应用概率统计　第二十一卷
第三期　2005 年 8 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 21 No. 3 Aug. 2005

协方差矩阵奇异情况下的最优投资组合 *

苏咪咪　　叶中行
(上海交通大学数学系和现代金融研究中心，上海，200030)

摘　要

本文讨论了在方差 - 协方差矩阵半正定条件下，Markowitz 均值 - 方差最优投资组合模型的求解问题，利用主成分分析法得到了解析解，从而弥补了原模型的一个缺陷．

关 键 词：Markowitz 均值 - 方差模型，主成分分析，两基金定理．

学科分类号：O211.

§1. 引　　言

证券投资是一种买卖或持有一定数量的有价证券 (金融资产)，借以获得利益的行为，它是市场经济条件中个人或机构投资的主要形式．现代投资理论的核心是投资组合理论，它的奠基者美国经济学家马柯维茨 (Harry M. Markowitz)1952 年发表的具有历史意义的论文《Portfolio Selection》和 1959 年出版的同名专著提出了均值 - 方差模型，研究在一定风险水平上取得最大的预期收益，或在一定收益水平上使风险达到最小的投资组合选择问题．[1-5] 等进一步发展了该理论，在一系列假设及资产收益的协方差矩阵满秩条件下得到了解析解，并证明了著名的两基金定理．但当协方差矩阵为奇异时，该求解方法不再适用．很少见到这方面的文章，只是在文献 [6] 中 Buser 试图技术性地构造两个新的基金使得两基金定理仍成立．但是 Buser 的推导过程存在错误．本文讨论了协方差矩阵半正定的情形，利用主成分分析法给出了均值 - 方差模型的求解方法，并得到了解析解及两基金定理．从而弥补了 Markowitz 均值 - 方差模型的一个缺陷．第二节简要回顾了 Markowitz 的原模型的求解方法，第三节讨论当协方差矩阵为奇异时的求解方法，并给出了解析解．最后是结论及进一步可能的推广．

§2. 经典 Markowitz 均值 - 方差模型

首先介绍一些定义和基本概念：

设市场有 n 种风险资产，$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$ 为他们的收益率向量，其中 X_j 为第 j 种资产之收益率；$\mathsf{E}X=(\mathsf{E}X_1,\mathsf{E}X_2,\cdots,\mathsf{E}X_n)':=\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)'$ 为他们的期望收益率向量；$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)'$ 为投资组合向量，其中 w_j 为投资于第 j 种资产的比例，$\sum\limits_{i=1}^n w_i=w'1=1$；$S=w'X=\sum\limits_{i=1}^n w_iX_i$ 为投资组合的总收益；$\mathsf{Var}(S)=w'\Sigma w:=\sigma^2(S)$ 为投资组合总收益的方差，

* 基金项目：国家自然科学基金 (10171066)；上海市科委重点项目 (02DJ14063).

本文 2004 年 6 月 15 日收到.

在这里将方差视为风险的度量．则在允许卖空 (即不要求 $w_j \geq 0$) 的情况下， Markowitz 模型为：

$$\text{Minimize}\frac{1}{2}\mathsf{Var}\,(S) = \frac{1}{2}w'\Sigma w := \frac{1}{2}\sigma^2(S) \qquad \text{s.t.} \qquad \mathsf{E}(S) = w'\mu \geq r_p,\ \sum_{i=1}^{n} w_i = w'I = 1,$$

其中 Σ 为收益向量 X 的协方差矩阵， $I = (1, 1, \cdots, 1)'$.

先简要回顾一下方差 - 协方差矩阵正定条件下的解析解．

(1) 当 Σ 非奇异即正定时，用 Lagrange 乘子法，可得其最优解为 (这里省略了推导过程)：

$$w^* = \delta_1\Sigma^{-1}\mu + \delta_2\Sigma^{-1}I,$$

其中 δ_1, δ_2 为 Lagrange 乘数因子．

令 $\lambda_1 = \delta_1 I'\Sigma^{-1}\mu$ 和 $\lambda_2 = \delta_2 I'\Sigma^{-1}I$, 则有

$$w^* = \lambda_1\frac{\Sigma^{-1}\mu}{I'\Sigma^{-1}\mu} + \lambda_2\frac{\Sigma^{-1}I}{I'\Sigma^{-1}I} := \lambda_1 w_1^* + \lambda_2 w_2^*.$$

其中 $w_1^* = \Sigma^{-1}\mu/(I'\Sigma^{-1}\mu)$, $w_2^* = \Sigma^{-1}I/(I'\Sigma^{-1}I)$ 的分量和均为 1, 故可以看作两个基金，故称上式为两基金分离定理．

(2) 最优解对应的风险为：

$$\sigma^2(S^*) = w^{*\prime}\Sigma w^* = \frac{c}{ac - b^2}\Big(r_p - \frac{b}{c}\Big)^2 + \frac{1}{c},$$

其中 $a = \mu'\Sigma^{-1}\mu$, $b = \mu'\Sigma^{-1}I$, $c = I'\Sigma^{-1}I$. 当 $ac - b^2 > 0$ 时，在 (r_p, σ^2)- 平面上这是一条抛物线，它的上半部分称为投资有效前沿．

但是当 Σ 为奇异时，逆矩阵 Σ^{-1} 不存在，在运用 Lagrange 乘子法求解时不能做逆运算，因此上述方法不再适用，以下给出了 Σ 半正定条件下模型的求解方法．

§3. 协方差矩阵半正定时的均值 - 方差分析

当协方差矩阵 Σ 奇异即半正定时，设它的秩 $r < n$, 这时存在一正交矩阵 U (见 [9, 10]), 使得 $U'\Sigma U$ 是一个对角矩阵 G, 其中 $G = \mathrm{diag}(g_1, g_2, \cdots, g_r, 0, \cdots, 0)$, g_i $(i = 1, \cdots, r)$ 是 Σ 的非零特征值，矩阵 U 的第 i 列就是 Σ 的特征值 g_i 对应的特征向量．

为简单起见，不妨假设 $r = n-1$, 即 Σ 的零特征值只有一个，此时 $G = \mathrm{diag}(g_1, g_2, \cdots, g_{n-1}, 0)$.

作变换 $w = Uv$, 则问题变成：

$$\begin{aligned}&\text{Minimize}\frac{1}{2}\mathsf{Var}\,(S) = \frac{1}{2}w'\Sigma w = \frac{1}{2}v'U'\Sigma Uv = \frac{1}{2}v'Gv = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 g_i \\ \text{s.t.}\qquad &\mathsf{E}(S) = w'\mu = v'U'\mu \geq r_p,\ \sum_{i=1}^{n} w_i = v'U'I = 1.\end{aligned}$$

这相当于引入了 n 个新的基金，其中前 $n-1$ 个基金是风险基金，对应的投资权重 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$; 第 n 个基金是无风险基金，其对应的投资权重为 v_n.

下面我们先解出 v 的解析解，利用 Lagrange 乘子法，设

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}v_i^2g_i-\delta_1(v'U'\mu-r_p)-\delta_2(v'U'I-1).$$

记 $U=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, 其中 u_i 为矩阵 U 的第 i 列向量， $i=1,2,\cdots,n$. 令 $\partial L/\partial v_i=g_iv_i-\delta_1u_i'\mu-\delta_2u_i'I=0$, $i=1,2,\cdots,n-1$,

$$v_i=\delta_1g_i^{-1}u_i'\mu+\delta_2g_i^{-1}u_i'I:=\delta_1g_i^{-1}a_i+\delta_2g_i^{-1}b_i,\qquad i=1,2,\cdots,n-1. \tag{1}$$

然后令 $\partial L/\partial v_n=0$, 得

$$\delta_1u_n'\mu+\delta_2u_n'I:=\delta_1a_n+\delta_2b_n. \tag{2}$$

(1)(2) 式中 $a_i=u_i'\mu$, $b_i=u_i'I$, $i=1,2,\cdots,n$.

令 $\partial L/\partial\delta_1=0$ 和 $\partial L/\partial\delta_2=0$ 得:

$$\sum_{i=1}^{n}v_ia_i=r_p, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}v_ib_i=1, \tag{4}$$

将 (1) 代入 (3) 和 (4), 得:

$$v_na_n+\delta_1\sum_{i=1}^{n-1}g_i^{-1}a_i^2+\delta_2\sum_{i=1}^{n-1}g_i^{-1}a_ib_i=r_p, \tag{5}$$

$$v_nb_n+\delta_1\sum_{i=1}^{n-1}g_i^{-1}a_ib_i+\delta_2\sum_{i=1}^{n-1}g_i^{-1}b_i^2=1. \tag{6}$$

记 $A:=\sum\limits_{i=1}^{n-1}g_i^{-1}a_i^2$, $B:=\sum\limits_{i=1}^{n-1}g_i^{-1}a_ib_i$, $C:=\sum\limits_{i=1}^{n-1}g_i^{-1}b_i^2$. 则式 (5) 和式 (6) 可写成:

$$v_na_n+\delta_1A+\delta_2B=r_p, \tag{5$'$}$$

$$v_nb_n+\delta_1B+\delta_2C=1. \tag{6$'$}$$

由 (2) 得:

$$\delta_1=-\delta_2\frac{b_n}{a_n}. \tag{7}$$

$(5')\times b_n-(6')\times a_n$, 得

$$\delta_1(Ab_n-Ba_n)+\delta_2(Bb_n-Ca_n)=r_pb_n-a_n. \tag{8}$$

将 (7) 代入 (8) 得:

$$\delta_2=-\frac{a_n(r_pb_n-a_n)}{Ab_n^2-2Ba_nb_n+Ca_n^2}. \tag{9}$$

再由 (7) 得:

$$\delta_1=\frac{b_n(r_pb_n-a_n)}{Ab_n^2-2Ba_nb_n+Ca_n^2}. \tag{10}$$

设

$$\alpha=\frac{r_pb_n-a_n}{Ab_n^2-2Ba_nb_n+Ca_n^2}, \tag{11}$$

则式 (9) 和式 (10) 可写为：

$$\delta_2=-a_n\alpha, \tag{9'}$$

$$\delta_1=b_n\alpha. \tag{10'}$$

将 (9′) 和 (10′) 代入 (1) 和 (6′), 得：

$$\begin{aligned} v_i^*&=\alpha g_i^{-1}(a_ib_n-b_ia_n), \qquad i=1,2,\cdots,n-1,\\ v_n^*&=\frac{1}{b_n}(1-\alpha b_nB+\alpha a_nC). \end{aligned}$$

根据 $w^*=Uv^*$, 并记

$${}_iu=(u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{i,n-1})' \text{ (即矩阵}U\text{第}i\text{行的前}n-1\text{维向量)} \qquad i=1,2,\cdots,n,$$

$$u^{(n)}=(u_{1n},u_{2n},\cdots,u_{nn})' \text{ (即矩阵}U\text{第}n\text{列}n\text{维向量)},$$

$$H=(a_1b_n-b_1a_n,\cdots,a_{n-1}b_n-b_{n-1}a_n)' \text{ (为}(n-1)\text{维向量)},$$

$$\widetilde{U}=({}_1u',{}_2u',\cdots,{}_nu') \text{ (为}n\times(n-1)\text{维矩阵)},$$

$$\widetilde{G}=\mathrm{diag}(g_1,g_2,\cdots,g_{n-1}) \text{ (为}(n-1)\times(n-1)\text{维对角矩阵)},$$

则

$$w_i=\sum_{j=1}^{n-1}u_{ij}\alpha g_j^{-1}(a_jb_n-b_ja_n)+u_{in}v_n=\alpha({}_iu)'\widetilde{G}^{-1}H+u_{in}v_n.$$

最优组合为

$$w^*=\alpha\widetilde{U}\widetilde{G}^{-1}H+u^{(n)}v_n=\lambda_1\frac{\widetilde{U}\widetilde{G}^{-1}H}{I'\widetilde{l}\ \widetilde{G}^{-1}H}+\lambda_2\frac{u^{(n)}}{I'u^{(n)}}:=\lambda_1w_1^*+\lambda_2w_2^*, \tag{12}$$

其中 $\lambda_1=\alpha 1'\widetilde{l}\ \widetilde{G}^{-1}H$、$\lambda_2=v_nI'u^{(n)}$.

根据 (12) 式我们可以看出，在协方差矩阵半正定条件下最优投资组合可以表示成一个风险基金 w_1^* 和一个无风险基金 w_2^* 的线性组合，即此时两基金定理仍然成立．

再计算最优组合对应的风险：

$$\begin{aligned}\sigma^2(w^*)&=\mathrm{Var}(w^{*\prime}X)=\sum_{i=1}^{n-1}v_i^{*2}g_i=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha^2(g_i^{-2})(a_ib_n-b_ia_n)^2g_i\\ &=\alpha^2(Ab_n^2-2Ba_nb_n+Ca_n^2)=\frac{(r_pb_n-a_n)^2}{Ab_n^2-2Ba_nb_n+Ca_n^2},\end{aligned}$$

即 σ^2 是关于 r_p 的抛物线函数，所以有效前沿曲线在 (r_p,σ^2)- 平面上是抛物型的 (附图 1, 2).

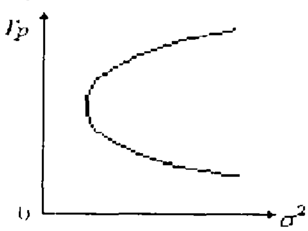

图 1　Σ 正定

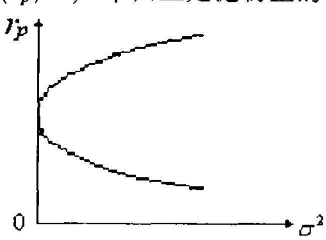

图 2　Σ 半正定

§4. 结 束 语

本文讨论了 Markowitz 均值 - 方差模型在协方差矩阵半正定条件下的最优解，并证明了这种情况下两基金定理仍然成立，这是对 Markowitz 模型的进一步完善．本文之方法还可以进一步推广．首先 Markowitz 均值 - 方差模型中假定收益向量的分布服从多元正态分布，因此均值和协方差完全决定了分布，均值 - 方差分析是合理的，但实际市场上资产收益的分布是有偏、厚尾的，不服从正态分布，仅用一、二阶矩不足以描述收益之分布，因此在优化目标或约束条件中应考虑高阶矩 ([8])．另一方面 Markowitz 均值 - 方差模型是单周期的静态的，应考虑多周期动态模型．在这两种推广中也存在协方差矩阵可能降秩的情形，我们的方法也可应用于这两种推广情形，我们将另文讨论．

我们的方法本质上是主成分分析法，它也适用协方差矩阵满秩的情形，只是计算最优投资组合不需要这么做．但用我们的方法可以得到关于市场的更多的信息，事实上，协方差矩阵的最大特征根对应的特征向量是最大风险组合，而最小特征根对应的特征向量是最小风险组合，如最小特征根为零，对应的特征向量就是无风险组合．

参 考 文 献

[1] Markowitz, H., Portfolio selection, *Journal of Finance*, **7(1)**(1952), 77–91.

[2] Markowitz, H., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*, Wiley, New York, 1952.

[3] Merton, R.C., An analytic derivation of the efficient portfolio frontier, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **7**(1972), 1851–1872.

[4] Fama, E., *Foundation of Finance*, Basic Books, Inc, Publishers, 1976.

[5] Korn, R., *Optimal Portfolio*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore, 1997.

[6] Buser, S.A., Mean-variance portfolio selection with either a singular or nonsingular variance-covariance matrix, *Financial and Economic Research Section Division of Research*, HB-135-B88, 1976.

[7] 叶中行，林建忠，*数理金融 — 资产定价与金融决策理论*，北京，科学出版社， 1998.

[8] Jurczenko, E. and Maillet, B., The three-moment CAPM: Theoretical Foundations and an Asset Pricing Model Comparison in a Unified Framework, *Developments in Forecast Combination and Portfolio Choice*, Eds by C. Dunis etc, John Wiley & Sons, 239–273, 2001.

[9] 程云鹏，*矩阵论*，西北工业大学出版社， 1989.

[10] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组编，*高等代数 (第二版)*，高等教育出版社， 2000.

Optimal Mean-Variance Portfolio with Semi-Positive Variance-Covariance Matrix

SU MIMI YE ZHONGXING

(*Department of Mathematics, Institute for Contemporary Finance, Jiao tong University, Shanghai, 200030*)

An approach based on principal component analysis is proposed for solving the problem of optimal portfolio in the case with semi-positive variance-covariance matrix. Analytic solution is obtained. This result fills up the gap of the original Markowitz's model.