应用概率统计 第九卷
第三期 1993年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 9. No. 3. Aug. 1993

$M/M^r/1/N$排队系统*

何 启 明
(中国科学院,北京,100080)

摘 要

本文讨论了等待空间有限的成批服务排队系统 $M/M^r/1/N$, 给出队长平稳分布的精确解. 还得到了系统损失概率和平均输出间隔的精确值.

§1. 引 言

对 $M/M^r/1/N$ 排队系统的研究已有很长的历史, 特别是 $N=Kr$(K 是正整数)的情形, 队长和等待时间的瞬时和平稳分布都已给出(参见[2]). 但已知的结果均是从嵌入马氏链的角度研究这种排队系统, 对任意时刻队长的平稳分布等未给出精确的解. 本文第三节将给出任意时刻队长平稳分布的精确表达式, 而且没有对 N 是 r 的整倍数的要求; 第四节探讨任意时刻队长平稳分布与嵌入马氏链的平稳分布的关系; 利用第四节的结果, 在第五节得到了平均输出间隔.

引起我们对 $M/M^r/1/N$ 系统发生兴趣的是双输入匹配服务系统(见[4]). 本文的一些主要结果将用于解释双输入匹配服务系统中正常返条件的概率意义以及正常返条件的计算.

§2. 任意时刻队长平稳分布的一些性质

$M/M^r/1/N$ 排队系统是一个具有有限等待空间的单服务台成批服务系统, 等待顾客的队长不超过 N, 每批服务恰好 r 个顾客, 顾客进入服务台后便不算在等待队长中. 系统的输入是参数为 λ 的 Poisson 流, 服务时间分布为参数为 μ 的指数分布. 我们假定到达与服务之间, 服务与服务之间是相互独立的.

令 $N(t)$ 为时刻 t 系统中总的顾客数(其中包括正被服务的顾客), $N(t)$ 的状态空间为 $\{0, 1, 2, \cdots, N+r\}$. 由指数分布的遗忘性可知 $N(t)$ 是连续时间马氏过程, 它的 Q-矩阵是一个 $(N+r+1)\times(N+r+1)$ 矩阵:

* 本文由中国科学院科学基金资助.
本文1987年11月7日收到, 1992年12月29日收到修改稿.

$$
Q=\begin{array}{l} r\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right. \\ N+1\left\{\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right.\end{array}
\begin{pmatrix}
-\lambda & \lambda & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & \\
 & & -\lambda & \lambda & & \\
\mu & & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\
 & \ddots & & \ddots & \ddots & \\
 & & \mu & -(\mu+\lambda) & & \lambda \\
 & & & \mu & & -\mu
\end{pmatrix}.
$$

Q 是不可约矩阵，从而 $N(t)$ 是不可约有限马氏过程，下面结论显然成立(见[5])。

由 $N(t)$ 不可约，存在唯一的非负向量 α 满足方程 $\alpha Q=0$ 和 $\alpha e=1$，事实上，α 是正向量．记 $q_{ij}(t)=P\{N(t)=z|N(0)=i\}$，$0\leqslant i\leqslant N+r$，$0\leqslant j\leqslant N+r$，$q(t)=(q_{ij}(t))$ 是一个 $(N+r+1)\times(N+r+1)$ 矩阵．设 β 是 $N(t)$ 的初始分布，记 $V_j(t)=P\{N(t)=j|\beta\}$，$0\leqslant j\leqslant N+r$，$V(t)=(V_0(t),\ \cdots,\ V_{N+r}(t))$．则有 $q(t)=\exp\{Qt\}$ 且极限 $\lim\limits_{t\to\infty}q(t)=e\alpha$，其中 e 是每个元素均为 1 的列向量；$V(t)=\beta\exp\{Qt\}$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}V(t)=\alpha$.

由此可知，求解 $N(t)$ 的平稳分布，等价于求解向量 α．为此，先推导几个有用的关系式．

展开 $\alpha Q=0$ 可得到：

$$
(*)\begin{cases}
-\alpha_0=-\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\alpha_r, & (1)\\
\alpha_0=\alpha_1-\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\alpha_{r+1}, & (2)\\
\alpha_1=\alpha_2-\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\alpha_{r+2}, & (3)\\
\qquad\vdots & \vdots\\
\alpha_{r-2}=\alpha_{r-1}-\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\alpha_{2r-1}, & (r)\\
\alpha_{r-1}=\left(1+\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\alpha_r-\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\alpha_{2r}, & (r+1)\\
\qquad\vdots & \vdots\\
\alpha_{N-1}=\left(1+\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\alpha_N-\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\alpha_{N+r}, & (N+1)\\
\alpha_N=\left(1+\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\alpha_{N+r}, & (N+2)\\
\qquad\vdots & \vdots\\
\alpha_{N+r-2}=\left(1+\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\alpha_{N+r-1}, & (N+r)\\
\alpha_{N+r-1}=\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\alpha_{N+r}. & (N+r+1)
\end{cases}
$$

性质 1
$$\sum_{i=r}^{N+r}\alpha_i=\frac{\lambda}{r\mu}(1-\alpha_{N+r}).$$

证明　在 $(*)$ 中方程 (i) 两边同时乘上 i，然后全部相加可得到

$$\sum_{i=0}^{N+r-1}\alpha_i=\frac{\mu}{\lambda}\left(r\sum_{i=r}^{N+r}\alpha_i\right),$$

于是
$$1=\alpha_{N+r}+\frac{r\mu}{\lambda}\left(\sum_{i=r}^{N+r}\alpha_i\right).$$

性质 2
$$\alpha_j=\frac{\mu}{\lambda}\sum_{i=r}^{r+j}\alpha_i,\quad 0\leqslant j\leqslant r-1;$$
$$\alpha_r=\frac{\mu}{\lambda}\sum_{i=r+1}^{2r}\alpha_i.$$

证明 将(*)中前 $j+1$ 个方程相加，$0\leqslant j\leqslant r$，便得到所需结论.

性质 3
$$\frac{\mu}{\lambda}\left(\sum_{j=0}^{r-1}(r-j)\alpha_{j+r}\right)=\sum_{i=0}^{r-1}\alpha_i.$$

证明 用 $r-i+1$ 乘以方程(i)的两边，$1\leqslant i\leqslant r$，再相加所得方程便得到结论.

§3. 队长平稳分布的精确表达式

以方程组(*)为出发点求解 α，方法是先利用等式$(r+2)\to(r+N+1)$，将 α_i，$r<i<N+r-1$ 用 α_{N+r} 表示出来，再用性质 2 求出 α_i，$0<i<r-1$ 的表达式，最后求出 α_{N+r} 便得到全部 α_i，$0<i<N+r$.

我们用下面的递推关系式定义序列 $\{Y_n\}$：
$$Y_0=1,\ Y_1=\frac{\mu}{\lambda}Y_0,\ \ Y_i=\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)Y_{i-1},\ 2<i<r,$$
$$Y_{n+1}=\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)Y_n-\frac{\mu}{\lambda}Y_{n-r},\ n\geqslant r.$$

由方程组(*)容易看出，$\alpha_{N+r-i}=Y_i\alpha_{N+r}$，$0<i<N+1$. 令
$$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^nY_n,$$

由定义有：
$$Y(z)=\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)zY(z)-\frac{\mu}{\lambda}z^{r+1}Y(z)+1-z.$$

于是有
$$Y(z)=(1-z)\left(1-z\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)+\frac{\mu}{\lambda}z^{r+1}\right)^{-1}=(1-z)\sum_{m=0}^{\infty}z^mF_m,$$

其中
$$(**)\quad F_m=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{r+1}\right]}\binom{m-kr}{k}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)^{m-kr}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k,\ \ m\geqslant 0,$$

这里$[x]$表示不超过 x 的最大整数. $\{F_m\}$ 是严格单调增序列. 事实上，$\{F_m\}$ 满足递推关系：
$$F_0=1,\ \ F_i=\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)F_{i-1},\ 1<i<r,\ \ F_i=\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)F_{i-1}-\frac{\mu}{\lambda}F_{i-r-1},\ i\geqslant r+1.$$

由此关系知 $F_i>F_{i-1}$，$1<i<r$. 对
$$i\geqslant r+1,\ F_i-F_{i-1}=\frac{\mu}{\lambda}(F_{i-1}-F_{i-r-1}),$$

由归纳法即可证明 $F_i>F_{i-1}$. 于是有
$$Y_n=F_n-F_{n-1},\ \ n\geqslant 0\ \ (F_{-1}\triangleq 0).$$

由以上结果和性质 2 可得

定理 1 $M/M^r/1/N$ 排队系统任意时刻队长的平稳分布为
$$\alpha_j=\begin{cases}\dfrac{\mu}{\lambda}(F_N-F_{N-j-1})\alpha_{N+r}, & 0<j<r-1,\\ (F_{N+r-j}-F_{N+r-j-1})\alpha_{N+r}, & r<j<N+r,\end{cases}$$

其中 $$\alpha_{N+r}=\frac{\lambda}{r\mu}\left[\frac{\lambda}{r\mu}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{r+1}\right]}\binom{N-kr}{k}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)^{N-kr}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k}\right]^{-1}.$$

证明 只需证明 α_{N+r} 的表达式. 由性质 1 和规范化条件 $\alpha e=1$,

$$1=\sum_{i=0}^{r-1}\alpha_i+\sum_{i=r}^{N+r}\alpha_i=1-\frac{\lambda}{r\mu}+\frac{\lambda}{r\mu}\alpha_{N+r}+F_N\alpha_{N+r},$$

即 $\alpha_{N+r}=\frac{\lambda}{r\mu}\left(\frac{\lambda}{r\mu}+F_N\right)^{-1}$, 代入 F_N 的表达式便得到 α_{N+r} 的精确表达式.

由于 $M/M^r/1/N$ 系统只有有限等待空间, 当一顾客到达时发现已有 $N+r$ 个顾客在系统中, 则该顾客立即离开系统并且不再回来, 我们称该顾客损失掉了. 对有限等空间的排队系统来讲, 损失概率是非常重要的系统指标. 由于 $M/M^r/1/N$ 系统中任意时刻的队长和到达时刻的队长有相同的平稳分布(参见徐光辉[1]), 该系统的损失概率为 α_{N+r}.

§4. 服务完成时刻的嵌入马氏链

为了研究输出过程, 需要了解服务完成时刻系统中队长的平稳分布. 设 t_n 为第 n 个服务完成的时刻, 记 $N_n^d=N(t_n+0)$, 则 $\{N_n^d\}$ 是一个马氏链, 它的状态空间为 $\{0, 1, 2, \cdots, N\}$. 记

$$a_j=\int_0^\infty\frac{(\lambda t)^j}{j!}\mu e^{-(\lambda+\mu)t}dt=\frac{\mu\lambda^j}{(\lambda+\mu)^{j+1}},$$

$$\bar{a}_j=1-\sum_{i=0}^{j-1}a_i,\quad j\geqslant 1.$$

$\{N_n^d\}$ 的转移矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1\cdots\cdots a_{N-1} & \bar{a}_N \\ \vdots & & \\ a_0 & a_1\cdots\cdots a_{N-1} & \bar{a}_N \\ & a_0\cdots\cdots a_{N-2} & \bar{a}_{N-1} \\ & \ddots \quad \vdots & \vdots \\ & a_0\cdots a_{r-1} & \bar{a}_r \end{pmatrix}.$$

因此 $\{N_n^d\}$ 是有限状态空间不可约马氏链, 其极限 $p_j=\lim\limits_{n\to\infty}P\{N_n^d=j\}$ 存在, $0\leqslant j\leqslant N$. 记 P 为 $P=(p_0, \cdots, p_N)$, 称 P 为 $\{N_n^d\}$ 的平稳分布. P 是满足 $PA=P$ 和 $Pe=e$ 的唯一非负解. 下面给出 P 和 α 之间的关系.

定理 2 $$p_j=\frac{\alpha_{N+j}}{\sum_{i=r}^{N+r}\alpha_i},\quad 0\leqslant j\leqslant N.$$

证明 设时刻 t 系统中有 $j+r(0\leqslant j\leqslant N)$ 个顾客, 则在 $(t, t+\Delta t)$ 中有服务完成的概率为 $\mu\alpha_{j+r}\Delta t+O(\Delta t)$. 那么在 $(t, t+\Delta t)$ 中有服务完成且服务完成后留下 j 个顾客的概率为

$$\frac{\mu\alpha_{j+r}\Delta t+O(\Delta t)}{\sum_{j=0}^{N}\mu\alpha_{j+r}\Delta t+O(\Delta t)},\quad 0\leqslant j\leqslant N.$$

令 $\Delta t\to 0$ 便得到定理 2.

注 定理 2 也可由下述方法证之. 令

$$\tilde{p}_j=\alpha_{r+j}\left(\sum_{i=r}^{N+r}\alpha_i\right)^{-1},\quad 0\leqslant j\leqslant N,\ \tilde{P}=(\tilde{p}_0,\ \cdots,\ \tilde{p}_N).$$

直接验证有 $\tilde{P}=\tilde{p}A$, 再由唯一性即得 $P=\tilde{P}$.

§5. 平均输出间隔

令 $V(N)$ 为 $M/M^r/1/N$ 系统的两相邻输出之间的间隔. 记 E_k^λ 为参数为 λ 的 k 阶 Erlang 分布. 当系统平稳时,

$$P\{V(N)<t\}=\sum_{j=0}^{r-1}p_jP\{E_1^\mu+E_{r-j}^\lambda<t\}+\sum_{j=r}^{N}p_jP\{E_1^\mu<t\}.$$

记 $V(N)$的 L. S. 变换为 $f_N(s)$, 则有

$$f_N(s)=\sum_{j=0}^{r-1}p_j\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{r-j}+\left(\sum_{j=r}^{N}p_j\right)\frac{\mu}{\mu+s}.$$

由此式, 性质 2 和 3, 我们得到

定理 3 当系统平稳时,

$$EV(N)=\frac{r}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{r+1}\right]}\binom{N-kr}{k}\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)^{N-kr}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k\right)^{-1}.$$

作者感谢导师徐光辉研究员的指导, 同时也感谢刘西锁先生的帮助.

参 考 文 献

[1] 徐光辉, *随机服务系统*, 科学出版社, 1988.

[2] M. L. Chaudhry and J. G. C. Templeton, A first course in bulk queues, *John Willy and Sons*, 1983.

[3] M. F. Neuts, Matrix-Geometric Solution in Stochastic Models, *The Johns Hopkins Uni. Press*, Baltimore and London, 1981.

[4] 徐光辉, 何启明, 刘西锁, 匹配服务系统的平稳性态, *应用数学学报*, *待发表*. 13 (1990), 39—48

[5] S. M. Ross, Stochastic Processes, *John Willey and Sons*, 1983.

$M/M^r/1/N$ QUEUEING SYSTEMS

He Qiming

(*Chinese Academy of Sciences, Beijing*, 100080)

In this paper, we discuss bulk service queueing systems with finit waiting rooms. The explicit solution of the distribution of the queue length at an arbitrary time is given. The loss probability and the mean interdeparture time are also derived.