应用概率统计 第二十卷
第一期 2004 年 2 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 20 No. 1 Feb. 2004

随机利率下投资连结保单准备金的提取及模拟 *

陈 雪 东
(湖州师范学院理学院，湖州， 313000)

摘 要

具有分离基金的保险产品的责任准备金提取有别于传统的精算方法. 本文在对一类投资连结保单的现金流推算的基础上，讨论了在随机利率环境下其准备金的提取，并就具体的数值例子进行了模拟计算. 本文所涉及的情况与实务较为相符，可作为利润测试或敏感性分析的一种方法.

关 键 词: 投资连结保险，准备金，现金流，随机模拟.

学 科 分 类 号: O211.6, F830.9.

§1. 引 言

投资连结 (Unit-linked, UL) 保险在寿险市场上是一种非传统的新产品，兼有保险保障与投资理财双重功能，其最大的特点是具有分离基金 (Segregate fund) 帐户. 通常情况下，收到的保费按约定的比例分别进入投资帐户和保险帐户，保险公司对投资帐户的资金进行投资并收取一定比例的买卖差价和投资管理费，受益给付以保障保额和投资帐户价值较大者为标准.

分离的投资帐户的资金运作不同于普通的保险资金，其具有更大的波动与市场风险，投资帐户的价值也完全由投资结果而定. 对此类产品而言，只要投资帐户的资产大于规定的保障保额，则无需考虑责任准备金，通常在产品运营的多数时间内会处于这种状态. 但在投资帐户的运作比较差，资产出现亏损时，若发生理赔则其分布就会呈现明显的偏态，此时责任准备金的提取就变得很重要. 但是在考虑其责任准备金的提取时，又不能完全按照传统的精算理论来进行.

Boyle 与 Hardy(1996, [1]) 给出了三种方法，第一、二种分别为动态套期保值 (Dynamic hedging) 和静态套期保值 (Static hedge), 这两种方法都是利用金融经济学理论，通过买卖看跌期权 (Put option) 进而提取责任准备金，这类方法最先由 Boyle 与 Schwartz 于 1977 年 ([2]) 提出，随后 Hardy(1999, [3]) 又进行了讨论. 第三种是精算准备金 (Actuarial reserving) 方法，该方法首先给出两个准备金标准，即概率 p 和 p_1, 对到期时刻 (用 n 表示) 要求

$$\mathsf{P}(F_n + {}_nV > G) \geq p, \tag{1}$$

而对于 $t = 0, 1, \cdots, n-1$, 则要求

$$\mathsf{P}({}_tVe^{\delta} + M_{t+1} > {}_{t+1}V) \geq p_1, \tag{2}$$

其中 F_n 为时刻 n 的基金积累值， ${}_iV$ 与 M_i 分别为时刻 i 的责任准备金和管理费等项收入， δ 为整个保单有效期内的无风险利息效力， G 为保障给付额. 然后根据这些要求来提取准备金.

由于利用 (1) 和 (2) 式来确定准备金，必须要涉及到 F_n 与 M_i 的分布，因而在实际应用中是很难实现的，特别是对于通常的年缴保费的产品而言. 本文在 [3] 的基础上，讨论运用现金流推算法，来确定一类年缴保费的投资连结产品在随机利率环境下准备金的提取方法.

---

* 本课题受国家自然科学基金 (19831020) 资助.
本文 2002 年 5 月 13 日收到.

§2. 现金流推算法与准备金的提取

一、现金流量推算 (Cash Flow Projection)

一般地，考虑向 (x) 发行的 n 年期的两全 UL 产品，记号如下：

G	保障给付额
P	年缴均衡保费
a_t	保险年度 t 初期保费分配比例 (进入投资帐户)
λ	投资单位买卖差价提取比例 (年初提取)
c_t	保险年度 t 内投资管理费提取比例 (年末提取)
F_t	保险年度 t 初期投资帐户资产
i	无风险利率
r_t	保险年度 t 内投资收益率
e_t	保险年度 t 内的费用支出 (年初支出)
q_{x+t}	投保人 (x) 在存活了 t 年后，在 t 到 $t+1$ 年内死亡的概率

根据该产品的现金流结构，可定义保险公司的利润 (亏损) 为保险帐户的现金流量差 (收支平衡项)，它与投资帐户的资产仅通过投资管理费产生关系．因而在不考虑准备金提取的情况下，对保险帐户而言，假设从 t 年开始考虑的该年末年度利润为 $(CF)_t$，则有

$$(CF)_t = P(1-a_t) + \{P(1-a_t) - e_t\}i + P(1-a_t)\lambda + F_t(1+r_t)c_t - e_t - \max\{0, (G - F_{t+1})q_{x+t}\}, \quad (3)$$

其中 $t = 1, \cdots, n$. 记 ${}_tp_x = (1-q_x)(1-q_{x+1})\cdots(1-q_{x+t-1})$，即投保人 (x) 能够存活 t 年的概率，若记从保单签发开始考虑的 t 年末年度利润为 $(PS)_t$，于是

$$(PS)_t = {}_{t-1}p_x(CF)_t, \qquad t = 1, \cdots, n. \quad (4)$$

上述现金流在无风险利率 i 下的净现值为

$$NPV = \sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-t}(PS)_t, \quad (5)$$

于是可定义利润率 (Profit margin) 为

$$P_m = NPV \Big/ \sum_{t=1}^{n}(1+i)^{-(t-1)}{}_{t-1}p_x P. \quad (6)$$

二、责任准备金的提取方法

由于责任准备金可以视为保险公司为了应付未来的债务而事先积累的一笔资金，但是在前面的现金流推算中，并没有考虑准备金的提取．因此若在 $t = 1, \cdots, n$ 的过程中，出现 $(CF)_t < 0$ 的情况，就应该通过事先的积累或调整来加以消除，这就相当于进行了准备金的提取．

按此思路，在提取准备金的情况下，一般地可假设从 t 年开始考虑的该年末年度利润为 $(PRO)_t$，$t = 1, \cdots, n$，应该满足

$$(CF)_t + {}_{t-1}V(1+i) - p_{x+t-1}{}_tV = (PRO)_t, \quad (7)$$

其中，$(CF)_t$ 同前，${}_tV$ 为保险期内 t 年末的责任准备金．

现设 $m = \max\{t, (CF)_t < 0\}$，于是 $\{{}_tV, t = 0, 1, \cdots, n\}$ 的提取就是从 $t = m$ 开始逐渐向前进行的．首先对于 $t \geq m$，令 ${}_tV = 0$，然后由 ${}_mV = 0$ 及 (7) 式，有

$$(CF)_m + {}_{m-1}V(1+i) = (PRO)_m.$$

由于 $(CF)_m < 0$, 故可以提取 ${}_{m-1}V$, 使得 $(PRO)_m = 0$, 即

$$ {}_{m-1}V = -\frac{(CF)_m}{1+i}. $$

再后调整 $t = m-1$ 的现金流为

$$ (CF)'_{m-1} = (CF)_{m-1} - p_{x+m-2\,m-1}V, $$

若 $(CF)'_{m-1} > 0$, 则令

$$ {}_{m-1}V = 0, \qquad 且\ (PRO)_{m-1} = (CF)'_{m-1}; \tag{8} $$

若 $(CF)'_{m-1} < 0$, 则由 (7) 式，提取 ${}_{m-2}V$ 使得

$$ {}_{m-2}V = -\frac{(CF)_{m-1} - p_{x+m-2\,m-1}V}{(1+i)} = -\frac{(CF)'_{m-1}}{(1+i)}, \qquad 且\ (PRO)_{m-1} = 0, \tag{9} $$

然后再用上述方法调整 $t = m-2$ 的现金流．重复该过程至 $t = 1$ 为止，其间由 (8)、(9) 式可得调整后的利润流 $(PRO)_t$, 一般情况下，首年的年度利润为负．

§3. 随机利率环境及模拟

如前所述，投资帐户的收益率具有较大的波动性，为简单起见，即将 r_t 作为随机利率来处理，分别用两个模型来模拟．

一、设 r_t 服从对数正态分布，且是独立同分布的

r_t 可视为是由 $r(t)$ 离散化得到的，而 $r(t)$ 由随机微分方程 ([4])

$$ \mathrm{d}r(t) = \mu \cdot r(t)\mathrm{d}t + \sigma \cdot r(t)\mathrm{d}W(t) \tag{10} $$

确定， $W(t)$ 为标准 Brownian 运动，由 (10) 可知

$$ r(t) = r(0)\exp\{(\mu - (1/2)\sigma^2)t + \sigma W(t)\}, \tag{11} $$

其中， μ, σ 为已知常数，由 (11) 式即可对 r_t 进行数值模拟．

二、设 r_t 服从双因素的 Vasicek 模型 ([5])

r_t 可由如下的递推关系式得到

$$ \begin{cases} r_t = r_{t-1} + k(\mu - r_{t-1})\Delta t + \sqrt{\nu_{t-1}}\varepsilon_1\sqrt{\Delta t} \\ \nu_t = \nu_{t-1} + \gamma(\alpha - \nu_{t-1})\Delta t + \xi\sqrt{\nu_{t-1}}\varepsilon_2\sqrt{\Delta t} \end{cases}, \tag{12} $$

其中 k, μ, γ, α, ξ 均为给定的常数，而 ν_t 为 r_t 的瞬时变化率， ε_1, ε_2 服从标准正态分布，相关系数为 ρ. 由 (12) 式也可对 r_t 进行相应的数值模拟．

§4. 数值例子

现以 10 年期的两全 UL 保单为例．

保险计划： $(x) = 40$, $n = 10$, 不考虑退保的投资连结两全保险．

假设：年缴保费 $P = 1000$, 保险保障额 $G = 8000$, 投资单位买卖差价 $\lambda = 5\%$, 投资管理费比例 $c = 0.35\%$, 保费分配比例：首年 $a_1 = 40\%$, 续年 $a_t = 95\%$; 费用支出：首年 e_1 为 $P \times 40\%$, 加固定量 250, 续年 $e_t = P \times 6\%$, 加固定量 35; 无风险利率 $i = 0.06$, 生命表采用 CD (90 ~ 93, 混合表).

投资收益率模拟假设

模型一：设 r_t 服从 i.i.d 的对数正态分布， $\mu = 0.06$, $\sigma = 0.17$, $r_0 = 0.06$;

模型二：设 r_t 服从双因素的 Vasicek 模型，参数为

$$\mu = 0.06, \quad k = 0.4, \quad \gamma = 0.8, \quad \xi = 0.025, \quad \rho = 0.5, \quad \Delta t = 1, \quad \alpha = 0.3, \quad r_0 = 0.06, \quad \nu_0 = 0.15.$$

综合上述条件，分别在模型一、模型二下对该保单的现金流进行数值模拟，进而考虑准备金的提取，结果见表一与表二.

表一 模型一下保单的现金流、准备金提取及利润向量

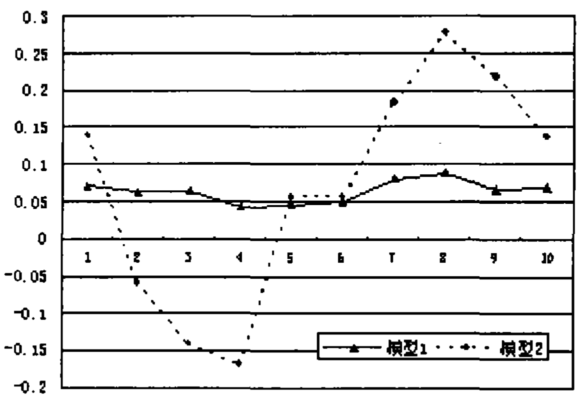
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(CF)_t$	-42.91	-4.45	0.10	4.90	10.35	16.61	25.02	33.16	38.41	44.09
${}_tV$	4.19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$(PRO)_t$	-47.09	0	0.10	4.90	10.35	16.61	25.02	33.16	38.41	44.09
$(PS)_t$	-47.09	0	0.10	4.88	10.30	16.53	24.88	32.96	37.76	43.12

由此可计算出，在给定投资收益率的情况下，该保单调整后的期望利润净现值，以及相应的利润率为 $NPV = 62.53$, $P_m = 0.081\%$.

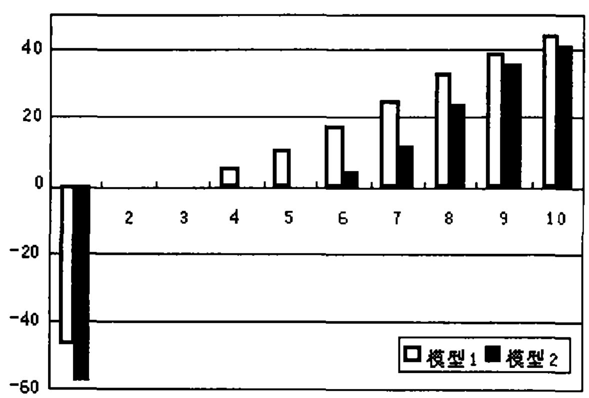
表二 模型二下保单的现金流、准备金提取及利润向量

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(CF)_t$	-42.77	-5.61	-4.23	-4.54	-0.46	3.81	11.35	24.03	35.46	40.97
${}_tV$	14.75	9.16	4.97	0.43	0	0	0	0	0	0
$(PRO)_t$	-57.50	0	0	0	0	3.81	11.35	24.03	35.46	40.97
$(PS)_t$	-57.50	0	0	0	0	3.79	11.29	23.88	34.86	40.07

同样可计算出， $NPV = 13.93$, $P_m = 0.017\%$.



图一



图二

以上两图分别反应出在两类模型之下，投资收益率的变化情况 (折线图，图一) 及利润变化情况 (条形图，图二)，在实际应用中还可进一步考虑首年初始资金的调整和相关因素的敏感性测试等等问题.

致谢 感谢复旦大学数学系尚汉冀教授的帮助指导！

参 考 文 献

[1] Boyle, P.P. & Hardy, M.R., *Reseving for Maturity Guarantees*, Institute for Insurance and Pensions Research, University of Waterloo, 1996.

[2] Boyle, P.P. & Schwartz, E.S., Equilibrium prices of guarantees under equity-linked contracts, *Journal of Risk and Insurance*, **44(4)**(1977), 639–660.

[3] Hardy, M.R., Hedging and reserving for single-premium segregated fund contracts, *North American Actuarial Journal*, **4(2)**(2000), 63–74.

[4] Baxter, M. & Rennie, A., *Financial Calculus*, Cambridge University Press, 1996.

[5] David, C.S., *Finance in Continuous Time*, Kolb Publishing Company, 1992.

[6] 詹姆斯 (美) 等著，洪锡熙译，模拟与风险分析, 上海人民出版社， 2001.

On the Reserving for Unit-linked Policy with Stochastic Interest and Simulation

CHEN XUEDONG

(*Huzhou teachers' College, Huzhou, 313000*)

Reserving for segregated fund insurance contracts are difference from traditional actuarial method. In this paper, based on the cash flow projection for a kind of unit-linked policy, we discuss the reserving for it with stochastic environment, then giving a simulation and calculation of numerical example. The method and case dealing with in this paper are more correspond with practice and can be used in profit testing or sensitivity analysis.