

# 一般的成批服务排队系统嵌入马氏链的性质

李 银 国

(重庆建筑高等专科学校, 重庆, 630030)

## 摘 要

本文建立了  $M/G/1$  系统、具有最一般的控制策略的成批到达、成批服务排队过程的模型。在此基础上, 完整地讨论了该系统嵌入 Markov 链状态空间的结构、不可约非周期性条件, 并获得了周期值公式。

关键词: 排队论, 成批服务, 不可约性, 周期性。

学科分类词: 226.

## §1. 引 言

自 Bailey<sup>[1]</sup> (1954) 以来, 人们根据不同的实际要求, 提出了众多的  $M/G/1$  系统成批服务排队模型。按服务控制方式, 主要可分为以下几类:

**模型 (a):** “取消策略”模型<sup>[2]</sup>。当系统排队长小于常数  $m$  时, 该批服务取消, 所有顾客等候下一批服务。当  $m = 1$  时为常见的“无控制”服务模型<sup>[1]~[3]</sup>。

**模型 (b):** “一般服务规则”模型<sup>[2],[5],[6]</sup>。当系统排队长小于定值  $m$  时, 该批服务延迟, 直到排队长等于或大于定值  $m$  时, 服务台才开始服务。

**模型 (c):** “一般控制策略”模型<sup>[2]</sup>。当排队长小于定值  $m$  时, 该批服务延迟, 直到: i). 时间  $T$  (定值) 内新增顾客使队长不小于  $m$  时, 便开始服务; ii). 延迟时间  $T$  后, 队长仍不足  $m$ , 便取消该批服务。

**模型 (d):** 若顾客到达时系统闲置, 则他们在一随机等待时间之后才被服务<sup>[3]</sup>。

**模型 (e):** 若顾客到达时系统闲置, 则此批服务具有特殊的 service 时间<sup>[3]</sup>。

迄今, 人们单个地研究上述模型或其特例, 使该类排队系统的研究显得纷繁冗杂, 且所得结果也受到模型特殊性的限制。在理论上, 系统嵌入 Markov 链仍是普遍采用的方法。嵌入链的不可约、非周期性是分析系统性态、计算平稳分布的前提。当系统为成批到达时, 此问题的研究尤其重要。Teghem<sup>[7]</sup> 曾涉及此问题, 张福基等<sup>[3]</sup> 的讨论主要针对模型 (d), (e) 的一些特殊情形, 但多数模型的不可约、非周期性未得到完整的研究。有些文献事先假设满足不可约、非周期条件, 而事实上不一定都成立 (例如 Powell 等<sup>[2]</sup>)。

本文 1994 年 3 月 8 日收到, 1994 年 4 月 27 日收到修改稿。

本文综合和扩充了模型 (a) ~ (e), 建立了 M/G/1 系统成批到达, 成批服务排队过程的统一模型. 在此基础上, 系统地讨论了嵌入 Markov 链状态空间按不可约闭集的划分, 获得了周期性条件和周期值公式, 从而使成批服务系统嵌入链的不可约、非周期性问题, 得到了圆满的解决.

## §2. 统一模型

成批服务排队模型常用于铁路、港口等装运系统<sup>[2],[4]</sup>. 此时, 成批到达的货物为顾客, 大型装载车辆为服务台. 为了降低成本, 每次需尽量满足车辆的装载能力, 当待运的货物太少时, 大车或等待新的货物到来, 或取消此次运输, 运输过程延迟或中断后重新启动, 需增加设备的调配、准备时间. 以此类实际问题为背景, 本文建立下述 M/G/1 系统、成批到达、成批服务排队过程的统一模型:

(1) 顾客成批到达, 到达过程为参数  $\lambda$  的 Poisson 流, 每批到达顾客数为  $R_n$ ,  $\{R_n\}$  为 i.i.d. (独立同分布) 随机变量.

(2) 单服务台, 先到先服务, 第  $n$  批服务容量 (service capacity) 为  $S_n$ ,  $\{S_n\}$  为 i.i.d. 随机变量.  $S_n$  的最大可能值为  $N$  (文 [2] 中称为 dispatch instant).

(3) 设  $n-1$  批服务结束时刻系统内剩余的顾客数为  $Q_n$ , 此时  $n$  批服务容量  $S_n$  的取值已定 (相当于  $n$  次大车到达系统, 其装载能力已知), 服务台根据  $Q_n$  和队长控制数  $m$ ,  $M (m \leq M \leq N)$ , 采用下述方法来确定  $n$  批服务开始时刻和服务方式:

i) 若  $Q_n \geq m$ ,  $n$  批服务立即开始,  $n$  批实际服务的顾客数为  $\min\{S_n, Q_n\}$ , 服务时间为  $\xi_n$ . (注: 当  $Q_n \geq S_n$  时, 服务顾客数正好为服务容量  $S_n$ ,  $Q_n < S_n$  时, 服务  $Q_n$  个).

ii) 若  $Q_n < m$ , 由于队长太小,  $n$  批服务延迟, 以便等待新的顾客到来, 但延迟时间不得超过  $T_n$ . (a) 若在时间  $T_n$  内的某时刻, 队长达到了  $M (M \geq m)$ , 是因为此时有必要对排队长提出较高要求, 以便提高  $n$  批实际服务数, 便在准备了  $\eta_n$  时间之后, 开始  $n$  批服务, 服务时间为  $\xi'_n$ . (注: 此时实际服务数为  $\min\{\bar{Q}_n, S_n\}$ ,  $\bar{Q}_n = Q_n +$  延迟期间和准备服务期间到达顾客数. (b) 在延迟了  $T_n$  时间之后, 只要此时排队长不小于  $m$ , 便开始  $n$  批服务. 同理, 在其正式服务前服务准备时间  $\eta_n$ , 服务时间为  $\xi'_n$ ; 否则, 若队长仍不足  $m$ ,  $n$  批服务取消 (相当于因为顾客到达率低, 等待时间太长, 大车未装载货物便退出了服务系统). 为了方便讨论, 此时不妨仍设  $n$  批服务立即开始, 服务时间仍为  $\xi_n$ , 但服务的顾客数为零. (此延迟—取消策略参见<sup>[4]</sup>.) 上述正常服务时间  $\{\xi_n\}$ , 特殊服务时间  $\{\xi'_n\}$ , 服务准备时间  $\{\eta_n\}$  和最大延迟时间  $\{T_n\}$  均为 i.i.d. 随机变量. (特别地  $T_n$  可为  $\infty$ ).

上述统一模型可用下式描述:

$$Q_{n+1} = \begin{cases} Q_n + Y_n + A_n, & \text{当 } Q_n < m, \quad (\text{延迟} \rightarrow \text{服务, 服务数} \\ & Q_n + Y_n < m, \text{ 为零, 服务时间为 } \xi_n), \quad (1.1) \\ \max\{Q_n + Y_n + E_n - S_n, 0\} + \tilde{A}_n, & \text{当 } Q_n < m, \quad (\text{延迟} \rightarrow \text{准备} \rightarrow \text{服务,} \\ & Q_n + Y_n \geq m, \text{ 服务时间为 } \xi'_n), \quad (1.2) \\ \max\{Q_n - S_n, 0\} + A_n, & \text{当 } n \geq m, \quad (\text{立即服务, 服务} \\ & \text{时间为 } \xi_n), \quad (1.3) \end{cases}$$

其中

$Y_n$ : 服务延迟期间新到达的顾客数 (参见 [2]), 当  $Q_n, m, M, T_n$  的值取定后,  $Y_n$  的分布也随之确定,

$A_n, \tilde{A}_n$ : 分别为  $\xi_n, \xi'_n$  时间内新到达的顾客数,

$E_n$ : 服务准备时间  $\eta_n$  内新到达的顾客数.

选择每批服务结束时刻作为更新点, 此刻的排队长  $Q_n$  作为系统状态变量. 由 (1) 式可得到上述排队系统的嵌入 Markov 链  $\{Q_n\}$ .

不难看出, 统一模型蕴含了模型 (a) ~ (e) 等常见模型. 例如, 当  $m = M = 1, T_n \equiv 0$  时得到模型 (a); 当  $m = M, T_n \equiv \text{定值}, \xi_n$  和  $\xi'_n$  同分布,  $\eta_n \equiv 0$  时为模型 (c); 当  $m = M = 1, T_n \equiv \infty, \eta_n \equiv 0$  时为模型 (e). 由此, 我们可以统一分析成批服务排队系统的性能、计算各项指标, 继而确定最优策略  $(m, M, T_n)$ .

### §3. $\{Q_n\}$ 的不可约性

设  $R_n$  的可能值为  $r_1 < r_2 < \dots$ ;  $S_n$  的可能值为  $s_1 < s_2 < \dots < s_v = N$ , 其中最大公因子  $\sigma = (r_1, r_2, \dots), \bar{\sigma} = (s_1, s_2, \dots, s_v), \delta = (\sigma, \bar{\sigma})$ .

将  $\{Q_n\}$  的状态空间  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$  按模  $\delta$  构造  $\delta$  个剩余类子集:  $G_t = [t], t = 0, 1, \dots, \delta - 1$ , 显然  $G_t = \{i | i = k\delta + t, k = 0, 1, 2, \dots\}$ . 下面讨论状态集  $G_t$  为不可约闭集之条件.

引理 1 存在  $l, n_0 \in N^+ = \{1, 2, \dots\}$  使得  $\sigma = (r_1, r_2, \dots, r_l)$ , 且当  $n \geq n_0$  时有

$$n\sigma = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_l r_l, \quad a_i \in N^+,$$

成立. 同理, 存在  $\bar{n}_0 \in N^+$ , 当  $\bar{n} > \bar{n}_0$  时有

$$\bar{n}\bar{\sigma} = b_1 s_1 + b_2 s_2 + \dots + b_v s_v, \quad b_i \in N^+.$$

引理 2 任给非负整数  $k$ , 存在充分大的  $n, \bar{n} \in N^+$ , 使得  $k\delta = n\sigma - \bar{n}\bar{\sigma}$  成立. 即

$$k\delta = a_1 r_1 + \dots + a_l r_l - b_1 s_1 - \dots - b_v s_v, \quad a_i, b_i \in N^+.$$

(引理 1 ~ 2 的证明略, 参见 [3], [8]).

引理 3  $\forall i, j \in G_t$ , 且  $i < m, j \geq i$ , 则系统在下列条件下, 均有  $i \rightarrow j$  成立:

- (a)  $P\{T_n < \infty\} > 0$ , 即  $T_n$  不恒为  $\infty$ ,
- (b)  $P\{T_n < \infty\} = 0$ , 即  $T_n$  恒为  $\infty$ , 但是成立:

$$P\{Q_n + Y_n + E_n \geq s_1 | Q_n = i < m\} > 0.$$

证明: 设  $i = k_0\delta + t, j = k\delta + t$ . 由引理 1 - 2 知, 存在  $a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_v \in N^+$ , 使得  $j - i = (k - k_0)\delta = \sum_{i=1}^l a_i r_i - \sum_{i=1}^v b_i s_i$ , 且  $\sum_{i=1}^l a_i r_i$  充分大.

(1) 若  $P\{T_n < \infty\} > 0$ , 则  $P\{Y_n = 0 | Q_n = i < m\} > 0$ , 即  $Y_n$  可能为 0. 在 (1.1) 式中, 可取  $Q_n = i, Y_n = 0, A_n = \sum_{i=1}^l a_i r_i$ , 则有  $i \rightarrow i + \sum_{i=1}^l a_i r_i \rightarrow i + \sum_{i=1}^l a_i r_i - s_1$ .

(2) 若  $P\{T_n < \infty\} = 0$ , 则有  $P\{Y_n + Q_n \geq m | Q_n = i < m\} = 1$ , 又因为  $P\{Q_n + Y_n + E_n \geq s_1 | Q_n = i < m\} > 0$ , 此时在 (1.2) 式中可取  $Q_n = i, S_n = s_1, Y_n + E_n + \tilde{A}_n = \sum_{i=1}^l a_i r_i$ , 则有  $i \rightarrow i + Y_n + E_n - S_n + \tilde{A}_n = i + \sum_{i=1}^l a_i r_i - s_1$ .

总之, 在条件(a), (b) 下均有

$$\begin{aligned} i &\longrightarrow i + \sum_{i=1}^l a_i r_i - s_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow i + \sum_{i=1}^l a_i r_i - b_1 s_1 - \cdots - (b_v - 1) s_v \\ &= i + \sum_{i=1}^l a_i r_i - \sum_{i=1}^v b_i s_i + s_v = i + (k - k_0) \delta + s_v = j + s_v. \end{aligned}$$

由于上述状态转移过程递减, 且最后一步状态  $j + s_v = j + N \geq m$ , 故可继续转移  $j + s_v \longrightarrow j$ , 即  $i \longrightarrow j$  成立.

引理4  $\forall j \in G_t$  且  $j \geq m, j \geq s_1$ , 则  $j \longrightarrow t$ .

证明 设  $j = k\delta + t = t + \sum_{i=1}^l a_i r_i - \sum_{i=1}^v b_i s_i, 0 = \sum_{i=1}^l a'_i r_i - \sum_{i=1}^v b'_i s_i$ , 且  $a'_i > a_i, b'_i > b_i$ , 由于  $j \geq m, j \geq s_1$ . 在(1.3)式中取  $Q_n = j, S_n = s_1, A_n = \sum_{i=1}^l (a'_i - a_i) r_i$ , 则有

$$\begin{aligned} j &\longrightarrow j - s_1 + \sum_{i=1}^l (a'_i - a_i) r_i \longrightarrow t + \sum_{i=1}^l a'_i r_i - \sum_{i=1}^v b_i s_i - s_1 \longrightarrow \cdots \\ &\longrightarrow t + \sum_{i=1}^l a'_i r_i - b'_1 s_1 - \cdots - (b'_v - 1) s_v = t + \sum_{i=1}^l a'_i r_i - \sum_{i=1}^v b'_i s_i + s_v = t + s_v \geq m. \end{aligned}$$

故有  $j \longrightarrow t + s_v \longrightarrow t$ .

定理1  $G_0$  为不可约闭集.

证明  $\forall i, j \in G_0$  且  $i < m, j \geq i$ , 若引理3的条件之一成立, 则有  $i \longrightarrow j$ . 反之, 若  $P\{T_n < \infty\} = 0, P\{Q_n + Y_n + E_n \geq s_1 | Q_n = i < m\} = 0$ , 此时必有  $P\{m \leq Q_n + Y_n + E_n < s_1 | Q_n = i < m\} = 1$ . 设  $j = k\delta = \sum_{i=1}^l a'_i r_i - \sum_{i=1}^v b'_i s_i (a'_i, b'_i \in \mathbf{N}^+)$ . 在(1.2)式中取  $Q_n = i, S_n = s_1, \tilde{A}_n = \sum_{i=1}^l a'_i r_i$ , 则有

$$\begin{aligned} i &\longrightarrow \max\{Q_n + Y_n + E_n - S_n, 0\} + \tilde{A}_n = \tilde{A}_n = \sum_{i=1}^l a'_i r_i \longrightarrow \sum_{i=1}^l a'_i r_i - s_1 \longrightarrow \cdots \\ &\longrightarrow \sum_{i=1}^l a'_i r_i - b'_1 s_1 - \cdots - (b'_v - 1) s_v = \sum_{i=1}^l a'_i r_i - \sum_{i=1}^v b'_i s_i + s_v = j + s_v \longrightarrow j. \end{aligned}$$

特别地取  $i = 0$ , 则有  $0 \longrightarrow j \in G_0$ .

另一方面,  $\forall j \in G_0$ , 若  $j \geq m, j \geq s_1$ , 由引理4知  $j \longrightarrow 0$ ; 若  $m \leq j < s_1$ , 由(1.3)式知  $j \longrightarrow 0$ ; 若  $j < m$ , 则同上面的证明知, 存在  $j_1 \geq m$ , 使得  $j \longrightarrow j_1 \longrightarrow 0$ . 综上所述, 得知  $0 \leftrightarrow j \in G_0$ , 即  $G_0$  为不可约子集.

若初始状态  $Q_0 = i \in G_0$ , 由(1)式知, 若  $i \longrightarrow j$ , 则  $j$  取  $j = k\delta (k = 0, 1, 2, \cdots)$  形式,  $j \in G_0$ , 故  $G_0$  为闭集. 证毕.

引入记号  $m_t = \min\{i | i \in G_t, i \geq m\}$ . 显然  $m_t$  为系统在  $G_t$  上的服务控制数.

定理2 若  $m_t > N (t \neq 0)$ , 则  $G_t$  为不可约闭集, 否则,  $G_t$  任一状态均可到达闭集  $G_0$ .

证明 (i) 当  $m_t > N$  时,  $\forall i, j \in G_t, i < m, j \geq i$ , 若  $P\{T_n < \infty\} > 0$ , 则由引理3,  $i \longrightarrow j$ ; 若  $P\{T_n < \infty\} = 0$ , 则总有

$$\begin{aligned} P\{Q_n + Y_n + E_n \geq s_1 | Q_n = i < m\} &\geq P\{Q_n + Y_n + E_n \geq N | Q_n = i < m\} \\ &\geq P\{Q_n + Y_n + E_n \geq m_t | Q_n = i < m\} = P\{Q_n + Y_n + E_n \geq m | Q_n = i < m\} = 1 \end{aligned}$$

成立. 由引理3知  $i \rightarrow j$ . 特别地  $t \rightarrow j \in G_t$  成立. 另一方面,  $\forall j \in G_t$ , 若  $j \geq m$ , 则  $j \geq m_t \geq N \geq s_1$ , 由引理4知,  $j \rightarrow t$ ; 若  $j < m$ , 则存在  $j_1 \geq m$ , 使得  $j \rightarrow j_1 \rightarrow t$ . 总之,  $\forall i, j \in G_t$ , 有  $i \leftrightarrow j$ . 故  $G_t$  不可约.

由(1)式可知, 状态从  $Q_0 \in G_t$  出发进入  $j$ , 且在此时接受服务, 必有  $j \geq m$ , 且  $j \in G_t$ , 故  $j \geq m_t > N \geq S_n$ , 即服务后, 系统状态不会为零, 状态始终保持  $k\delta + t$  形式, 故  $G_t$  为闭集.

(ii) 当  $m_t < N$  时,  $\forall i \in G_t, i < m$ , 若引理3的条件之一成立, 则有  $i \rightarrow m_t \rightarrow 0 \in G_0$ ; 反之, 则  $P\{T_n < \infty\} = 0, P\{m \leq Q_n + Y_n + E_n < s_1 | Q_n = i < m\} = 1$ , 此时可取  $S_n = s_1, \tilde{A}_n = 0$ , 则  $i \rightarrow \max\{Q_n + Y_n + E_n - S_n, 0\} + \tilde{A}_n = 0$ . 若  $i \geq m$ , 则若干步后  $i \rightarrow j < m$ , 再进入零状态. 总之,  $\forall i \in G_t$ , 均有  $i \rightarrow 0 \in G_0$ .

#### §4. $\{Q_n\}$ 的周期性

下面讨论不可约闭集  $G_0$  和  $G_t(m_t > N)$  的周期性. 因为  $m_t > N \geq \delta$  故  $m_t - \delta > 0, m_t - \delta \in G_t, m_t - \delta < m$ , 由此推知  $G_t$  的最小状态  $t \leq m_t - \delta < m$ .

当  $P\{T_n < \infty\} > 0$  时,  $p_{i,t}^{(1)} > 0$ , 从而  $t$  为非周期状态. 因为  $G_t(m_t > N)$  不可约, 故  $G_t$  所有状态均为非周期的. 同理  $G_0$  也是非周期的. 下面仅讨论  $P\{T_n < \infty\} = 0$ , 即  $T_n \equiv \infty$  的情形.

4.1  $G_t(t \neq 0, m_t > N)$  的周期性 由于  $P\{T_n < \infty\} = 0$ , 所以  $Q_n + Y_n \geq m$ , 服务不会取消, 由  $Q_n = t$  返回  $t$  的路径必为:

$$t \rightarrow t + \sum_{i=1}^{h'} a_i' r_i - s_j \rightarrow \dots \rightarrow t + \sum_{i=1}^h a_i r_i - \sum_{i=1}^v x_i s_i = t$$

形式, 即满足

$$\sum_{i=1}^h a_i r_i - \sum_{i=1}^v x_i s_i = 0, \quad (2)$$

其转移步数为  $\sum_{i=1}^v x_i$ .

引理5 若有正整数  $M$ , 使  $p_{i,t}^{(M)} > 0$ , 则  $M = kd$  ( $k \in N^+$ ), 其中

$$d = \frac{(s_2 - s_1, \dots, s_v - s_1, \sigma)}{(s_1, s_2 - s_1, \dots, s_v - s_1, \sigma)}.$$

证明 若  $p_{i,t}^{(M)} > 0$ , 由(2)式知存在充分大的  $h \in N^+$ , 使方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^v x_i s_i - \sum_{i=1}^h a_i r_i = 0, & (3.1) \\ \sum_{i=1}^v x_i = M, & (3.2) \end{cases}$$

有非负整数解  $\{a_i\}, \{x_i\}$ .

当  $v > 1$  时, 将(3.2)代入(3.1)整理得

$$\sum_{i=2}^v (s_i - s_1) x_i - \sum_{i=1}^h r_i a_i = -s_1 M. \quad (4)$$

若记  $q = (s_2 - s_1, \dots, s_v - s_1, r_1, \dots, r_h)$ . 由数论<sup>[8]</sup>知方程(4)有解的充要条件是  $q \mid s_1 M$ , 即  $\frac{q}{(q, s_1)} \mid \frac{s_1}{(q, s_1)} M$ . 因  $\frac{q}{(q, s_1)}$  和  $\frac{s_1}{(q, s_1)}$  互素, 故有  $\frac{q}{(q, s_1)} \mid M$ , 显然  $\frac{q}{(q, s_1)} = d$ , 所以  $d \mid M$ ,  $M = kd (k \in N^+)$ .

当  $v = 1$ , 同理可证  $M = kd$ , 此时  $d = \sigma / (s_1, \sigma)$ .

引理6 存在充分大的  $k_0$ , 当  $k \geq k_0$  时  $p_{i,t}^{(kd)} > 0$ .

证明 由不定方程组(3)及引理1知, 欲使  $p_{i,t}^{(kd)} > 0$ , 只需方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^v x_i s_i - n\sigma = 0, & (5.1) \\ \sum_{i=1}^v x_i = kd, & (5.2) \end{cases}$$

有非负整数解  $\{x_i\}, n (\geq n_0)$ .

当  $v > 1$  时, 将(5.2)代入(5.1)整理得

$$\sum_{i=2}^v (s_i - s_1)x_i - n\sigma = -s_1 kd. \quad (6)$$

设  $p = (s_2 - s_1, \dots, s_v - s_1)$ , 构造方程

$$\sum_{i=2}^v (s_i - s_1)x_i = pl, \quad (7)$$

$$pl - n\sigma = -s_1 \cdot d \cdot k. \quad (8)$$

对于方程(7), 同引理1可得: 存在  $l_0 \in N^+$ , 当  $l \geq l_0$  时, 有非负整数解  $x_1, \dots, x_v$ . 对于方程(8), 因为  $(p, \sigma) = q = d \cdot (s_1, q)$ , 所以  $(p, \sigma) \mid s_1 d$ . 由此得方程:

$$\frac{p}{q}l - \frac{\sigma}{q}n = -\frac{s_1}{(s_1, q)}k. \quad (9)$$

设  $lp/q + n\sigma/q = 1$  的特解为  $l^*, n^*$ , 则(9)的一般解为:

$$\begin{cases} l = -\frac{s_1}{(s_1, q)}l^*k + \frac{\sigma}{q}u, \\ n = -\frac{s_1}{(s_1, q)}n^*k + \frac{p}{q}u, \end{cases} \quad (u = 0, \pm, \dots).$$

解不等式组:

$$\begin{cases} l = -\frac{s_1}{(s_1, q)}l^*k + \frac{\sigma}{q}u \geq l_0, \\ n = -\frac{s_1}{(s_1, q)}n^*k + \frac{p}{q}u \geq n_0, \\ lp = -\frac{s_1 p}{(s_1, q)}l^*k + \frac{\sigma p}{q}u \leq kd. \end{cases} \quad (10)$$

由于当  $k \rightarrow +\infty$  时(10)的解空间长度趋于  $\infty$ , 故得证: 存在  $k_0 \in N^+$ , 当  $k \geq k_0$  时, 方程(8)有非负整数解  $l, n$ , 满足  $l \geq l_0, n \geq n_0, lp \leq kd$ .

对于上述确定的  $l$ , 代入(7)得非负整数解  $x_1, \dots, x_v$ , 再代入(5.2)得  $x_1$ , 且

$$x_1 = kd - \sum_{i=2}^v x_i \geq kd - \sum_{i=2}^v (s_i - s_1)x_i = kd - pl \geq 0,$$

从而  $k \geq k_0$  时, 方程组 (5) 有非负整数解,  $p_{t,t}^{(k,d)} > 0$ .

当  $v = 1$ , 由 (5) 可直接得到上述结果.

综合引理 5, 6, 便得:

**定理 3**  $P\{T_n < \infty\} = 0$  时,  $G_i (t \neq 0, m_t > N)$  周期为  $d$  ( $d = 1$  时为非周期链).

**4.2  $G_0$  的周期性** 由于  $G_0$  为不可约闭集, 故只需求使  $p_{0,0}^{(M)} > 0$  的最小正整数.

设  $H = \{i | i \in G_0, m \leq i \leq s_v\} = \{a\delta, (a+1)\delta, \dots, b\delta\}$ , 显然  $a\delta = m_0, b\delta = s_v = N$ .

**引理 7** 若  $P\{T_n < \infty\} = 0$ , 则  $p_{0,0}^{(1)} = 0, \dots, p_{0,0}^{(M-1)} = 0, p_{0,0}^{(M)} > 0$  的充要条件是:  $M$  为使下面不定方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^h r_i a_i - \sum_{i=1}^v s_i x_i = i\delta, \\ \sum_{i=1}^v x_i = M - 1, \end{cases} \quad (i\delta \in H), \quad (11)$$

有非负整数解  $\{x_i\}, \{a_i\}$  的最小正整数.

**证明** 因为  $P\{T_n < \infty\} = 0$ , 所以恒有  $Q_n + Y_n \geq m$ , 即每批服务不会取消. 另一方面, 由于  $p_{0,0}^{(1)} = 0, \dots, p_{0,0}^{(M-1)} = 0$ , 即从  $Q_0 = 0$  出发, 所有的  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{M-1}$  均不会为零. 由 (1) 式知每批服务中  $Q_{n-1} + Y_{n-1} + E_{n-1} - S_{n-1} > 0$  (或  $Q_{n-1} - S_{n-1} > 0$ ) ( $n = 1, 2, \dots, M-1$ ), 这说明每批实际服务的顾客数正是服务容量  $S_{n-1}$ , 从而  $Q_{M-1}$  可表成:

$$Q_{M-1} = \sum_{i=1}^{h'} r_i a'_i - (S_0 + S_1 + \dots + S_{M-2}) = \sum_{i=1}^{h'} r_i a'_i - \sum_{i=1}^v s_i x_i,$$

而

$$Q_M = \begin{cases} \max\{Q_{M-1} + Y_{M-1} + E_{M-1} - S_{M-1}, 0\} + \tilde{A}_{M-1}, & \text{当 } Q_{M-1} < m, \\ \max\{Q_{M-1} - S_{M-1}, 0\} + A_{M-1}, & \text{当 } Q_{M-1} \geq m. \end{cases} \quad (12)$$

记  $Q_{M-1} + Y_{M-1} + E_{M-1}$  或  $Q_{M-1}$  为  $\sum_{i=1}^h r_i a_i - \sum_{i=1}^v s_i x_i$ , 由 (12) 式可推知:  $p_{0,0}^{(1)} = \dots = p_{0,0}^{(M-1)} = 0, p_{0,0}^{(M)} > 0$ , 即  $Q_1, \dots, Q_{M-1}$  不会为零, 而  $Q_M$  可能为零, 当且仅当,  $M$  是使

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^v r_i a_i - \sum_{i=1}^h s_i x_i - S_{M-1} \leq 0, \end{cases} \quad (13.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^v x_i = M - 1, \end{cases} \quad (13.2)$$

有非负整数解  $\{x_i\}, \{a_i\}$  的最小正整数. 由于

$$m \leq \sum_{i=1}^h r_i a_i - \sum_{i=1}^v s_i x_i \leq S_{M-1} \leq S_v = N,$$

由  $H$  定义知, 方程 (13.1) 可表成:

$$\sum_{i=1}^h r_i a_i - \sum_{i=1}^v s_i x_i = i\delta, \quad (i\delta \in H).$$

引理得证.

**定理4** 设  $P\{T_n < \infty\} = 0$ , 若  $H$  为单点集, 则  $G_0$  周期为  $d$  ( $d=1$  时为非周期), 否则  $G_0$  为非周期的.

**证明** 由引理7知, 求  $G_0$  的周期, 只需求解方程组 (11). 当  $v > 1$  时, 仿引理5, 6的证明不难推知: 方程 (11) 有解, 当且仅当方程

$$\sum_{i=2}^v (s_i - s_1)x_i - n\sigma = s_1 - i\delta - s_1M \quad (14)$$

有非负整数解  $\{x_i\}$ ,  $n (\geq n_0)$ , 即要求

$$q = (s_2 - s_1, \dots, s_v - s_1, \sigma) \mid (s_1 - b\delta - s_1M). \quad (15)$$

(i) 若  $H = \{b\delta\} = \{s_v\}$  为单点集, 将  $i\delta = b\delta$  代入 (15) 式得:

$$\begin{aligned} \text{方程 (11) 有解} &\iff q \mid (s_1 - b\delta - s_1M) \\ &\iff q \mid s_1M, \quad (\text{因为 } q \mid (s_1 - b\delta) \iff d = \frac{q}{(s_1, q)} \mid M, \end{aligned}$$

即  $M = kd$ . 取  $M$  的最小正整数  $d$  便是  $G_0$  的周期.

(ii) 若  $H$  不是单点集, 则另有  $(b-1)\delta \in H$ . 同定理1的证明可推知:  $0 \rightarrow (b-1)\delta \rightarrow 0$  成立, 根据引理7得: 存在  $M$ , 使得

$$\begin{cases} Q_{M-1} = \sum_{i=1}^h r_i a_i - \sum_{i=1}^v s_i x_i = (b-1)\delta, \\ \sum_{i=1}^v x_i = M-1, \end{cases}$$

有解, 即  $q \mid (s_1 - (b-1)\delta - s_1M) \implies q \mid (\delta - s_1M) \implies s_1M - \delta = kq$ , 即方程

$$\frac{s_1}{\delta} M - \frac{q}{\delta} k = 1 \quad (16)$$

有非负整数解  $M, k_0$ , 设其特解为  $k^*, M^*$ , 则一般解为:

$$\begin{cases} k = k^* + \frac{s_1}{\delta} u, \\ M = M^* + \frac{q}{\delta} u, \quad (u = 0, \pm 1, \dots). \end{cases}$$

从而, 当  $u$  充分大时有  $p_{0,0}^{(M^* + qu/\delta)} > 0$ , 设  $c_1 = s_1/\delta$ ,  $c_2 = k^*$ , 由 (16) 式知  $c_1 M^* - c_2 q/\delta = 1$ , 由此得:  $(c_1 + 1)(M^* + q\delta/u) = 1 + M^* + q(c_2 + c_1 u + u)/\delta$ , 从而同时有

$$p_{0,0}^{(M^* + \frac{q}{\delta}(c_2 + c_1 u + u))} > 0, \quad p_{0,0}^{(1 + M^* + \frac{q}{\delta}(c_2 + c_1 u + u))} > 0$$

成立, 所以  $G_0$  为非周期的.

同理可证  $v = 1$  的情形.

定理3~4 完整的解决了成批服务排队系统嵌入 Markov 链的周期性判断和周期值的计算问题, 特别地, 当  $P\{T_n < \infty\} = 0$ ,  $m = M = 1$  时, 由定理4 易得到文献 [3] 中定理2 诸结论.

**致谢:** 本文得到重庆大学伊亨云教授的热情指导, 特表谢意.

## 参 考 文 献

- [1] Bailey, N. T. J., On queueing processes with bulk service. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B.* **16**(1954), 80-87.
- [2] Powell, W. B., The bulk service queue with a general control strategy: Theoretical analysis and a new computational procedure. *Oper. Research* **34**(1986), 267-275.
- [3] Zhang Fuji & Chen Yongyi, On periodic phenomena and stationary distribution of queueing system  $M/G/1$  with group arrivals and batch service. *Acta Math. Applic. Sinica (English Series)* **4**(1988), 207-222.
- [4] Powell, W. B., Analysis of vehicle holding and cancellation strategies in bulk arrivals, bulk service queue. *Trans. Sci.* **10**(1985), 352-377.
- [5] Neuts, M. F., A general class of bulk queues with Poisson input. *Ann. Math. Statist.* **38**(1967), 759-770.
- [6] Medhi, J., Waiting time distribution in a Poisson queue with a general bulk service rule. *Mgmt. Sci.* **21**(1975), 777-782.
- [7] Teghem, J., Loris-Teghem, J. & Lambotte, J. P., *Modèles D'attente  $M/G/1$  et  $GI/M/1$  à Arrivées et Services en Groups.* Springer-Verlag, New York, 1969.
- [8] 冈嗣鹤、严士健, 初等数论, 人民教育出版社, 1983.

## Behaviour of the Imbedded Markov Chain of the General Bulk Service Queueing System

LI YINGUO

(*Chongqing Institute of Architecture, Chongqing*)

In this paper, the model of queueing system  $M/G/1$  with group arrivals, batch service and more general control strategy is introduced; and several questions about the structure of the phase space of the imbedded Markov chain and its irreducibility and aperiodicity for this kind of queueing system are discussed completely, and the formula of the periodic value is also obtained.