应用概率统计　第三卷
第四期　1987年11月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 3. No. 4 Nov. 1987

线性随机微分方程与其ARMA采样模型参数变换的一般解法

朱 维 彰
(西安工业学院)

摘　　要

在[1]结果的基础上，本文给出了线性随机微分方程与其ARMA形式采样模型问题的一般解法。它可以在两者之间用其中一个的参数解出另一个的参数．这个解法是容易由计算机实现的．

在统计意义上研究线性随机微分方程和ARMA模型的关系，对于连续系统建模、连续随机系统的数字仿真、随机系统的控制都具有重要意义．[1]曾论证了ARMA$(n, n-1)$模型是n维线性随机微分方程的采样模型的充要条件，它们是一组关于两者参数变换的非线性方程．[1]还给出了$n=1, \cdots, 5$时这组方程的特殊解法．本文将在讨论这组方程解的个数、各解之间的关系的基础上，给出对任何n都适用的一般解法．

考虑规范形的n维线性随机微分方程

$$\begin{cases} dX=\begin{bmatrix} 0 & \cdots\cdots & -\alpha_n \\ 1 & & -\alpha_{n-1} \\ \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots\ 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} X dt+\begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} dZ(t) \\ Y=[0\cdots\cdots 1]X \end{cases} \tag{0.1}$$

其中$\{Z(t)\}$为维纳过程，$E[Z(t)-Z(t')]^2=\sigma_z^2|t-t'|$，$\beta_n=1$.

若多项式$\alpha(D)=D^n+\alpha_1D^{n-1}+\cdots+\alpha_n$的根$\mu_i$, $i=1,2,\cdots,n$互异，且有负实部，则(0.1)的稳定解$\{Y(t)\}$的协方差函数为[1]

$$\gamma_c(S)=\sigma_z^2\sum_{i=1}^{n}\frac{u_iB(\mu_i)B(-\mu_i)}{\alpha(-\mu_i)}e^{|S|\mu_i}$$

其中

$$B(D)\triangleq\beta_1D^{n-1}+\beta_2D^{n-2}+\cdots+\beta_n$$

$$u_i\triangleq\prod_{j\neq i, j=1}^{n}(\mu_i-\mu_j)^{-1}$$

考虑ARMA$(n, n-1)$模型

$$Y_k+\phi_1Y_{k-1}+\cdots+\phi_nY_{k-n}=a_k+\theta_1a_{k-1}+\cdots+\theta_{n-1}a_{k-n+1} \tag{0.2}$$

其中$\{a_k\}$为白噪声，$Ea_k^2=\sigma_a^2$．若多项式$\Phi(z)=Z^n+\phi_1Z^{n-1}+\cdots+\phi_n$的根$p_i$, $i=1,\cdots,n$互异，并在单位圆内，则(0.2)的解$\{Y_k\}$的协方差函数为[1]

本文1986年1月7日收到，1986年5月28日收到修改稿。

$$\gamma(\tau)=\sigma_a^2\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i\Theta(p_i)\Theta(p_i^{-1})}{p_i\Phi(p_i^{-1})}p_i^{|\tau|}$$

其中
$$\Theta(z)=Z^{n-1}+\theta_1 Z^{n-2}+\cdots+\theta_{n-1}$$

$$v_i=\prod_{j\neq i,\ j=1}^{n}(p_i-p_j)^{-1}$$

如果 $\gamma_c(s)$ 和 $\gamma(\tau)$, 对常数 $\Delta>0$ 及 $\tau=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$, 满足

$$\gamma_c(\tau\Delta)=\gamma(\tau)$$

则称(0.2)为(0.1)的采样间隔为 Δ 的采样模型.

若 $B(\pm\mu_i)\neq0$, (0.2)是(0.1)的采样模型的充要条件为

$$\begin{cases}p_i=e^{\Delta\mu_i} & (0.3)\\ \dfrac{u_iB(\mu_i)B(-\mu_i)}{\alpha(-\mu_i)}\sigma_z^2=\dfrac{v_i\Theta(p_i)\Theta(p_i^{-1})}{p_i\Phi(p_i^{-1})}\sigma_a^2 & (0.4)\end{cases}$$

由(0.3), 若已知 μ_i, 则可唯一解出 p_i. 反之, 若已知 p_i, 而且为复数时, 则 μ_i 可能多值,

$$\Delta\mathrm{Im}\,\mu_i=\arg p_i+2k\pi$$
$$k\in\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\},\ -\pi\leqslant\arg p_i\leqslant\pi$$

但如果我们对具有参数 μ_i^* 的实际系统采样, 总存在充分小的 Δ, 使得 $-\pi\leqslant\mathrm{Im}\mu_i^*\Delta\leqslant\pi$. 此时, $\arg p_i=\mathrm{Im}\,\mu_i^*\Delta$, 所以当 Δ 充分小时, 取 $k=0$, 则有 $\mathrm{Im}\,\mu_i=\mathrm{Im}\,\mu_i^*$. 在这样的意义上, 当 Δ 充分小时, 多值性将不存在.

本文设 p_i 或 μ_i 为已知, 仅讨论由(0.4)提供的关于 σ_z^2、β_i 与 σ_a^2、θ_i 关系的 n 个非线性方程的解及解法.

(一)

已知 $\{\sigma_z^2,\ \beta_i,\ i=1,\ \cdots,\ n-1\}$ 求 $\{\sigma_a^2,\ \theta_i,\ i=1,\ \cdots,\ n-1\}$

(A) (0.4)解的个数及各解之间的关系

以 $\{\Theta(z),\ \sigma_a^2\}$ 表示(0.4)左端为已知时的解, 由于 $\Theta(z)$ 可能含若干个零根, 所以 $\Theta(z)$ 可表示为

$$\Theta(z)=Z^{n-1-r}\prod_{s=1}^{r}(Z-h_s),\quad h_s\neq0,\ 0\leqslant r\leqslant n-1$$

易得

$$\begin{aligned}\Theta(p_i)\Theta(p_i^{-1})&=\prod_{s=1}^{r}(p_i-h_s)(p_i^{-1}-h_s)\\&=(-1)^r\left(\prod_{s=1}^{r}h_s\right)\prod_{s=1}^{r}\left[(p_i+p_i^{-1})-(1+h_s^2)/h_s\right]\end{aligned}\tag{1.1}$$

定理 1 设 $\left\{\Theta^{(1)}(z)=z^{n-1-r_1}\prod_{s=1}^{r_1}(z-h_s^{(1)}),\quad \sigma_a^{(1)^2}\right\}$ 是(0.4)的解, 如果

$$\left\{\Theta^{(2)}(z)=z^{n-1-r_2}\prod_{s=1}^{r_2}(z-h_s^{(2)}),\quad \sigma_a^{(2)^2}\right\}$$

也是(0.4)的解, 当且仅当下面诸条件成立:

(i) $r_1=r_2$

(ii) $h_s^{(2)}=h_s^{(1)}$ 或 $h_s^{(2)}=h_s^{(1)-1}$ (*注)

(iii) $\sigma_a^{(2)2}\prod_{s=1}^{r_2}h_s^{(2)}=\sigma_a^{(1)2}\prod_{s=1}^{r_1}h_s^{(1)}$

(*注：若 $h_s^{(1)}$、$h_s^{(2)}$ 中某对共轭复数中的一个满足 $h_s^{(1)}=h_s^{(2)-1}$，则与之共轭的另一个也必须满足此式)

证明 (必要性)设 $\{\Theta^{(2)}(z),\ \sigma_a^{(2)2}\}$ 是(0.4)的解. 则由(0.4)易得

$$\sigma_a^{(2)2}\Theta^{(2)}(p_i)\Theta^{(2)}(p_i^{-1})=\sigma_a^{(1)2}\Theta^{(1)}(p_i)\Theta^{(1)}(p_i^{-1}) \tag{1.2}$$

设两个多项式

$$W^{(j)}(x)=\sigma_a^{(j)2}(-1)^{r_j}\Big(\prod_{s=1}^{r_j}h_s^{(j)}\Big)\prod_{s=1}^{r_j}\big(x-(1+h_s^{(j)2})/h_s^{(j)}\big),\quad j=1,\ 2$$

则由(1.1)、(1.2)可得

$$W^{(1)}(p_i+p_i^{-1})=W^{(2)}(p_i+p_i^{-1}) \tag{1.3}$$

上式意味着两个阶不高于 $(n-1)$ 的实系数多项式 $W^{(1)}(x)$、$W^{(2)}(x)$ 在 n 个互异点 $\{p_i+p_i^{-1},\ i=1,\ \cdots,\ n\}$ 上有相同的值. 所以它们的阶、系数均相等(于是根也相等)，故可得

$$r_1=r_2,\ \sigma_a^{(1)2}\prod_{s=1}^{r}h_s^{(1)}=\sigma_a^{(2)2}\prod_{s=1}^{r}h_s^{(2)}$$

$$(1+h_s^{(2)2})/h_s^{(2)}=(1+h_s^{(1)2})/h_s^{(1)}$$

由上式可得 $$h_s^{(2)}=h_s^{(1)}\quad 或\quad h_s^{(2)}=h_s^{(1)-1}$$

(充分性)不失一般性，设

$$\begin{cases}h_s^{(2)}=h_s^{(1)-1} & s=1,\ \cdots,\ k\leqslant r\\ h_s^{(2)}=h_s^{(1)} & s=k+1,\ \cdots,\ r\end{cases} \tag{1.4}$$

则由(iii)可得

$$\sigma_a^{(2)2}=\sigma_a^{(1)2}\prod_{s=1}^{k}h_s^{(1)2} \tag{1.5}$$

注意到 $$\prod_{s=1}^{k}(p_i-h_s^{(1)-1})(p_i^{-1}-h_s^{(1)-1})=\prod_{s=1}^{k}h_s^{(1)-2}(p_i-h_s^{(1)})(p_i^{-1}-h_s^{(1)})$$

由(1.4)、(1.5)可得

$$\sigma_a^{(2)2}\Theta^{(2)}(p_i)\Theta^{(2)}(p_i^{-1})=\sigma_a^{(1)2}\Theta^{(1)}(p_i)\Theta^{(1)}(p_i^{-1})$$

故 $\{\Theta^{(2)}(z),\ \sigma_a^{(2)2}]$ 也是(0.4)的解.

推论 1 若已知(0.4)的一个解 $\Theta(z)$，没有非零重根，有 n_1 个模不等于1的非零实根，n_2 对模不等于1的共轭复根. 则(0.4)共有 $2^{n_1+n_2}$ 个解.

证明 设 $1\leqslant m\leqslant n_1+n_2$，任取 m 个(对)由其倒数替换，共有 $\binom{n_1+n_2}{m}$ 种取法. 考虑 $m=1,\ 2,\ \cdots,\ n_1+n_2$，则共有

$$\binom{n_1+n_2}{1}+\binom{n_1+n_2}{2}+\cdots+\binom{n_1+n_2}{n_1+n_2}=2^{n_1+n_2}-1$$

种取法. 加上解 $\Theta(z)$，故共有 $2^{n_1+n_2}$ 个解.

当 $n_2=0,\ n_1=n-1$ 时，$2^{n_1+n_2}$ 有最大值 2^{n-1}. 故有

推论 2 在推论1的条件下，(0.4)最多有 2^{n-1} 个解.

推论 3 在(0.4)所有解中，必有唯一的一个解 $\{\Theta^{(v)}(z),\ \sigma_a^{(v)2}\}$，$\Theta^{(v)}(z)$ 的根全部在单位圆上(若没有模等于1的根，即满足ARMA模型的可逆条件)，并在诸解中 $\sigma_a^{(v)2}$ 为最大。

证明 对(0. 4)任一个解 $\Theta(z)$ 的所有模大于1的根用其倒数替换，即得 $\Theta^{(v)}(z)$，并由定理1中的(iii)可知，相应的 $\sigma_a^{(v)2}$ 在诸解中为最大.

(B) 由 σ_z^2, β_i 解出 σ_a^2, θ_i 的解法

设

$$m_i \triangleq (p_i \Phi(p_i^{-1})/v_i)(u_i B(\mu_i) B(-\mu_i)/\alpha(-\mu_i)),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.6}$$

为已知(可由 μ_i, β_i 及(0.3)算出)

$$W(x) \triangleq (-1)^r \left(\prod_{s=1}^{r} h_s\right) \prod_{s=1}^{r} [x-(1+h_s^2)/h_s]\sigma_a^2/\sigma_z^2$$
$$\triangleq \omega_1 x^{n-1} + \omega_2 x^{n-2} + \cdots + \omega_n$$

显然

$$\omega_{n-r} = (-1)^r (\sigma_a^2/\sigma_z^2) \prod_{s=1}^{r} h_s \neq 0 \tag{1.7}$$
$$\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_{n-r-1} = 0$$

当 $r<n-1$ 时由(0.4)可得

$$\Theta(p_i)\Theta(p_i^{-1})\sigma_a^2/\sigma_z^2 = W(p_i+p_i^{-1}) = m_i \tag{1.8}$$

据根定理1及其推论和上面各式，可得下面解(0.4)的步骤:

(i) 由(1.6)算出 m_i, $i=1,\cdots,n$

(ii) 由(1.8)可得

$$\begin{bmatrix} 1 & (p_1+p_1^{-1}) & (p_1+p_1^{-1})^2 & \cdots & (p_1+p_1^{-1})^{n-1} \\ 1 & (p_2+p_2^{-1}) & (p_2+p_2^{-1})^2 & \cdots & (p_2+p_2^{-1})^{n-1} \\ & & \vdots & & \\ 1 & (p_n+p_n^{-1}) & (p_n+p_n^{-1})^2 & \cdots & (p_n+p_n^{-1})^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_n \\ \omega_{n-1} \\ \vdots \\ \omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}$$

由于 p_i 互异，并在单位圆内，上式左边的范德蒙矩阵的逆存在，故可唯一解出 ω_i，也可由附录1所提供的范德蒙矩阵逆的表达式，直接得到

$$\omega_{n-i+1} = \phi_n \sum_{j=1}^{n} Q_{i,j}(p_j-p_j^{-1})(u_j B(\mu_j) B(-\mu_j)/\alpha(-\mu_j))$$

其中

$$Q_{i,j} \triangleq \sum_{l=0}^{n-i} \phi_l^+ (p_j+p_j^{-1})^{n-i-l}$$

$$\phi_0^+ Z^n + \phi_1^+ Z^{n-1} + \cdots + \phi_n^+ \triangleq \sum_{j=1}^{n} (Z-(p_j+p_j^{-1}))$$

由上式计算 ω_j, $j=1,\cdots,n$，可以避免当范德蒙行列式的值很小时，计算机舍入误差的影响.

(iii) 从 ω_1 开始依次判断 ω_i 是否等于零，直到出现第一个不等于零的系数，即 ω_{n-r} 为止.

(iv) 当 $r\neq 0$ 时，解代数方程

$$\omega_{n-r} x^r + \omega_{n-r+1} x^{r-1} + \cdots + \omega_n = 0$$

的所有根，设为 η_s, $s=1,\cdots,r$. 如果 $r=0$，则执行(vii)

(v) 由于 $(1+h_s^2)/h_s=\eta_s$，解之可得

$$h_s = (\eta_s + \sqrt{\eta_s^2-4})/2 \quad 或 \quad h_s = (\eta_s - \sqrt{\eta_s^2-4})/2$$

任取其中一个即可.

(vi) 对 h_s, $s=1,\cdots,r$ 中所有模大于1的进行倒数替换，即得 $h_s^{(v)}$, $s=1,\cdots,r$ (见推论3)

(vii) $\Theta^{(v)}(z)=Z^{n-1-r}\prod_{s=1}^{r}(Z-h_s^{(v)})$

(viii) 由(1.7)得

$$\sigma_a^{(v)^2}=(-1)^r\omega_{n-r}\sigma_z^2\prod_{s=1}^{r}h_s^{(v)-1},$$

若 $r=0$, $\sigma_a^{(v)^2}=\omega_n\sigma_z^2$.

(二)

由已知 $\{\theta_i, i=1, \cdots, n-1, \sigma_a^2\}$ 求 $\{\beta_i=1, \cdots, n-1, \sigma_z^2\}$

(A) (0.4)解的个数及各解之间的关系

以 $\{B(D), \sigma_z^2\}$ 表示(0.4)右端已知时的解. 由于 $\beta_n=1$, 所以 $B(D)$ 没有零根. 但从 β_i 开始可能有若干个系数等于零,故 $B(D)$ 一般可表示为

$$B(D)=\beta_{n-r}\prod_{s=1}^{r}(D-g_s), \quad \beta_{n-r}\neq 0,\ 0\leqslant r\leqslant n-1$$

可得

$$B(\mu_i)B(-\mu_i)=(-1)^r\beta_{n-r}^2\prod_{s=1}^{r}(\mu_i^2-g_s^2) \tag{2.1}$$

$$(-1)^r\beta_{n-r}\prod_{s=1}^{r}g_s=\beta_n=1 \tag{2.2}$$

定理2 设 $\{B^{(1)}(D)=\beta_{n-r_1}^{(1)}\prod_{s=1}^{r_1}(D-g_s^{(1)}), \sigma_z^{(1)^2}\}$ 是(0.4)的解,则如果

$$\{B^{(2)}(D)=\beta_{n-r_2}^{(2)}\prod_{s=1}^{r_2}(D-g_s^{(2)}), \sigma_z^{(2)^2}\}$$

也是(0.4)的解,当而且仅当下列条件成立

(i) $r_2=r_1$,

(ii) $\beta_{n-r_2}^{(2)^2}=\beta_{n-r_1}^{(1)^2}$,

(iii) $g_s^{(2)}=g_s^{(1)}$ 或 $g_s^{(2)}=-g_s^{(1)}$, (*注)

(iv) $\sigma_z^{(2)^2}=\sigma_z^{(1)^2}$

(*注: 若 $g_s^{(2)}$, $g_s^{(1)}$, $s=1, \cdots, r$ 中某对共轭复数中的一个满足 $g_s^{(2)}=-g_s^{(1)}$,则与之共轭的另一个也必需满足此式)

证明 (必要性)设 $\{B^{(2)}(D), \sigma_z^{(2)^2}\}$ 是(0.4)的解,则由(0.4)得

$$\sigma_z^{(2)^2}B^{(2)}(\mu_i)(B^{(2)}(-\mu_i)=\sigma_z^{(1)^2}B^{(1)}(\mu_i)B^{(1)}(-\mu_i) \tag{2.3}$$

分别设两个多项式

$$L^{(j)}(x)\triangleq(-1)^{r_j}\sigma_z^{(j)^2}\beta_{n-r_j}^{(j)^2}\prod_{s=1}^{r_j}(x-g_s^{(j)^2})\triangleq\sum_{s=0}^{r_j}l_s^{(j)}x^{r_j-s}, \quad j=1, 2$$

由(2.1)、(2.3)可得

$$L^{(2)}(\mu_i^2)=L^{(1)}(\mu_i^2), \quad i=1, \cdots, n$$

上式表明两个阶数不高于$(n-1)$的多项式 $L^{(1)}(x)$、$L^{(2)}(x)$,在 n 个互异点 μ_i^2, $i=1,\cdots, n$ 上有相同值,所以它们有相同的阶数、系数(于是有相同的根),故可得

$$r_1=r_2,\ g_s^{(2)^2}=g_s^{(1)^2},\ l_s^{(2)}=l_s^{(1)},\ s=1, \cdots, r$$

因而可证

$$g_s^{(2)}=g_s^{(1)} \quad 或 \quad g_s^{(2)}=-g_s^{(1)}.$$

由 $l_r^{(j)}=\sigma_z^{(j)^2}\left(\beta_{n-r}^{(j)}\prod_{s=1}^{r_j} g_s^{(j)}\right)^2$, $j=1, 2$ 及(2.2)可证 $\sigma_z^{(2)^2}=\sigma_z^{(1)^2}$

由 $l_n^{(j)}=(-1)^{r_j}\sigma_z^{(j)^2}\beta_{n-r}^{(j)^2}$, $j=1,2$ 可证 $\beta_{n-r}^{(1)^2}=\beta_{n-r}^{(2)^2}$.

(充分性)　注意到(2.1),由(i)—(iv)容证

$$\sigma_z^{(2)^2}B^{(2)}(\mu_i)B^{(2)}(-\mu_i)=\sigma_z^{(1)^2}B^{(1)}(\mu_i)B^{(1)}(-\mu_i)$$

推论 4　若已知(0.4)的一个解 $B(D)$,没有重根,而有 n_1 个实根,n_2 对共轭复根,则(0.4)共有 $2^{n_1+n_2}$ 个解.

推论 5　在推论 4 的条件下,(0.4)最多有 2^{n-1} 个解.

推论 4、5 的证明与推论 1、2 类似.

推论 6　(0.4)的所有解中,唯一存在一个解 $B^{(v)}(D)$, 它的根都具有非正实部.

证明　对(0.4)任一个解 $B(D)$所有具有正实部的根 g_s 由 $-g_s$ 替换, 即可证.

(B)　由 σ_a^2、θ_i 解出 σ_z^2、β_i 的解法

设

$$f_i\triangleq(\alpha(-\mu_i)/\mu_i)(v_i\Theta(p_i)\Theta(p_i^{-1})p_i^{-1}/\Phi(p_i^{-1})),\quad i=1, \cdots, n \tag{2.4}$$

$$L(x)\triangleq(-1)^r\beta_{n-r}^2\left(\prod_{s=1}^{r}(x-g_s^2)\right)\sigma_z^2/\sigma_a^2$$

$$\triangleq l_1x^{n-1}+l_2x^{n-2}+\cdots+l_n$$

则由(0.4)得

$$B(\mu_i)B(-\mu_i)\sigma_z^2/\sigma_a^2=L(\mu_i^2)=f_i \tag{2.5}$$

据根定理 2 及上面各式;可得下面由 σ_a^2、θ_i 解出 σ_a^2、β_i 的解法:

(i)　由(2.4)算出 f_i

(ii)　由(2.5)得

$$\begin{bmatrix}1 & \mu_1^2 & (\mu_1^2)^2 & \cdots & (\mu_1^2)^{n-1}\\ 1 & \mu_2^2 & (\mu_2^2)^2 & \cdots & (\mu_2^2)^{n-1}\\ & & \vdots & & \\ 1 & \mu_n^2 & (\mu_n^2)^2 & \cdots & (\mu_n^2)^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_n\\ l_{n-1}\\ \vdots\\ l_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{bmatrix}$$

由于 μ_i 互异,具有负实部,上式左边范德蒙矩阵的逆存在,故可唯一解出 l_i.

也可利用附录 1 的结果,得出

$$l_{n-i+1}=(-1)^n2\sum_{j=1}^{n}J_{i,j}\mu_jv_j\Theta(p_j)\Theta(p_j^{-1})p_j^{-1}/\Phi(p_j^{-1}),\quad i=1, 2, \cdots, n$$

其中

$$J_{i,j}\triangleq\sum_{l=0}^{n-i}\alpha_l^+(\mu_j^2)^{n-i-l}$$

$$\alpha_0^+D^n+\alpha_1^+D^{n-1}+\cdots+\alpha_n^+\triangleq\prod_{j=1}^{n}(D-\mu_j^2)$$

(iii)　从 l_1 开始依次判断 l_i 是否等于零, 直到出现第一个不等于零的系数为止,则第一个不等于零的系数即为 l_{n-r}.

(iv)　若 $r\neq0$,解下面代数方程

$$l_{n-r}x^r+l_{n-r+1}x^{r-1}+\cdots+l_n=0$$

的所有根. 设为 ζ_s, $s=1, \cdots, r$.

若 $r=0$,执行(vii).

(v) 由于 $g_s^2=\zeta_s$，取 $g_s=\zeta_s^{1/2}$.

(vi) 据根定理 2，对 g_s 进行各种可能的反号替换，则可得(0.4)所有可能解 $B^{(j)}(D)$ 的根 $g_s^{(j)}$.（上标 j 表示某个可能解）

(vii) 由(2.2)得

$$\beta_{n-r}^{(j)}=(-1)^r\prod_{s=1}^{r}g_s^{(j)-1}.$$

若 $r=0$, $\beta_n^{(j)}=1$.

(viii) $B^{(j)}(D)=\beta_{n-r}^{(j)}\prod_{s=1}^{r}(D-g_s^{(j)})$

(ix) 由 $l_n=\beta_{n-r}^{(j)2}\prod_{s=1}^{r}g_s^{(j)2}\sigma_z^2/\sigma_a^2$ 及(2.2)得 $\sigma_z^2=l_n\sigma_a^2$,

(三)

本文在第一、二节所提供的方程(0.4)的解法，仅涉及解高次代数方程，这在数值计算中已不是困难的事情．所以，本文提供的解法是容易用数字计算机计算的．所费机时大体上与解高次代数方程相当．

推论 3、推论 6 表明，如果我们称多项式 $B(D)$ 所有根都有负实部的(0.1)为最小相位模型（与控制理论中最小相位系统概念类似），则方程(0.4)，在要求可逆的 ARMA$(n, n-1)$ 模型和最小相位模型条件下解是唯一的．这在工程上和理论上都是有重要意义的

附录 1 如果 λ_i, $i=1, \cdots, n$ 是实系数多项式

$$d_0x^n+d_1x^{n-1}+\cdots+d_n,\quad d_0=1$$

的 n 个互异的根，则矩阵

$$\lambda^{-1}\triangleq\begin{bmatrix}1 & \lambda_1\lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2\lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ & \vdots & & \\ 1 & \lambda_n\lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}$$

的第 i 行，第 j 列元素 $u_{i,j}$ 满足

$$u_{i,j}=\sum_{l=0}^{n-i}d_l\lambda_j^{n-i-l}u_{n,j},\quad i=1, \cdots, n-1$$

$$u_{n,j}=\prod_{i=1, i\neq j}^{n}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}$$

证明 ∵ λ_i 互异，∴ λ^{-1} 存在，而且有

$$\lambda\begin{bmatrix}0 & 0\cdots\cdots & -d_n\\ 1 & 0 & -d_{n-1}\\ & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots\ 1 & -d_1\end{bmatrix}\lambda^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{bmatrix}0 & 0\cdots\cdots & -d_n\\ 1 & 0 & -d_{n-1}\\ & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots\ 1 & -d_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{1,j}\\ u_{2,j}\\ \vdots\\ u_{n,j}\end{bmatrix}=\lambda_j\begin{bmatrix}u_{1,j}\\ u_{2,j}\\ \vdots\\ u_{n,j}\end{bmatrix}$$

展开可得 $$u_{i,j}=\sum_{l=0}^{n-i}\lambda_j^{n-i-l}u_{n,j}$$

由于 $$[1\quad \lambda_j\quad \cdots\quad \lambda_j^{n-1}][u_{1,j}\quad u_{2,j}\quad \cdots\quad u_{n,j}]^T=1$$

可得 $$u_{n,j}=\left(\sum_{l=0}^{n-1}(n-l)\lambda_j^{n-l-1}d_l\right)^{-1}=\prod_{i=1,\ i\neq j}^{n}(\lambda_j-\lambda_i)^{-1}$$

参 考 文 献

[1] 朱维彰,线性随机微分方程与其 ARMA 形式的采样模型,控制理论与应用 Vol. 4, No. 2, 1987.

A UNIVERSAL ALGORITHM OF PARAMETER CONVERSION FROM A SAMPLING ARMA MODEL TO THE CORRESPONDING LINEAR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION AND VICE VERSA

ZU WEIZHANG
(*Xian Institute of Technology*)

In [1], is developed a set of non-linear equations with respect to parameter conversion from a sampling ARMA model to the corresponding linear stochastic differential equation and vice versa. In this paper, the properties of the solutions of these equations are discussed and a general solutions, which is easily realized by computer, is developed.