应用概率统计 第九卷
第二期 1993年5月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 9, No. 2, May, 1993

# 随机加权法的强逼近及其应用*

周 勇 邹植民
(湘潭师范学院,湖南,411100)

摘 要

本文研究了由随机加权法产生的经验过程及分位点过程的强逼近.

## §1. 引 言

Efron[1]于1979年提出了Bootstrap方法，在统计的许多领域中已取得很好的应用. 随后郑忠国[2]于1985年推广了Bootstrap方法而提出随机加权法. 在分布逼近中，可以看到随机加权法在很多地方优于Bootstrap法. 在[2]中郑忠国就均值估计误差分布计算与Efron的Bootstrap方法作了比较，指出了它的若干优点. 而[3]也指出，一类具有渐近展开分布独立和的随机加权逼近中，其逼近速度为$o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，而以往的常规正态逼近仅能达$o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. 从而说在这种情况下，随机加权逼近比正态逼近要精密.

[4]中定理2指出$x_1, \cdots, x_n$, iid, $F$非格子点分布且$E|x_1|^3<\infty$时，$\sqrt{n}\,(\bar{x}-\mu)/\sigma$的分布使用随机加权逼近的速度为$o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. 本文作者在[5]中指出，即使$F$是格子点分布，同样条件下，$\sqrt{n}\,(\bar{x}-\mu)/\sigma$的分布用随机加权逼近速度为$O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，且算出"$O$"中的精确常数为$h/2\sqrt{2\pi}\,\sigma$(注: $h$为分布格子窗宽，$\sigma^2=Ex_1^2$)，仅为Bootstrap逼近速度$O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$中大"$O$"指出的常数$h/\sqrt{2\pi}\,\sigma$的一半(见[6]). 总之，随机加权法有着许多优点，值得进一步研究.

然而，在以上及许多场合中，随机加权法的具体应用及论证都是采取分布展开或某一特殊办法进行的. 所以我们想能否把这种方法在各种问题上取得统一的论证，至少能在某一范围内达到目的. 本文试图在经验过程和分位点过程两个方面上达到统一. 即获得这两过程的强逼近. 从而获得许多与经验过程和分位点过程有关的统计量分布的随机加权逼近.

## §2. 定理及其证明

首先我们用随机加权法构造一随机过程，即一种广义经验过程. 然后讨论其强逼近性.

设$V_1, \cdots, V_n$为随机变量，满足$V_1+\cdots+V_n=1$，且$V_1, \cdots, V_n$的联合分布为Dirichlet分布. 构造一随机过程如下

本文1989年12月1日收到，1992年10月22日收到修改稿.
* 本文为湖南省教委第1490201资金资助的课题.

$$H_n(x)=\sum_{i=1}^{n}V_iI(x_i\leqslant x) \tag{2.1}$$

其中 $x_1, \cdots, x_n$ iid, 且与 $V_1, \cdots, V_n$ 独立. $I(\cdot)$是示性函数.

其实构造 $\{V_i\}$ 这个权的一个简单办法是: 若 $z_1, \cdots, z_n$ iid, $z_1\sim(0, 1)$上均匀分布, $z_{(1)}\leqslant z_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant z_{(n-1)}$ 为其次序统计量, 令 $z_{(0)}=0$, $z_{(n)}=1$, 则 $V_i=Z_{(i)}-Z_{(i-1)}$, $i=1, 2, \cdots, n$.

随机加权逼近的目的是利用 $\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))$的统计特性去模拟 $\sqrt{n}(F_n(x)-F(x))$的统计特性, 本文不是直接讨论它的统计特性, 而是讨论随机过程 $\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))$ 的强逼近, 然后使用强逼近的性质同样获得如上的结果. 另外, 给出广义分位点过程

$$Q_n^*(t)=\sqrt{n}(H_n^{-1}(t)-F_n^{-1}(t)) \tag{2.2}$$

这里 $F^{-1}(\cdot)$表示 $F(\cdot)$的逆函数.

本文的主要结果如下:

**定理 1** 设 $F(x)$是 $x_i$ 的分布函数, 其它符号同上, 则对几乎所有样本 $x_1, x_2, \cdots,$ 存在一列 Brownian 桥 $\{B_n(y), 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 及一个 Kiefer 过程 $\{K(y, t), 0\leqslant y\leqslant 1, t\geqslant 0\}$ 使得

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))-B_n(F(x))|=O(l(n)) \quad \text{a.s.} \tag{2.3}$$

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))-n^{-\frac{1}{2}}K(F(x), n)|=O(l(n)) \quad \text{a.s.} \tag{2.4}$$

其中
$$l(n)=n^{-\frac{1}{4}}(\log\log n)^{\frac{1}{4}}(\log n)^{\frac{1}{2}}$$

**定理 2** 设分布函数 $F(x)$二阶可导, 且二阶导数有界, $f=F'>0$, 则存在同定理 1 的两过程对几乎所有样本 $x_1, x_2, \cdots$, 有

$$\sup_{0<t<1}|f(F^{-1}(t))Q_n^*(t)-B_n(t)|=O(l(n)) \quad \text{a.s.} \tag{2.5}$$

$$\sup_{0<t<1}|f(F^{-1}(t))Q_n^*(t)-n^{-\frac{1}{2}}K(t, n)|=O(l(n)) \quad \text{a.s.} \tag{2.6}$$

**定理 3** 设 $F(x)$为 $x_1$ 的分布, 则对几乎所有样本 $x_1, x_2, \cdots$, 有

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))-\sqrt{n}(F_n(x)-F(x))|=O(l(n)) \quad \text{a.s.}$$

**定理 4** 假定 [7] 中定理 4.5.7 条件成立, 如果 $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty}f(x)<\infty$, 则对几乎所有样本 $x_1, x_2, \cdots$, 有

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|Q^*(t)-\sqrt{n}(F_n^{-1}(t)-F^{-1}(t))=O(l(n)) \quad \text{a.s.}$$

**注 1** 以上及后面, 除特别声明, $F_n(x)$均为 $x_1, \cdots, x_n$ 的经验分布函数, $F(x)$为其的分布函数.

**注 2** 这几定理在实际中具有广泛应用. 在后将说到 Kolmogorov-Smirnvor, Kuiper 等统计量上的应用. 定理 3 和 4, 从大样本上讨论了这些统计量的逼近程度, 理论上具有实用意义.

**推论 1**(重对数律) 在定理 1 条件下, 有

$$\limsup_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}(\log\log n)^{-\frac{1}{2}}\sup_{-\infty<x<+\infty}|H_n(x)-F_n(x)|=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{a.s.}$$

在定理 2 条件下, 有

$$\limsup_{n\to\infty}(\log\log n)^{-\frac{1}{2}}\sup_{0<t<1}|Q_n^*(t)|=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{a.s.}$$

对几乎所有样本 $x_1, x_2, \cdots$, 成立.

**推论 2** 在定理 1 条件下，有

(1) $\left|\sup_{-\infty<x<+\infty}\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))g(F(x))-\sup_{0<y<1}B_n(y)g(y)\right|=O(l(n))$ a.s. $P^*$

(2) $\left|\sup_{-\infty<x<+\infty}\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))g(F(x))-\sup_{0<y<1}n^{-\frac{1}{2}}K(y,n)g(y)\right|=O(l(n))$ a.s. $P^*$

(3) $\left|\sup_{-\infty<x<+\infty}\sqrt{n}|H_n(x)-F_n(x)|g(F(x))-\sup_{0<y<1}|B_n(y)|g(y)\right|=O(l(n))$ a.s. $P^*$

(4) $\left|\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))^2dF(x)-\int_0^1 B_n^2(y)\,dy\right|=O(l(n)(\log\log n)^{1/2})$ a.s. $P^*$

(5) $|\sqrt{n}R_n^*-(\sup_{0<y<1}B_n(y)g(y)-\inf_{0<y<1}B_n(y)g(y)|=O(l(n))$ a.s. $P^*$

$R_n^*=|\sup_{-\infty<x<+\infty}(H_n(x)-F_n(x))g(F(x))-\inf_{-\infty<x<+\infty}(H_n(x)-F_n(x))g(F(x))|$

其中
$$g(x)\neq 0,\ x\in[0,1],\ 且\ \sup_{0<y<1}g(y)<\infty.$$

下面给出一些具体应用．由(5)，令 $g(y)=1$，

$$n^{\frac{1}{2}}R_n^*\xrightarrow{w}R\quad \text{a.s.}\quad P^* \tag{2.7}$$

其中 $P^*$ 表示 $x_1,\cdots,x_n$ 给定下的条件分布．$R=\sup_{0<y<1}B(y)-\inf_{0<y<1}B(y)$，且服从如下分布

$$P(R\leqslant\mu)=1-\sum_{j=1}^{\infty}2(4(j\mu)^2-1)e^{-2j^2\mu^2}$$

这个 $R$ 称为 Kuiper 统计量．同样由推论(2)，(3)，令 $g(y)=1$ 得

$$\begin{aligned}&\sup_{-\infty<x<+\infty}\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))\xrightarrow{w}\sup_{0<y<1}B(y)\quad \text{a.s. } P^*\\&\sup_{-\infty<x<+\infty}\sqrt{n}|H_n(x)-F_n(x)|\xrightarrow{w}\sup_{0<y<1}|B(y)|\quad \text{a.s. } P^*\end{aligned}\tag{2.8}$$

其中 $\sup_{0<y<1}B(y)$，$\sup_{0<y<1}|B(y)|$ 称为 Kolmogorov-Smirnov 统计量，它们分布有如下分布

$$P\{\sup_{0<t<1}B(t)\geqslant\mu\}=e^{-2\mu^2}$$

$$P\{\sup_{0<t<1}|B(t)|>\mu\}=\sum_{K\neq 0}(-1)^{K+1}e^{-2K^2\mu^2}$$

这说明由此结果能很容易地把随机加权法使用到这些统计量上去．

另外，由定理 1 及 2，有

$$\begin{aligned}&\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))\xrightarrow{w}B(F(x))\quad \text{a.s. } P^*\\&\sqrt{n}(H_n^{-1}(x)-F_n^{-1}(x))\xrightarrow{w}B(x)/f(F^{-1}(x))\quad \text{a.s } P^*\end{aligned}\tag{2.9}$$

这正是[9]中的定理 1 和 2．

**引理 1** 设 $x_1,\cdots,x_n$ iid，且 $x_1\sim F(x)$，则

$$\sup_{-\infty<t<+\infty}\sqrt{n}\,|(G_n^{-1}(F_n(t))-F_n(t)]-[G_n^{-1}(F(t))-F(t)]=O(l(n))\quad \text{a.s. } P^*$$

其中 $G_n(x)$ 为 $z_1,\cdots,z_n$ 的经验分布，且 $z_i=F(x_i)$，$i=1,2,\cdots,n$．

**证明** $\sup_{-\infty<t<+\infty}|[G_n^{-1}(F_n(t))-F_n(t)]-[G_n^{-1}(F(t))-F(t)]|$

$$\begin{aligned}\leqslant&\sup_{-\infty<t<+\infty}|[G_n(F_n(t))-F_n(t)]-[F_n(t)-G_n^{-1}(F_n(y))]|\\&+\sup_{-\infty<t<+\infty}|[G_n(F(t))-F(t)]-[F(t)-G_n(F(t))]|\end{aligned}$$

$$+\sup_{-\infty<t<+\infty}|[G_n(F_n(t))-F_n(t)]-[G_n(F(t))-F(t)]|$$
$$\triangleq J_1+J_2+J_3 \tag{2.10}$$

由[8]中的定理5.2.1立得

$$J_1=O(n^{-\frac{1}{4}}l(n)) \quad \text{a.s.} \quad P^* \tag{2.11}$$

$$J_2=O(n^{-\frac{1}{4}}l(n)) \quad \text{a.s.} \quad P^* \tag{2.12}$$

下面估计 $J_3$ 的阶. 由[7]的定理4.3.1, 则存一 Kiefer 过程 $\{K(y, t), 0<y<1, t\geqslant 0\}$ 使得

$$\sup_{-\infty<t<+\infty}|\sqrt{n}\,[G_n(F_n(t)-F_n(t)]-n^{-\frac{1}{2}}K(F_n(t), n)|=O(l(n)) \quad \text{a.s.}\ P^*$$

$$\sup_{-\infty<t<+\infty}|\sqrt{n}\,[G_n(F(t))-F(t)]-n^{-\frac{1}{2}}K(F(t), n)|=O(l(n)) \quad \text{a.s.}\ P^*$$

故有

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\,J_3\leqslant &\sup_{-\infty<t<+\infty}|\sqrt{n}\,[G_n(F_n(t))-F_n(t)]-n^{-\frac{1}{2}}K(F_n(t), n)|\\&+\sup_{-\infty<t<+\infty}|\sqrt{n}\,[G_n(F(t))-F(t)]-n^{-\frac{1}{2}}K(F(t), n)|\\&+\sup_{-\infty<t<+\infty}n^{-\frac{1}{2}}|K(F_n(t), n)-K(F(t), n)|\\=&O(l(n))+J_4 \quad \text{a.s.}\ P^*\end{aligned} \tag{2.13}$$

由经验过程的重对数律和 $\sup_{-\infty<t<+\infty}|F_n(t)-F(t)|=a_n$, 这里的 $a_n\leqslant O(1)\left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{1/2}$, 故由[8]中的定理1.15.2得

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\,J_4&\leqslant\sup_{-\infty<t<+\infty}\sup_{0<s<a_n}|K(F(t)+s, n)-K(F(t), n)|\\&=O(l(n)) \quad \text{a.s.}\ P^*\end{aligned}$$

由(2.13)有

$$J_3=O(l(n)) \quad \text{a.s.} \quad P^*$$

由 $J_1$, $J_2$, $J_3$ 的估计阶及(2.10)证得引理1.

设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为[0, 1]上 iid 随机变量服从均匀分布. $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \cdots, \tilde{z}_n$ 是与 $z_1, z_2, \cdots$ 独立的[0, 1]上 iid 的均匀分布随机变量, $G_n(t)$ 及 $\tilde{G}_n(t)$ 分别为它们的经验分布函数. 则(2.2)可改写为

$$Q_n^*(t)=n^{\frac{1}{2}}[F^{-1}(G_n^{-1}(T_n)-F^{-1}(G_n(t))] \tag{2.14}$$

其中
$$T_n=T_n(t)=\frac{n-1}{n}G_{n-1}(t)$$

**引理2** 使用以上记号, 有

(1) $$\sup_{0<t<1}|\tilde{G}_n^{-1}(T_n(t))-T(t)-[\tilde{G}_n^{-1}(t)-t]|=O(l(n)n^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{a.s.} \tag{2.15}$$

(2) $$\sup_{0<t<1}|\tilde{G}_n^{-1}(T_n(t))-\tilde{G}^{-1}(t)|=O(n^{-\frac{1}{2}}(\log\log n)^{1/2}) \quad \text{a.s.} \tag{2.16}$$

注意此处的 a.s. 是在给定 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 意义下成立的.

**证明** 使用引理2类似证法可证(1). 下面仅证(2). 由分位点重对数律有

$$
\begin{aligned}
\sup_{0<t<1}|\tilde{G}_n^{-1}(T_n(t))-\tilde{G}^{-1}(t)| &\leqslant \sup_{0<t<1}|\tilde{G}_n^{-1}(T_n(t))-T_n(t)| \\
&\quad+\sup_{0<t<1}|\tilde{G}_n^{-1}(t)-t|+\sup_{0<t<1}|T_n(t)-t| \\
&\leqslant \sup_{0<t<1}|\tilde{G}_n^{-1}(t)-t|+\sup_{0<t<1}|\tilde{G}_n^{-1}(t)-t|+\sup_{0<t<1}|T_n(t)-t| \\
&= O(n^{-\frac{1}{2}}(\log\log n)^{\frac{1}{2}})+\sup_{0<t<1}|T_n(t)-t| \\
&= O(n^{-\frac{1}{2}}(\log\log n)^{\frac{1}{2}})+\sup_{0<t<1}\left|\frac{n-1}{n}G_{n-1}(t)-t\right| \\
&\leqslant O(n^{-\frac{1}{2}}(\log\log n)^{\frac{1}{2}})+\frac{n-1}{n}\sup_{0<t<1}|G_{n-1}(t)-t|+\sup_{0<t<1}\frac{t}{n} \\
&= O(n^{-\frac{1}{2}}(\log\log n)^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}
$$

其中最后一步使用均匀分布的重对数律.

下面转过来证明定理

定理的证明：从 $H_n(x)$ 的定义，有

$$
H_n(x)=G_{n-1}^{-1}\left(\frac{n}{n-1}F_n(x)\right)I\left(0<F_n(x)\leqslant\frac{n-1}{n}\right)+I\left(\frac{n-1}{n}<F_n(x)\leqslant 1\right)
$$

则

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x)) \\
&=\sqrt{n}\left[G_{n-1}^{-1}\left(\frac{n}{n-1}F_n(x)\right)I\left(0<F_n(x)\leqslant\frac{n-1}{n}\right)\right. \\
&\quad\left.+I\left(\frac{n-1}{n}<F_n(x)\leqslant 1\right)-F_n(x)\right] \\
&=\sqrt{n}[G_{n-1}^{-1}(\tilde{F}_{n-1}(x))-\tilde{F}_{n-1}(x)]+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}
$$

其中 $\tilde{F}_{n-1}(x)=\frac{n}{n-1}F_n(x)I\left(0<F(x)\leqslant\frac{n-1}{n}\right)$，显然 $\tilde{F}_{n-1}$ 与 $F_n$ 有着相同的极限性质，故可把 $\sqrt{n}(G_{n-1}^{-1}(\tilde{F}_{n-1}(x))-\tilde{F}_{n-1}(x))$ 看作为

$$
J_n=\sqrt{n}[G_n^{-1}(F_n(x))-F_n(x)]
$$

此时存在一列 Brownian 桥 $\{B_n(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$ 及一个 Kiefer 过程 $\{K(y,t), 0\leqslant y\leqslant 1,\ t\geqslant 0\}$ 使得

$$
\sup_{-\infty<x<+\infty}|J_n-B_n(F(x))|=O(l(n)) \quad \text{a.s.} \quad P^* \tag{2.17}
$$

$$
\sup_{-\infty<x<+\infty}|J_n-n^{-\frac{1}{2}}K(F(x),n)|=O(l(n)) \quad \text{a.s.} \quad P^* \tag{2.18}
$$

事实上，由引理 1

$$
\begin{aligned}
&\sup_{-\infty<x<+\infty}|J_n-B_n(F(x))| \\
&\leqslant \sup_{-\infty<x<+\infty}\sqrt{n}\,|G_n^{-1}(F_n(x))-F_n(x)-[G_n^{-1}(F(x))-F(x)]| \\
&\quad+\sup_{-\infty<x<+\infty}|\sqrt{n}[G_n^{-1}(F(x))-F(x)]-B_n(F(x))| \\
&=O(l(n))+J_1' \quad \text{a.s.} \quad P^*
\end{aligned}
$$

由[7]中的定理 4.5.7 在均匀分布的特殊情况，得

$$
J_1'=O(l(n))
$$

故证得(2.17)，同理可证(2.18)．定理1证完．

定理2的证明：运用泰勒展开式，由(2.14)得

$$\begin{aligned}Q_n^*(t)&=\sqrt{n}\,[F^{-1}(\tilde{G}_n^{-1}(T_n)-F^{-1}(\tilde{G}_n^{-1}(t))]\\&=\sqrt{n}\,[f(F^{-1}(G_n(t))]^{-1}[\tilde{G}_n^{-1}(T_n)-\tilde{G}^{-1}(t)]+O(b_n(t))\end{aligned}$$

其中 $b_n(t)=\tilde{G}_n^{-1}(T_n)-\tilde{G}_n^{-1}(t)$，由引理2(2)知

$$\sup_{0<t<1} b_n(t)=O\,(n^{-\frac{1}{2}}(\log\log n)^{\frac{1}{2}})\quad \text{a.s.}$$

又由于 $T_n=\dfrac{n-1}{n}G_n(t)$，所以由[7]中的定理4.3.1及4.3.3知存在一列Brownian桥 $\{B_n(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$ 及一Kiefer过程 $\{K(y,\ t),\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ t\geqslant 0\}$ 使得

$$\sup_{0<t<1}|\sqrt{n}\,(T_n-t)-n^{-\frac{1}{2}}K(t,\ n)|=O(l(n))\quad \text{a.s.} \tag{2.19}$$

$$\sup_{0<t<1}|\sqrt{n}\,(T_n-t)-B_n(t)|=O(l(n))\quad \text{a.s.} \tag{2.20}$$

对于 $Q_n^*(t)$，也存在如上的二过程使得定理2成立．事实上，

$$\begin{aligned}&\sup_{0<t<1}|f(F^{-1}(t))Q_n^*(t)-B_n(t)|\\&=\sup_{0<t<1}\left|\frac{\sqrt{n}\,f(F^{-1}(t))}{f(F^{-1}(G_n(t)))}[\tilde{G}_n^{-1}(T_n)-\tilde{G}_n^{-1}(t)]-B_n(t)\right|+O(\tilde{b}_n(t))\\&\leqslant L_1+L_2+L_3+O(\tilde{b}_n(t))\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{b}_n(t)=\sup_{0<t<1} b_n(t)$$

$$L_1=\sqrt{n}\ \sup_{0<t<1}\left|\frac{f(F^{-1}(t))}{f(F^{-1}(G_n(t)))}\,[\tilde{G}_n^{-1}(T_n)-T_n-(\tilde{G}_n^{-1}(t)-t)]\right|$$

$$L_2=\sup_{0<t<1}\left[\left|\frac{f(F^{-1}(t))}{f(F^{-1}(G_n(t)))}\right|\cdot|\sqrt{n}\,(T_n-t)-B_n(t)|\right]$$

$$L_3=\sup_{0<t<1}\left|\frac{f(F^{-1}(t))}{f(F^{-1}(G_n(t)))}-1\right|\sup_{0<t<1}|B_n(t)|$$

下证

$$\sup_{0<t<1}\left|\frac{f(F^{-1}(t))}{f(F^{-1}(G_n(t)))}-1\right|=O\,(n^{-\frac{1}{2}}(\log\log n)^{1/2})\quad \text{a.s.} \tag{2.21}$$

因为 $F(x)$ 有二阶导数，且其二阶导数有界，知

$$\begin{aligned}&\sup_{0<t<1}|f(F^{-1}(t))-f(F^{-1}(G_n(t))|\leqslant C\sup_{0<t<1}|F^{-1}(t)-F^{-1}(G_n(t))|\\&=C\sup_{0<t<1}|f(F^{-1}(t))|^{-1}|G_n(t)-t|+O(\sup_{0<t<1}|G_n(t)-t|)\\&=O\,(n^{-\frac{1}{2}}(\log\log n)^{1/2})\quad \text{a.s.}\quad P^*\end{aligned}$$

以上使用泰勒展开和经验过程重对数律且 $f>0$，故(2.21)证完．

由[7]中的定理4.3.1及经验过程重对数律得

$$\sup_{0<t<1}|B_n(t)|=O((\log\log n)^{1/2})\quad \text{a.s.}$$

由引理2及(2.21)得

$$L_1=O(l(n))\quad \text{a.s.}\ \ P^*,$$

$$L_3=O(l(n))\quad \text{a.s.}\ \ P^*$$

故可证得(2.5)成立．类似地可证(2.6)．

定理 3 及定理 4 的证明: 检查定理 1 及定理 2 的证明，可知，存在一列 Brownian 桥 $\{B_n(y),\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 及一 Kiefer 过程 $\{K(y,\ t),\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ t\geqslant 0\}$ 使得

$$\begin{aligned}
&\sup_{-\infty<x<+\infty}|\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))-\sqrt{n}(F_n(x)-F(x))]|\\
&\leqslant\sup_{-\infty<x<+\infty}|\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))-n^{-\frac{1}{2}}K(F_n(x),\ n)|\\
&\quad+\sup_{-\infty<x<+\infty}|\sqrt{n}(F_n(x)-F(x))-n^{-\frac{1}{2}}K(F(x),\ n)|\\
&\quad+\sup_{-\infty<x<+\infty}|n^{-\frac{1}{2}}K(F_n(x),\ n)-n^{-\frac{1}{2}}K(F(x),\ n)|\\
&=O(l(n))+J_4\quad \text{a.s.}\quad P^*
\end{aligned}$$

其中 $J_4$ 同(2.13)的 $J_4$. 且

$$J_4=O(l(n))\quad \text{a.s.}\quad P^*$$

故可证得定理 3, 同理可证明定理 4.

推论 1 和推论 2 的证明是显然的, 下面仅证推论 2 的(4). 因为

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))^2\,dF(x)-\int_0^1 B_n^2(y)dy\right|\\
&\leqslant\sup_{-\infty<x<+\infty}(\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))-B_n(F(x))|\\
&\quad\cdot\sup_{-\infty<x<+\infty}|\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))+B_n(F(x))|\\
&\leqslant\sup_{-\infty<x<+\infty}|\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))-B_n(F(x))|\\
&\quad\cdot\{\sup_{-\infty<x<+\infty}|\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))-B_n(F(x))|\\
&\quad+2\sup_{-\infty<x<+\infty}|\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))|\}\\
&=O(l(n))[O(l(n)+O((\log\log n)^{\frac{1}{2}})]\quad \text{a.s.}\quad P^*\\
&=O(l(n)(\log\log n)^{\frac{1}{2}})\quad \text{a.s.}\quad P^*
\end{aligned}$$

证完.

注 3　以上的推论对 $\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))$ 成立的，在定理 2 的条件下对 $Q_n^*(t)$ 仍然成立. 对于 $\sqrt{n}(H_n(x)-F_n(x))$ 及 $Q_n^*(t)$ 的强不变原理也成立. 由于篇幅所限，在此不再详述。

## 参 考 文 献


[1] Efron, B., Bootstrap method: another look at the Jacknife. *Ann. Statist.*, 7 (1979), 1—26

[2] 郑忠国, 随机加权法, *应用数学学报*, 2: 2. (1987), ——

[3] 姚泽清, 一类有渐近展开的分布独立和逼近　*系统科学与数学*　8, (1988), 113—126.

[4] 涂冬生、郑忠国, 随机加权法的渐近展开, *应用概率统计*, 4 (1987) 340—347

[5] 周　勇, 格子点分布的随机加权逼近及应用　待发待.

[6] Singh, K., On the asymptotic accuracy of Efron's Bootstrap *Ann. Statist.*, 6 (1981), 1187—1195.

[7] Csörgő, M. and Révész, P., Strong Appreximation in Probability and Statistics. New York. 1981.

[8] Kiefer, J., Deviation between the same quantile process and the sample D. F., *Non-parametric Techniques in Stat. Inference* (M. L. Puri Ed), 299—319, Cambridge Univ. Press. London.

[9] 郑忠国, 关于随机加权法的某些结果, *应用概率统计*, 1 (1987), 1—7.

# STRONG APPROXIMATION OF RANDOM WEIGHTING METHODS AND ITS APPLICATION

ZHOU YONG    ZOU ZHI MING

(*Xiang Tan Noymal University, Hunan,* 411100)

In this paper, we get the rate of strong approximation of Random Weighting Methods on the empirical process and the quantile process. i.e. under some conditions, we have,

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |\alpha_n(x) - B_n(F(x))| = O(l(n)) \quad \text{a.s. } P^*$$

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |\alpha_n(x) - n^{-\frac{1}{2}} K(F(x), n)| = O(l(n)) \quad \text{a. s. } P^*$$

$$\sup_{0<t<1} |f(F^{-1}(t)) Q_n^*(t) - B_n(t)| = O(l(n)) \quad \text{a. s. } P^*$$

$$\sup_{0<t<1} |f(F^{-1}(t)) Q_n^*(t) - n^{-\frac{1}{2}} K(t, n)| = O(l(n)) \quad \text{a. s } P^*$$

where $\alpha_n(x)$, $Q_n^*(t)$, $B_n(x)$ and $n^{-\frac{1}{2}} K(t, n)$ are the empirical process, the quantile process, Brownian bridge and Kiefer process respectively.