_1) = f_K(p_1, p_2^0)$ 是 p_1 的严增函数, 且 $p_1^0 - p_2^0 = CL(x_0, y_0) < M(x_0, y_0)$. 于是, 我们可适当选取比 p_1^0 略大的 $p_1^*(<1)$, 取 $p_2^* = p_2^0$, 使 $f_K(p_1^*, p_2^*) > \alpha$. 且仍满足 $p_1^* - p_2^* < M(x_0, y_0)$.

(ii) 若(p_1^0, p_2^0)满足(B), 那么 $p_2^0>0$. $h(p_2) = f_K(p_1^0, p_2)$ 是 p_2 的严减函数, 且 $p_1^0 - p_2^0 = CL(x_0, y_0) < M(x_0, y_0)$, 于是我们可适当选取一个比 p_2^0 略小的 $p_2^*(>0)$. 并取 $p_1^* = p_1^0$, 使

$$f_K(p_1^*, p_2^*) > \alpha \tag{6}$$

且仍满足

$$p_1^* - p_2^* < M(x_0, y_0) \tag{7}$$

于是我们有:

$$\{p_1^* - p_2^* < M(X, Y)\} \overset{(7)}{\supset} \{M(x_0, y_0) < M(X, Y)\}$$
$$\supset \left\{(X, Y) \in \bigcup_{i=1}^{K} \{W^{(i)}\}\right\}$$

故

$$P_{p_1^*,p_2^*}(p_1^* - p_2^* < M(X, Y)) \geqslant P_{p_1^*,p_2^*}\left((X, Y) \in \bigcup_{i=1}^{K} \{W^{(i)}\}\right)$$
$$= f_K(p_1^*, p_2^*) \overset{(6)}{>} \alpha$$

于是 $$P_{p_1^*,p_2^*}(p_1^* - p_2^* \geqslant M(X, Y)) < 1 - f_K(p_1^*, p_2^*) < 1 - \alpha,$$

这与 $M(X, Y)$满足(3)相矛盾, 故原假设不真, 从而证得 $CL(X, Y)$ 确实是最优置信下限.

参 考 文 献

[1] Buehler, R. J., "Confidence Limits for the Product of Two Binomial Parameters", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 2, December 1957.

[2] Bernard Harris and Anderew P. Soms, Bounds for Optimal Confidence Limits for Series System., *AD* AO89666 (1980).

[3] A. Winterbottom "Lower Confidence Limits for Series System Reliability from Binomial Subsystem Data", *J. Amer. Stats. Assoc*, Vol. 69 (1974) 782—788.

[4] 范大茵, "对成败型元件串联系统可靠性置信下限"LP"排序法的改进", 浙江大学学报, 1986 年第一期, 136—140.

THE CLASSICAL EXACT OPTIMAL LOWER CONFIDENCE LIMIT OF DIFFERENCE BETWEEN RELIABILITIES OF TWO PASS-FAIL COMPONENTS

FAN DA-YIN

(*Zhejiang University, Hangzhou*, 310027)

Suppose that there are two pass-fail components whose reliabilities are p_1, p_2 respectively. Let us assume that the test numbers are N_1, N_2 and the success numbers are S_1, S_2. It is the goal of this article to discuss the classical exact lower confidence limit of difference $\theta=p_1-p_2$. In this paper we give the ordering rule of sample points and develop a method finding classical exact lower confidence limit of θ by using the ordering method of sample points. Morever we prove the exactness and optimality of our results.