应用概率统计 第十一卷
第四期 1995年11月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 11, No. 4, Nov. 1995

均值参数矩阵的可容许性估计*

陈 清 平
(郧阳师范专科学校, 丹江口, 441900)

摘 要

本文讨论矩阵正态回归模型 $\mathcal{N}_{n\times m}(X\Theta,\Sigma\otimes V)$ 中均值参数矩阵 Θ 的可容许估计, 给出了一个线性估计在一切估计类中是可容许的充分条件, 必要条件或充分必要条件, 推广了目前已知的结果

关键词: 正态回归模型, 二次矩阵损失, G-可容许性.

学科分类号: 212.4.

§1. 引 言

矩阵正态回归模型:

$$Y_{n\times m}\sim\mathcal{N}(X\Theta,\Sigma\otimes V)\qquad(\Sigma>0,V>0),\tag{1.1}$$

其中 $\mathcal{N}(X\Theta,\Sigma\otimes V)$ 表示矩阵正态分布, $X_{n\times p}$ 是已知的设计矩阵, $\Theta_{p\times m}$ 是未知参数矩阵, $\Sigma_{n\times n}$ 和 $V_{m\times m}$ 是已知的或未知的, $X\Theta$ 是矩阵正态分布的均值矩阵, $\Sigma\otimes V$ 是 Y 按行拉直所得的多元正态分布的协方差矩阵, 我们称为模型 (1.1).

为了估计参数 $S\Theta$, 设矩阵估计量为 $D(Y)$, 取损失函数:

$$L(D(Y),S\Theta)=(D(Y)-S\Theta)'(D(Y)-S\Theta),$$

其中 S 是 $q\times p$ 阶已知矩阵. 相应的风险矩阵为:

$$R(D,S\Theta,(\Sigma,V))=\mathsf{E}_{(\Theta,(\Sigma,V))}L(D(Y),S\Theta).$$

当 V 已知时, 风险矩阵记为 $R(D,S\Theta,\Sigma)$.

为了评价两个估计, 多元分析中常用 A-优准则, 即若:

$$tr[R(D_1,S\Theta,(\Sigma,V))]\le tr[R(D_2,S\Theta,(\Sigma,V))],$$

对一切的 $(\Theta,(\Sigma,V))$ 成立. 且存在 $(\Theta_0,(\Sigma_0,V_0))$ 使严格不等号成立, 则称 $D_1(Y)$ A-优于 $D_2(Y)$.

注意到风险矩阵的非负定性, 我们有 $D_1(Y)$ G-优于 $D_2(Y)$, 即若:

$$R(D_1,S\Theta,(\Sigma,V))\le R(D_2,S\Theta,(\Sigma,V))\tag{1.2}$$

---

*国家自然科学基金资助项目.
本文1994年3月10日收到, 1995年4月12日收到第三次修改稿.

对一切的 $(\Theta,(\Sigma,V))$ 成立, 且存在 $(\Theta_0,(\Sigma_0,V_0))$ 使得:

$$R(D_1,S\Theta_0,(\Sigma_0,V_0))-R(D_2,S\Theta_0,(\Sigma_0,V_0))\neq 0.$$

显然 G-优准则比 A-优准则能更加全面地刻划估计的优良性.

相应上述的优良性准则, 当 $X=I_p$, V是已知的, $D_2(Y)=Y$ 时, T. Honda ([1]) 称任何满足 (1.2) 式的估计 $D_1(Y)$ 是 Θ 的 Minimax 估计, 且证明了 Gelsen 类型的估计是 Minimax 估计. 谢民育 ([2]) 称 $D(Y)$ 是可容许估计. 若不存在任何估计 G-优或 A-优于 $D(Y)$, 分别记为 $D(Y)\underset{G}{\sim}S\Theta$, $D(Y)\underset{A}{\sim}S\Theta$, 根据Cohen ([3]) 的结果, 文 [2] 假定 $X=I_p,\Sigma=I$, $V=I_m$, 得到了对于任一已知矩阵 L, LY 是 Θ 的可容许估计的充要条件. 本文在比文 [2] 更一般的条件下, 讨论 Θ 和 $S\Theta$ 的可容许估计. 文 [2—6] 中的一些结果可以推出在模型 (1.1) 下, $D(Y)\underset{A}{\sim}S\Theta$, 同时若 $D(Y)\underset{A}{\sim}S\Theta$, 则 $D(Y)\underset{G}{\sim}S\Theta$. 反之, 不成立. 本文将主要讨论 G-可容许性, 得到了 LY 是 $S\Theta$ 的 G-可容许的充分条件, 必要条件或充要条件.

§2. 主要结果及证明

引理 2.1 在模型(1.1) 下, 设 $C_{k\times q},Q_{q\times q},F_{m\times m}$ 是已知矩阵, 且 Q 和 F 是非奇异矩阵.

(1) 若 $D(Y)\underset{G}{\sim}S\Theta$, 则 $CD(Y)F\underset{G}{\sim}CS\Theta F$;

(2) 若 $D(Y)\underset{A}{\sim}S\Theta$, 则等价于 $QD(Y)F\underset{G}{\sim}QS\Theta F$.

引理 2.2 在模型 (1.1) 下, 设 V,L 和 H 是已知矩阵, 则

$$LY+H\underset{G}{\sim}S\Theta\Longleftrightarrow LY\underset{G}{\sim}S\Theta\qquad 和\qquad H=P_{(LX-S)}H,$$

其中 "$\Longleftrightarrow$" 表示等价, $P_Z=Z(Z'Z)^-Z'$.

证明 *必要性* 若 $LY+H\underset{G}{\sim}S\Theta$, 则 $LY+H$ 在线性估计类中也是 $S\Theta$ 的 G-可容许估计, 仿文 [6] 中的定理 2 可知 $H=P_{(LX-S)}H$, 现设 LY 不是 $S\Theta$ 的 G-可容许估计, 则存在 $D(Y)$ 使得

$$R(D,S\Theta,\Sigma)\leq R(L,S\Theta,\Sigma)\tag{2.1}$$

对一切的 (Θ,Σ) 都成立, 且存在 (Θ_0,Σ_0) 使得

$$R(D,S\Theta_0,\Sigma_0)-R(L,S\Theta_0,\Sigma_0)\neq 0.$$

注意到 $H=P_{(LX-S)}H$, 有

$$R(D(\cdot+XH_0),S\Theta,\Sigma)=R(D(\cdot+XH_0)-SH_0,S(\Theta-H_0),\Sigma),\tag{2.2}$$

$$R(L(\cdot+XH_0),S\Theta,\Sigma)=R(L,H,S(\Theta-H_0),\Sigma),\tag{2.3}$$

其中 H_0 满足 $P_{(LX-S)}H=(LX-S)H_0$, $R(D(\cdot+XH_0),S\Theta,\Sigma)$ 是表示 $D(Y+XH_0)$ 的风险矩阵.

由 (2.1), (2.2) 和 (2.3) 知:

$$R(D(\cdot+XH_0)-SH_0,S\Theta,\Sigma)\leq R(L,H,S\Theta,\Sigma)$$

对一切的 (Θ,Σ) 成立, 且在 (Θ_0-H_0,Σ_0) 处有:

$$R(D(\cdot+XH_0)-SH_0,S\Theta,\Sigma)-R(L,S\Theta,\Sigma)\neq 0$$

成立. 这与 $LY+H \underset{G}{\sim} S\Theta$ 矛盾, 故 $LY \underset{G}{\sim} S\Theta$.

充分性 若存在 $D(Y)$ G—优于 $LY+H$, 则有 $D(Y-XH_0)+SH_0$ G—优于 LY, 这与 $LY \underset{G}{\sim} S\Theta$ 矛盾. 引理证毕.

注 在模型(1.1) 中, 当 Σ 和 V 都是已知时, 引理 2.2 也成立.

引理 2.3 设 $Y_{n\times m} \sim N(\Theta, I_n \otimes I_m)$, L 是已知矩阵, 则 $LY \underset{G}{\sim} \Theta$ 等价于: L 对称, $\lambda_i(L) \in [0,1]$ 且 $\lambda_3(L) < 1$ $(n \geq 3)$, 其中 $\lambda_i(L)$ 是矩阵 L 的第 i 大特征根.

证明见文 [2] 中定理 2.1 .

引理 2.4 若 L 和 S 为同阶矩阵, 则 $LL' \leq LS \Longleftrightarrow LL'$ 存在对称矩阵 M、M 的特征根在 $[0,1]$ 中, $\mathrm{rank}(L)=\mathrm{rank}(M)$ 且使得 $L=SM$.

引理 2.5 若 L 和 S 为同阶矩阵, 且 $\mathrm{rank}(L)=r>2$, 则 $LS' \geq LL'$ 且 $\mathrm{rank}(LS'-LL') \geq r-2 \Longleftrightarrow$ 存在对称矩阵 M, M 的特征根在 $[0,1]$ 中, 且等于 1 的特征根至多两个, $\mathrm{rank}(M)=r$, 使得 $L=SM$.

定理 2.1 设 $Y_{n\times m} \sim N(\Theta, \Sigma \otimes V)$, 其中 $\Sigma>0, V>0$ 都是已知的, $\mathrm{rank}(L)=l$. 则:

1° $LY \underset{G}{\sim} \Theta \Longleftrightarrow L\Sigma$ 对称, $\lambda_i(L) \in [0,1]$ 且 $\lambda_3(L)<1$ $(n\geq 3)$;

2° 当 $l \leq 2$ 时, $LY \underset{G}{\sim} S\Theta \Longleftrightarrow L\Sigma L' \leq L\Sigma S'$;

3° 当 $l \geq 3$ 时,

(a) 若 $L\Sigma L' \leq L\Sigma S'$, $\mathrm{rank}(L\Sigma S'-L\Sigma L') \geq l-2$, 则 $LY \underset{G}{\sim} S\Theta$;

(b) 若 $\mathcal{M}(L') \subset \mathcal{M}(S')$, $LY \underset{G}{\sim} S\Theta$, 则

$$L\Sigma L' \leq L\Sigma S', \qquad \mathrm{rank}(L\Sigma S'-L\Sigma L') \geq l-2,$$

其中 $\mathcal{M}(F)$ 记矩阵 F 的列向量所生成的线性空间.

证明 1° 由引理 2.1 和引理 2.3 即知.

2° 充分性由引理 2.4, 引理 2.3 和引理 2.1 即知, 必要性注意到 LY 在线性估计类中也是 $S\Theta$ 的可容许估计, 仿文 [6] 中的定理 1 即可证明.

3° 由引理 2.5 和引理 2.1 即知 (a) 成立. 下证 (b) 由 $LY \underset{G}{\sim} S\Theta$ 知, $L\Sigma L' \leq L\Sigma S'$, 现设 $\mathrm{rank}(L\Sigma S'-L\Sigma L') < l-2$, 则由引理 2.4 和引理 2.5 知存在 $M \geq 0, \lambda_i(M) \in [0,1]$ 且等于 1 的特征根至少有三个, $\mathrm{rank}(L\Sigma^{1/2})=\mathrm{rank}(M)=l$, $L\Sigma^{1/2}=S\Sigma^{1/2}M$, 下证 LY 不是 $S\Theta$ 的 G—可容许估计. 仿文 [5] 中定理 3.2 的变换得:

$$LY \underset{G}{\sim} S\Theta \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} I_q & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} W \underset{G}{\sim} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B, \tag{2.4}$$

其中 $W_{n\times m} \sim \mathcal{N}(B, I_n \otimes V)$, $B \in R^{n\times m}$. 由引理 2.1 中 (2) 有 (2.4) 等价于

$$\begin{pmatrix} I_q & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} WV^{-1/2} \underset{G}{\sim} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} BV^{-1/2}.$$

令 $Z=WV^{-1/2}, \Omega=BV^{-1/2}$, 则

$$Z_{n\times m} \sim \mathcal{N}(\Omega, I_n \otimes I_m).$$

记 Z 和 Ω 的第 i 个列向量为 Z_i 和 Ω_i, 将 Z_i 分成两段, 记为 $Z_i=(Z_i^{(1)\prime},Z_i^{(2)\prime})'$, 其中 $Z_i^{(1)}=(Z_{1i},Z_{2i},\cdots,Z_{qi})'$ $3\le q\le n$, 同样地有 $\Omega_i=(\Omega_i^{(1)\prime},\Omega_i^{(2)\prime})'$, 作随机向量函数

$$K_i(Z_i^{(1)})=\left[1-\frac{m^{-1}(q-2)}{\|Z_i^{(1)}\|^2}\right]Z_i^{(1)},$$

且 $K(Z^{(1)})=(K_1(Z_1^{(1)}),K_2(Z_2^{(1)}),\cdots,K_m(Z_m^{(1)})),\Omega^{(1)}=(\Omega_1^{(1)},\Omega_2^{(1)},\cdots,\Omega_m^{(1)})$, 从文 [2] 中的定理 2.1 的证明知

$$\mathrm{E}(K(Z^{(1)})-\Omega^{(1)})'(K(Z^{(1)})-\Omega^{(1)})\le \mathrm{E}(Z^{(1)}-\Omega^{(1)})'(Z^{(1)}-\Omega^{(1)}) \tag{2.5}$$

对一切的 $\Omega^{(1)}$ 成立. 且在 $\Omega^{(1)}=0$ 处成立严格不等号.

由 (2.5) 易知, 作为 $\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Omega$ 的估计,

$$\begin{pmatrix} K(Z^{(1)})\\ \begin{pmatrix} 0 & D_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Z\end{pmatrix} \text{ 一致地 } G\text{-优于 } \begin{pmatrix} I_q & 0 & 0\\ 0 & D_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Z,$$

由上述的推导知 LY 不是 $S\Theta$ 的可容许估计.

系 2.1 在定理 2.1 的假定下,

1° $LY+H\underset{G}{\sim}\Theta\Longleftrightarrow L\Sigma$ 对称, $\lambda_i(L)\in[0,1]$ 且 $\lambda_3(L)<1$ $(n\ge 3)$, 且 $H=P_{(L-I)}H$;

2° 当 $l\le 2$ 时, $LY+H\underset{G}{\sim}S\Theta\Longleftrightarrow L\Sigma L'\le L\Sigma S'$ 且 $H=P_{(L-S)}H$;

3° 当 $l\ge 3$ 时,

(a) 若 $L\Sigma L'\le L\Sigma S',\operatorname{rank}(L\Sigma S'-L\Sigma L')\ge l-2$, 且 $H=P_{(L-S)}H$; 则 $LY+H\underset{G}{\sim}S\Theta$;

(b) 若 $\mathcal{M}(L')\subset\mathcal{M}(S'),LY+H\underset{G}{\sim}S\Theta$, 则

$$L\Sigma L'\le L\Sigma S',\qquad \operatorname{rank}(L\Sigma S'-L\Sigma L')\ge l-2\qquad \text{且}\qquad H=P_{(L-S)}H.$$

定理 2.2 设 $Y_{n\times m}\sim N(X\Theta,\Sigma\otimes V)$, $\Sigma>0$和 $V>0$ 都是已知的, $S\Theta$ 线性可估, $\operatorname{rank}(LX)=l,\operatorname{rank}(X)=r$, 则有

(I) 当 $l\le 2$ 时, 则

$$LY\underset{G}{\sim}S\Theta\Longleftrightarrow\begin{cases}\text{(a)}: & L=LX(X'\Sigma^{-1}X)^-X'\Sigma^{-1}\\ \text{(b)}: & L\Sigma L'\le LX(X'\Sigma^{-1}X)^+S'\end{cases};$$

(II) 当 $l\ge 3$ 时,

(i) 若 (a), (b) 和 (c): $\operatorname{rank}(LX(X'\Sigma^{-1}X)^+S'-L\Sigma L')\ge l-2$ 成立, 则 $LY\underset{G}{\sim}S\Theta$;

(ii) 若 $\mathcal{M}(X'L')\subset\mathcal{M}(S')$ 且 $LY\underset{G}{\sim}S\Theta$, 则 (a), (b) 和 (c) 同时成立.

证明 (I) 由 $LY\underset{G}{\sim}S\Theta$ 知 LY 在线性估计类中是 $S\Theta$ 的可容许性估计. 类似文 [6] 中定理 1 的证明知必要性成立.

充分性 记 $\widehat{\Theta}=(X(X'\Sigma^{-1}X)^-X'\Sigma^{-1}Y$, 显然 $X\widehat{\Theta}$ 是一个充分统计量, 且 $LY=LX\widehat{\Theta}$ 注意到 $LX\widehat{\Theta}$ 的风险矩阵 $\mathrm{E}(LX\widehat{\Theta}-S\Theta)'(LX\widehat{\Theta}-S\Theta)$ 中的每一个元素都存在且有限, 从而要证 $LX\widehat{\Theta}$ 可容许, 只须证明任一矩阵风险函数的每一个元素处处有限的估计 $\delta(Y)$ 不能 G—优于 $LX\widehat{\Theta}$, 记 $\delta_0(X\widehat{\Theta})=\mathrm{E}(\delta(Y)\mid X\widehat{\Theta})$, 对于任一 $\eta\in R^m$, 我们有 $\eta'L(D(Y),S\Theta)\eta$ 是关于向

量 $(D_1(Y)', D_2(Y)', \cdots, D_m(Y)')'$ 的凸函数, 其中 $D_i(Y)$ 是矩阵估计量 $D(Y)$ 的第 i 个列向量, 由 Jensen 不等式有:

$$\mathrm{E}\eta'(\delta(Y)-S\Theta)'(\delta(Y)-S\Theta)\eta \geq \mathrm{E}\eta'(\delta_0(X\widehat{\Theta})-S\Theta)'(\delta_0(X\widehat{\Theta})-S\Theta)\eta$$

对一切的 Θ 都成立. 又由 η 的任意性知:

$$\mathrm{E}(\delta(Y)-S\Theta)'(\delta(Y)-S\Theta) \geq \mathrm{E}(\delta_0(X\widehat{\Theta})-S\Theta)'(\delta_0(X\widehat{\Theta})-S\Theta).$$

因此, 只需证明基于 $X\widehat{\Theta}$ 的估计不能 G—优于 $LX\widehat{\Theta}$ 即可. 取正交矩阵 $P=(P_1,P_2)$, 其中 $\mathcal{M}(P_1)=\mathcal{M}(X)$ 且 P_1P_1' 为 $\mathcal{M}(X)$ 的正投影阵. 令 $Z=P_1'X\widehat{\Theta}$, 得

$$Z \sim \mathcal{N}(B, Q\otimes V),$$

其中 $B=P_1'X\Theta$, $Q=P_1'X(X'\Sigma X)^- X'P_1$.

由 $\mathrm{rank}(X)=r$, 易知 $\mathrm{rank}(Q)=r$, 从而 $Q>0$, 当 $\Theta\in R^{p\times m}$ 时, $B\in R^{r\times m}$, 由 $X\widehat{\Theta}=P_1Z$ 知, 基于 $X\widehat{\Theta}$ 的估计即为 Z 的估计, 且由 $S\Theta$ 可估知, 存在 F 使得 $S=FX$, 且 $S\Theta=FX\Theta=FP_1B$, 因此

$$LX\widehat{\Theta} \underset{G}{\sim} S\Theta \Longleftrightarrow LP_1Z \underset{G}{\sim} FP_1B$$

由 $rk(LP_1)=\mathrm{rank}(LX)=l\leq 2$, $LP_1QP_1'L'=L\Sigma L'$, $LP_1QP_1'F'=LX(X'\Sigma^{-1}X)^+S'$, 由定理 2.1 的 2° 知 (I) 的充分条件成立.

类似 (I) 的推导, 由定理 2.1 的 3° 知 (II) 成立.

注 当 $Y_{n\times m}\sim N(X\Theta,\sigma^2\Sigma\otimes V)$, 其中 $X,\Sigma>0$和 $V>0$ 都是已知, $S\Theta$ 和 $\sigma^2>0$ 未知, 则定理 2.2 中的 (I) 成立. (II) 中的 (i) 成立.

定理2.3 $Y_{n\times m}\sim N(X\Theta,\sigma^2\Sigma\otimes I_m)$, $\mathrm{rank}(X)=p$, $\widehat{\Theta}=T^{-1}X'\Sigma^{-1}Y$, 其中 $T=X'\Sigma^{-1}X$, $X,\Sigma>0$ 和 $V>0$ 都是已知的, Θ 和 $\sigma^2>0$ 未知参数.

(i) 若 $p\leq 2$, 则 $\widehat{\Theta}\underset{G}{\sim}\Theta$;

(ii) 若 $p\geq 3$, 则 $\widehat{\Theta}$ 不是 Θ 的 G—可容许估计.

证明 (i) 依定理 2.2 中的注即知. 下证 (ii). 记 $S_i^2=(Y_i-X\widehat{\Theta}_i)'\Sigma^{-1}(Y_i-X\widehat{\Theta}_i)$, 其中 Y_i 和 Θ_i 是 Y 和 Θ 的第 i 个列向量, 且 $\widehat{\Theta}_i=T^{-1}X'\Sigma^{-1}Y_i$, 注意 $\dfrac{S_i^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-p}$, S_i^2 与 $\widehat{\Theta}_i$ 独立, 且 $\widehat{\Theta}_i\sim\mathcal{N}(\Theta_i,\sigma^2T^{-1})$, 取 Θ_i 的估计为

$$\widetilde{\Theta}=\left[I-\frac{S_i^2}{n(n-p+2)(\widehat{\Theta}_i'T^2\widehat{\Theta}_i)}T\right]\widehat{\Theta}_i.$$

下证 $\widetilde{\Theta}=(\widetilde{\Theta}_1,\widetilde{\Theta}_2,\cdots,\widetilde{\Theta}_m)$ 一致地 G-优于 $\widehat{\Theta}$. 由

$$\|\widehat{\Theta}_i-\Theta_i\|^2-\|\widetilde{\Theta}_i-\Theta_i\|^2=\frac{S_i^2}{n(n-p+2)(\widehat{\Theta}_i'T^2\widehat{\Theta}_i)}\left[2(\widehat{\Theta}_i-\Theta_i)T\Theta_i-\frac{S_i^2}{n(n-p+2)}\right],$$

注意到 S_i^2 的密度函数为

$$\sigma^{-2}2^{-(n-p)/2}\left[\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)\right]^{-1}\left(\frac{v}{\sigma^2}\right)^{(n-p-2)/2}\exp\left\{-\frac{v}{2\sigma^2}\right\}.$$

令 $Z_i=\widehat{\Theta}_i$, 于是有

$$\mathrm{E}\|\widehat{\Theta}_i-\Theta_i\|^2-\mathrm{E}\|\widetilde{\Theta}_i-\Theta_i\|^2$$

$$= \frac{\sqrt{|T|}}{n(n-p+2)\sigma^{p+2}(2\pi)^{p/2}2^{(n-p)/2}\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)} \int_{R^p} \mathrm{d}Z_i \int_0^{\infty} \frac{v\left(\frac{v}{\sigma^2}\right)^{(n-p+2)/2}}{Z_i'T^2Z_i}$$

$$\left(2(Z_i-\widehat{\Theta}_i)'TZ_i - \frac{v}{n(n-p+2)}\right)\exp\left\{\frac{v+(Z_i-\Theta_i)'T(Z_i-\Theta_i)}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}v.$$

作变量代换:

$$Q=(Q_1,Q_2,\cdots,Q_m)=T^{1/2}\left(\frac{Z_1}{\sigma},\frac{Z_2}{\sigma},\cdots,\frac{Z_m}{\sigma}\right),$$
$$u=\frac{v}{\sigma^2}.$$

令 $B_i=T^{1/2}\Theta_i/\sigma$, 注意到 $Q_i\sim\mathcal{N}(B_i,I_p)$, 并对 u 求积分得到

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\|\widehat{\Theta}_i-\Theta_i\|^2-\mathsf{E}\|\widetilde{\Theta}_i-\Theta_i\|^2\\
&=\frac{\sigma^2(n-p)}{(2\pi)^{p/2}n(n-p+2)}\int_{R^p}\frac{1}{Q_i'TQ_i}\left[2(Q_i-B_i)'Q_i-\frac{1}{n}\right]\exp\left\{-\frac{\|Q_i-B_i\|^2}{2}\right\}\mathrm{d}Q_i\\
&=\frac{\sigma^2(n-p)}{(2\pi)^{p/2}n(n-p+2)}\int_{R^p}\left(2(p-2)-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{Q_i'TQ_i}\exp\left\{-\frac{\|Q_i-B_i\|^2}{2}\right\}\mathrm{d}Q_i\\
&=\frac{\sigma^2(n-p)}{n(n-p+2)}\left(2(p-2)-\frac{1}{n}\right)\mathsf{E}\left[\frac{1}{Q_i'TQ_i}\right].
\end{aligned}\tag{2.6}$$

注意到 Y_i 与 Y_j $(i\neq j)$ 是相互独立的, 从而 $\widehat{\Theta}_i$ 与 $\widehat{\Theta}_j$ 是相互独立的, 于是有

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(\widehat{\Theta}_i-\Theta_i)'(\widehat{\Theta}_j-\Theta_j)-\mathsf{E}(\widetilde{\Theta}_i-\Theta_i)'(\widetilde{\Theta}_j-\Theta_j)\\
&=\mathsf{E}\left[\frac{S_j^2}{n(n-p+2)(\widehat{\Theta}_j'T^2\widehat{\Theta}_j)}(\widehat{\Theta}_i-\Theta_i)'T\widehat{\Theta}_j\right]+\mathsf{E}\left[\frac{S_i^2}{n(n-p+2)(\widehat{\Theta}_i'T\widehat{\Theta}_i)}(T\widehat{\Theta}_i)'(\widehat{\Theta}_j-\Theta_j)\right]\\
&\quad-\mathsf{E}\left(\frac{S_i^2}{n(n-p+2)(\widehat{\Theta}_i'T^2\widehat{\Theta}_i)}T\widehat{\Theta}_i\right)'\left(\frac{S_j^2}{n(n-p+2)(\widehat{\Theta}_j'T^2\widehat{\Theta}_j)}T\widehat{\Theta}_j\right)\\
&=-\frac{\sigma^2(n-p)^2}{n^2(n-p+2)^2}\mathsf{E}\left(\frac{1}{Q_i'TQ_i}T^{1/2}Q_i\right)'\left(\frac{1}{Q_j'TQ_j}T^{1/2}Q_j\right).
\end{aligned}\tag{2.7}$$

结合 (2.6) 和 (2.7) 知

$$\begin{aligned}
&R(\widehat{\Theta},\Theta,\sigma^2)-R(\widetilde{\Theta},\Theta,\sigma^2)\\
&=\frac{\sigma^2(n-p)}{n(n-p+2)}\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1m}b_{1m}\\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2m}b_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mm}b_{mm}\end{pmatrix}=\frac{\sigma^2(n-p)}{n(n-p+2)}(a_{ij})\odot(b_{ij}),
\end{aligned}$$

其中 $A\odot B$ 表示矩阵 A 与 B 的 Hadamard 乘积, 且

$$a_{ij}=\mathsf{E}\left[(Q_i'TQ_i)^{-1}T^{1/2}Q_i\right]'\left[(Q_j'TQ_j)^{-1}T^{1/2}Q_j\right],\qquad b_{ij}=\begin{cases}2(p-2)-\dfrac{1}{n}, & \text{当 } i=j,\\ -\dfrac{n-p}{n(n-p+2)}, & \text{当 } i\neq j.\end{cases}$$

由 (a_{ij}) 的每个元素的结构知 $(a_{ij})\geq 0$, 同样的 $(b_{ij})\geq 0$. 从而 $(a_{ij})\odot(b_{ij})\geq 0$, 又当 $\Theta=0,\sigma^2=1$ 时, $\mathsf{E}\widehat{\Theta}=0$, $\mathsf{E}(Q_i'TQ_i)^{-1}>0$. 从而

$$R(\widehat{\Theta},0,1)-R(\widetilde{\Theta},0,1)$$

$$= \frac{(n-p)\left(2(p-2)-\frac{1}{n}\right)}{n(n-p+2)} \mathrm{diag}\{\mathsf{E}(Q_1' T Q_1)^{-1}, \mathsf{E}(Q_2' T Q_2)^{-1}, \cdots, \mathsf{E}(Q_m' T Q_m)^{-1}\} > 0,$$

也即当 $\Theta_0 = 0, \sigma_0^2 = 1$ 时,

$$R(\widehat{\Theta}, \Theta_0, \sigma_0^2) - R(\widetilde{\Theta}, \Theta_0, \sigma_0^2) \neq 0.$$

故 $\widetilde{\Theta}$ 一致地 G-优于 $\widehat{\Theta}$, 所以 $\widehat{\Theta}$ 不是 G-可容许估计.

参 考 文 献

[1] Honda, T., Minimax estimators in the MANOVA model for arbitrary quadratic loss and unknown covariance matrix. J. Multivariate Anal. **36**(1991), 113–120.
[2] Xie, M., All admissible linear estimates of the mean matrix. J. Multivariate Anal. **44**(1993), 220–226.
[3] Cohen, A., All admissible linear estimates of the mean vector. Ann. Math. Statist. **37**(1966), 458–463.
[4] 吴启光, 可容许线性估计的一个注记. 应用数学学报. 5(1982), 19–24.
[5] 吴启光, 随机回归系数和参数的线性估计的可容许性的几个结果 . 应用数学学报 **11**(1988), 95–106.
[6] Xie, M., Admissibility for linear estimates on multivariate regression coefficient. Chinese Science Bulletin **35**(1990), 881–883.

Admissible Estimate of Mean Matrix

CHEN QINGPING

(*Yun Yang Normal Academy, Danjiangkou*)

In this paper, we discuss the admissible estimation of mean matrix parameter Θ in $\mathcal{N}(X\Theta, \Sigma\otimes V)$. It is given the sufficient conditions, the necessary conditions, or the sufficient and necessary conditions for a linear estimator to be admissible and generalizes the known conclusion.