一类超扩散过程的概率估计*

坚 雄 飞
(华南师范大学数学系, 广州, 510631)

摘 要

本文研究了一般椭圆算子对应扩散的支集, 给出了一个估计, 并推广了文 [1] 的一个结果.

关键词: 径向性, 支集, 一致椭圆, 测度值Markov过程, 奇异边值问题.
学科分类号: O211.6.

§1. 问题的提出

超布朗运动及其性质是近几年来研究的主要课题之一. 超过程的定义及构造已有比较完善的理论(参见 [8]). 本文直接对超扩散过程进行讨论.

设 $X.$ 是以 μ 为初值的超扩散, 其 Laplace 泛函为

$$\mathsf{E}_\mu \exp(-<X_s,\varphi> s) = \exp(-<u(t),\mu>), \qquad \mu\in M_F(R^d), \tag{1.1}$$

其中, $u(t)$ 满足如下非线性发展方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t)}{\partial t} = Lu(t) - u^2(t), \\ u(0,x)=\varphi(x), \qquad\qquad \varphi\in C_c(R^d)+. \end{cases} \tag{1.2}$$

由 [8] 的结论, $X.$ 为测度值马氏过程. 特别, L 为 Laplace 算子时, $X.$ 为超布朗运动, 并且对 $X.$ 的支集有非常具体的结果. (参看 Iscoe[1] 定理 1 及定理 2), 在文 [1] 的证明中, 解的径向性是本质条件. 一个自然的问题是对于一般的椭圆算子 L 是否有类似的结果:

$$L=\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad x\in R^d. \tag{1.3}$$

现有的结论是 $A=(a_{ij})$ 为单位阵, $b_i(x)=\beta x_i$, $i=1,\cdots,d$. $\beta>0$ 的情形, 鲍玉芳在文 [2] 中给出了一些结果, 除此情形, 对于一般椭圆算子 L, 由于方程 $Lu(x)=u^2(x)$ 不是对称的, 因而类似结果用 [1] 的方法无法获得, 我们的工作是运用有关比较定理得到一些估计.

本文针对形如 (1.3) 的椭圆算子 L 进行讨论, 并记相应于 (1.1) 的超过程为 $(X_t)_{t\geq 0}$, L 满足一致椭圆条件, 即: 存在正数 α_1,α_2, 使得成立下式:

$$0<\alpha_1|\xi|^2\leq\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq\alpha_2|\xi|^2, \qquad \forall x\in R^d,\ \xi\in R^d-\{0\}. \tag{1.4}$$

同时还假设 (1.2) 的解满足一定光滑条件, 为了证明方便, 还假定 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\leq 0$, 并且存在正数 $\beta_1,\beta_2>0$, 使得

$$\beta_2 x_i\leq b_i(x)\leq\beta_1 x_i, \qquad i=1,\cdots,d,\ \forall x=(x_i,\cdots,x_d)\in R^d. \tag{1.5}$$

在以后的证明中可看出 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\leq 0$ 这一条件并非本质.

*国家自然科学基金 (编号 10071014) 与广东省自然科学资金资助课题, 编号 (990444).
本文 1996 年 10 月 29 日收到, 1999 年 10 月收到修改稿.

§2. 主要结果

定理1 设L满足(1.4)及(1.5), 则

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}_{\mu}(X_t\text{在}[\overline{B}(0,R)]^c\text{有负荷})\\ \in&[1-\exp(-<u^{(1)}(.,R),\mu>),1-\exp(-<u^{(2)}(.,R),\mu>)].\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中, $[.,.]$表示闭区间. $\mathrm{supp}\mu\subset B(0,R_0)$, $R\geq R_0$. $u^{(1)},u^{(2)}$分别是如下奇异边值问题的唯一正的径向解.

$$\begin{cases}L_j u^{(j)}=[u^{(j)}]^2, & \text{若}\ x\in B(0,R);\\ u^{(j)}\longrightarrow\infty, & \text{若}\ x\to\partial B(0,R),\ j=1,2,\end{cases}\tag{2.2}$$

其中

$$L_j=\alpha_j\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\beta_j\sum_{i=1}^{d}x_i\frac{\partial}{\partial x_i},\qquad j=1,2.\tag{2.3}$$

定理2 在定理1的假设下,

$$\mathsf{P}_{\mu}\Big(\Big\{\bigcup_{t\geq 0}\mathrm{supp}X_t\Big\}\text{有界}\Big)=1.\tag{2.4}$$

系1 若(1.3)中算子严格椭圆, 定理2仍然成立.

系2 若(1.3)中$b_i\equiv 0$, $i=1,\cdots,d$. 此时定理1, 定理2的结论仍成立, 且对$\forall\varepsilon>0$,

$$\mathsf{P}_{\delta_0}(X.\text{在}B(x,\varepsilon)\text{有负荷})\sim p(x),$$

$p(x)$表示x的正函数.

$$p(x)\in\begin{cases}[2(4-d)\alpha_1|x|^{-2},\ 2(4-d)\alpha_2|x|^{-2}], & 1\leq d\leq 3;\\ [2\alpha_1|x|^{-2}\log^{-1}|x|,\ 2\alpha_2|x|^{-2}\log^{-1}|x|^{-2}], & d=4;\\ [c\alpha_1(d-2)^{-1}|x|^{2-d},\ c\alpha_2(d-2)^{-1}|x|^{2-d}], & d\geq 5.\end{cases}\tag{2.5}$$

其中δ_0指单点测度, c是依赖于维数d的非负常数, $\sim$表示$|x|\to\infty$时的等价关系. 显然, 误差估计依赖于α_1,α_2, 特别, α_1,α_2均为1时, 系2可见于[1].

§3. 定理的证明

先证定理1. 为此看如下引理及命题:

引理1(比较定理) 设$u^{(1)}(t)$与$u^{(2)}(t)$分别是如下Cauchy问题中的唯一解:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u^i(t)}{\partial t}=\mathcal{L}_i u^i(t)+\Psi(u^i(t)),\\ u^i(0,x)=f(x), & f\in C^2(R^d),\ i=1,2,\end{cases}\tag{3.1}$$

其中$\mathcal{L}_k$是R^d上的二次偏微分算子, 即

$$\mathcal{L}_k=\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}^k(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d}b_i^k(x)\frac{\partial}{\partial x_i},\qquad k=1,2.$$

$(a_{ij}^k(x))$正定, $b_i^k(x)$, $i=1,\cdots,d$. 局部有界, $\Psi(x,\lambda)=-b(x)\lambda-c(x)\lambda^2$, 这里$b,c\geq 0$有界. 若$f$二次连续可微, 且$\mathcal{L}_1u^{(1)}(t)\geq\mathcal{L}_2u^{(1)}(t)$, 则

$$u^{(1)}(t)\geq u^{(2)}(t),\qquad \forall t\geq 0.$$

证明: 引理的证明请参阅[3]定理2. □

注 引理中的凸指下凸.

对$n,m\in N$, 定义

$$\varphi_{mn}(x)=\begin{cases}0 & |x|\le R\text{或}|x|\ge m+1;\\ \cos^3\left[\frac{n^2\pi}{2}\left(|x|-R-\frac{1}{n}\right)^2\right] & R<|x|<R+\frac{1}{n};\\ \cos^3\left[\frac{\pi}{2}(|x|-m)^2\right] & m<|x|<m+1;\\ 1 & R+\frac{1}{n}\le|x|.\end{cases} \tag{3.2}$$

显见, $\varphi_{mn}\uparrow\chi_{[\overline{B}(0,R)]^c}$, χ_E是E的特征函数. 且$\varphi_{mn}\in C_c(R^d)+\bigcap C^2(R^d)_+$.

引理2 设$u\equiv u_{mn}$是如下方程的解:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=Lu(t,x)-u^2(t,x)+\theta^2\varphi_{mn}(x),\\ u(0,x)=0.\end{cases} \tag{3.3}$$

则$u=\lim\limits_{m,n\to\infty}u_{mn}(t,x,\theta)$存在有限, 关于$t,\theta$单调递增, 且是如下发展方程的解:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=Lu(t,x)-u^2(t,x)+\theta^2\chi_{[\overline{B}(0,R)]^c},\\ u(0,x)=0.\end{cases} \tag{3.4}$$

证明: 由[4]的结果, 对任给$\theta>0$, 存在有限测度值马氏过程$X.$, 其轨道属于$D(R_+,M_F(R^d))$, 它的转移测度有如下Laplace泛函:

$$\mathsf{E}_\mu\exp\left(-\int_0^t<X_s,\theta^2\varphi_{mn}>ds\right)=\exp(-<u_{mn}(t,x,\theta),\mu>), \tag{3.5}$$

其中u_{mn}是(3.3)的解. 由$\{\varphi_{mn}\}$的单调性及上述(3.5)式, 可得$u_{mn}(t,x,\theta)$对θ,n,m及t的单调性. 对上述$\theta>0$, 注意到(3.2)式定义的φ_{mn}二次可微, 故而,

$$u_{mn}(t,x,\theta)=S_{t-s}(\theta^2\varphi_{mn})ds-\int_0^t S_{t-s}[u_{mn}^2(s,x,\theta)]ds\le\theta^2 t. \tag{3.6}$$

这里, $S.$表示与过程$X.$相联系的非负半群算子. 对(3.6)式用控制收敛定理, 易知极限$u=\lim\limits_{m,n\to\infty}u_{mn}$存在, 它是(3.4)的解. 显然, 若在(3.3)中分别取(2.3)中算子L_1与L_2, 则由引理1及§1假设, 易得

$$u_{mn}^{(1)}\le u_{mn}\le u_{mn}^{(2)}. \tag{3.7}$$

特别,

$$u^{(1)}(t,x,\theta)\le u(t,x,\theta)\le u^{(2)}(t,x,\theta), \tag{3.8}$$

$\forall t\ge 0,\theta,x\in R^d$. 事实上, 若记$u\equiv u_{mn}$为(3.3)的解, 由于$u(0,x)=0$凸, 故由Picard迭代法$u$凸. 这样$\dfrac{\partial u}{\partial x}$单调递增, 不妨设一阶偏导数小于或等于0. 我们有

$$[b_i(x)-\beta_1 x_i]\frac{\partial u}{\partial x_i}\ge 0;\qquad [\beta_2 x_i-b_i(x)]\frac{\partial u}{\partial x_i}\le 0. \tag{3.9}$$

另一方面, 由于L满足(1.4), 注意到引理1特别对$b_i(x)=0$, $\beta_1,\beta_2=0$的情况成立. 由条件, 有

$$\alpha_2\sum_{i=1}^d\frac{\partial^2 u(t)}{\partial x_i^2}\ge\sum_{i,j}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(t)}{\partial x_i\partial x_j}\ge\alpha_1\sum_{i=1}^d\frac{\partial^2 u(t)}{\partial x_i^2}. \tag{3.10}$$

综合(3.9)及(3.10), 可知(3.7), (3.8)成立. □

注 1 从上面的推导中可看出, 对 (3.3) 的解关于变量 x 的一阶偏导数的限制不是本质的. 事实上, 由于 u 凸, 若在某一点 x_0 处一阶导数为 0, 则在 $R^d\setminus B(0,|x_0|)$ 上非负, 可在 $B(0,|x_0|)$, $R^d\setminus B(0,|x_0|)$ 上分别用比较定理综合可得.

注 2 若在 (3.3) 中取 L 分别为 L_j, $j=1,2$. 由 [2], 对应解 $u^{(j)}(t)$ 关于 t 一致收敛. 记 $u^j\equiv\lim\limits_{t\to\infty}u^{(j)}$, 则 $u^j=u^j(\cdot)$ 满足

$$L_ju-u^2+\theta^2\varphi_{mn}=0. \tag{3.11}$$

在这里, 有必要强调的是对 (1.3) 的 L 也成立. 下面我们来证明该论断. 在 (3.5) 中取 $\mu=\delta_x$, 当 $t\to\infty$ 时, $u(t)$ 趋于某一 u. 其中 δ_x 为单点测度. 由最大值原理: $0<u(t)\le\|\varphi(x)\|_\infty^{1/2}$. ($\|\cdot\|$ 指 sup 范数) 故 $u(t)$ 对 t 一致有界. 设 $\{S_t\}$ 是以 $-L$ 为无穷小生成元的 C_0 半群. 注意到 $\varphi_{mn}\in C_c^2(R^d)$, 由非线性发展方程的正规性定理, 积分方程

$$u(t)=S_t\varphi_{mn}-\int_0^t[S_{t-s}u^2(s)]ds \tag{3.12}$$

与 (3.3) 等价. 我们的目的是对 $u(t)$ 做出一致收敛估计. 为此, 由 [5] 的方法 $u'(t)$ 满足:

$$u'(t)=S_t\varphi-\int_0^t[2S_{t-s}u(s)u'(s)]ds. \tag{3.13}$$

由于 S. 是非负半群, 所以 $0\le u'(t)\le S_t\varphi$. 注意到若 $\varphi\in\mathcal{D}(\mathcal{L})\cap\mathcal{D}(\mathcal{L}_2)$, 其中 $\mathcal{L}_2$ 见 (2.3), $\mathcal{D}(\cdot)$ 记 $\mathcal{L}$ 的定义域. 以 $S_t^{(2)}$ 记与 $\mathcal{L}_2$ 相联系的 C_0 半群, 则得 $S_t\varphi\le S_t^{(2)}\varphi$. 而对 $O-U$ 半群 $S_t^{(2)}$, 类似于 [5] 可得 $u(t)$ 的一致收敛, 从而对 S_t 也是如此. 即 (3.3) 的解 $u(t)$ 关于 t 一致收敛, 且 u 满足方程 (3.11).

引理 3 设 $u,v\in C_0^2(R^d)_+$, 使得分别有 $Lu-u^2+\varphi=0$ 及 $Lv-v^2+\psi=0$, 其中 $\varphi,\psi\in C_c(R^d)_+$, $\varphi\le\psi$. 则有 $u\le v$. 特别, 方程 $Lu-u^2+\varphi=0$ 解唯一.

证明: 考虑区域 D(有界开, 闭集) 中的严格微分不等式 $Lu(x)>0$, 如果 u 在一点 x_0 处有最大值 (事实上由 u 的假设必可取得), 则有微积分知道在 x_0 处, $\dfrac{\partial^2u(x_0)}{\partial x_{0i}^2}\le0$, $\dfrac{\partial u(x_0)}{\partial x_{0i}}=0$, $i=1,2\cdots,d$. 故 Hessin 矩阵 $H_{u(x_0)}$ 非正定. 由 L 的假定, trace$(AH)\le0$, 这是一个矛盾! 则可断言: 若 u 在 R^d 中某一点取相对最大值, 则 $Lu(x_0)\le0$. 故 $u(x_0)\le\varphi(x_0)^{1/2}$. 即 $u(x)\le\sup\varphi(x)^{1/2}$. 同理可证 $v(x)\le\sup\psi(x)^{\frac12}$. 注意到对 φ,ψ 的假设, u,v 有界.

若 $u-v$ 在某些点上取正值, 则可设在其中一点上取正的最大值. 由前述结论 $0\ge L(u-v)=u^2-v^2+\psi-\varphi>0$. 矛盾! 从而 $u\le v$ 对 $x\in R^d$. 解的唯一性由对称性可得. □

引理 4 设 $u\equiv u_{mn}$ 表示 (3.11) 的解, 则 $u=\lim\limits_{m,n\to\infty}u_{mn}$ 存在, 且是如下方程的解.

$$Lu-u^2+\theta^2\chi_{[\overline{B}(0,R)]^c}=0. \tag{3.14}$$

证明: 结论对 (2.3) 中 L_j, $j=1,2$. 类似 [2] 可得. 注意到 (3.8) 及注 2, 可得结论. 同时, $0\le u\le\theta$. □

引理 5 记 (3.14) 的解为 $u=u(x,\theta)$. $v(.,\theta)$ 为方程 $v''-v^2+\theta^2\chi_{[\overline{B}(0,R)]^c}=0$ 的解, 令 $v=\lim\limits_{\theta\to\infty}v(.,\theta)$, 则存在正常数 c, 成立 $u(x,\theta)\le cv\Big(\dfrac{x^2}{R}\Big)$, 对 $\forall x\in B(0,R)$. 并且 $u(x,R)=\lim\limits_{\theta\to\infty}u(x,R,\theta)$ 对 $x\in B(0,R)$ 存在, $\lim\limits_{R\to\infty}u(x,R)=0$.

证明: 对 $O-U$ 半群算子 L_j, 类似结果可见于 [2] 引理 3.3, 3.4. 结合 (3.8) 即得. □

命题 1 设 $(X_t)_{t\ge0}$ 是超 $O-U$ 过程, $X_0=\mu$, supp$\mu\subset B(0,R_0)$, $R\ge R_0$. 则

$$\mathsf{P}_\mu(X.\text{在 }[\overline{B}(0,R)]^c\text{有负荷})=1-\exp(-<u(.,R),\mu>). \tag{3.15}$$

其中u是如下奇异椭圆边值问题的解.

$$\begin{cases} Lu(x) = u^2(x) & x \in B(0,R), \\ u(x) \to \infty & x \to \partial B(0,R). \end{cases} \tag{3.16}$$

L见(2.3), 此时$\alpha = 1$.

命题2 在命题1的假设下,

$$\mathsf{P}_\mu\Big\{\Big(\bigcup_{t\geq 0} \mathrm{supp} X_t\Big) \text{有界}\Big\} = 1.$$

证明: 见[2]定理1, 定理2. □

定理1证明:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}_\mu(X.\text{在}[\overline{B}(0,R)]^c\text{从未有负荷}) \\
=&\mathsf{P}_\mu\Big(\int_0^\infty X_t([\overline{B}(0,R)]^c)dt = 0\Big) \\
=&\lim_{\theta\to\infty} \mathsf{E}_\mu \exp\Big(-\theta^2\int_0^\infty X_t([\overline{B}(0,R)]^c)dt\Big) \\
=&\lim_{\theta\to\infty}\lim_{T\to\infty} \mathsf{E}_\mu \exp\Big(-\int_0^T < X_t, \theta^2\chi_{[\overline{B}(0,R)]^c} > dt\Big) \\
=&\lim_{\theta\to\infty}\lim_{T\to\infty}\lim_{m,n\to\infty} \mathsf{E}_\mu \exp\Big(-\int_0^T < X_t, \theta^2\varphi_{mn} >\Big) \\
=&\lim_{\theta\to\infty}\lim_{T\to\infty}\lim_{m,n\to\infty} \mathsf{E}_\mu \exp(< u_{m,n}(.,T,R,\theta), \mu >),
\end{aligned}$$

但$\exp(-< u_{m,n}(.,T,R,\theta),\mu >) \in [\exp(-< u^{(2)}_{m,n}(.,T,R,\theta),\mu >), \exp(-< u^{(1)}_{m,n}(.,T,R,\theta),\mu >)]$上式中最后一个等号由引理2, 引理4, 引理5及引理6得到. 有命题1, 对$[.,.]$关于θ, T, m, n取极限, 有

$$\mathsf{P}_\mu(X.\text{从未负荷}[\overline{B}(0,R)]^c) \in [\exp(-< u^{(2)}(.,R),\mu >), \exp(-< u^{(1)}(.,R),\mu >)].$$

注意到上式括号中事件与所讨论事件对立, 结论即得. □

定理2证明: 注意到$\mathrm{supp}\mu \subset B(0,R_0)$, 且分别对与$L_j$, $j=1,2$. 对应的超$O-U$过程$X_t^{(1)}, X_t^{(2)}$、有命题2, 类似于[5]可得

$$\mathsf{P}_\mu\Big(\Big[\bigcup_{t\geq 0}\mathrm{supp} X_t^{(j)}\Big]\text{有界}\Big) = 1,$$

进一步运用定理1可得结论. □

由定理2, 系1的结论平凡.

系2的证明: 在证明之前, 我们给一个明显的结论, 以$\triangle$记Laplace算子. 对方程

$$\alpha \triangle u(x) = u^2(x) \qquad (\alpha > 0), \tag{3.17}$$

$$\triangle v(x) = v^2(x), \tag{3.18}$$

若$u(0) = \alpha v(0)$, 则$u(x) = v(x)$, $\forall x \in R^d$. 基于这一结论并结合[1]定理, 我们有如下引理:

引理7 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathsf{P}_{\delta_0}(X.\text{在}B(x.\varepsilon)\text{有负荷}) \sim \begin{cases} 2(4-d)\alpha|x|^{-2} & 1\leq d\leq 3; \\ 2\alpha|x|^{-2}\log^{-1}|x| & d=4; \\ c(d-2)^{-1}\alpha|x|^{2-d} & 5\leq d, \end{cases} \tag{3.19}$$

其中$X.$是通过公式(1.1)对应于$\alpha\triangle$的测度值马氏过程.

证明: 类似于[1]定理2, 此时只需注意解有α倍即可. 这样,系2显然. □

致谢 作者感谢导师王梓坤先生的督促与指导, 同时感谢张新生副教授、赵学雷副教授的有益提示与鼓励.

参 考 文 献

[1] Iscoe, I., On the surpports of measure-valued critical branching Brownian motion, *Ann. Probab.*, **16(1)**(1988), 200–221.
[2] 鲍卡芳, 超$O-U$过程的性质及其他, 北京师范大学博士论文, 1995.
[3] Zhang, X.S., On comparison theorems in nolinear evolution equation, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Dekker/New York, **176**(1996), 471–475.
[4] Watanabe, S., A limit theorem of branching process and continuous state branching processes, *J. Math. Kyoto Univ.*, **8(1)**(1968), 141–167.
[5] Iscoe, I., A weighted iccupation time for a class of measure-valued branching processes, *Probab. Th. Rel. Fileds*, **71**(1986), 85–116.
[6] 赵学雷, 超布朗运动的首中概率, 数学年刊, **13A(5)**(1992), 519–525.
[7] Protter, M.H. and Weinberger, H.F., *Maximum Principles in Differential Equations*, Englewood Cliffs/NJ. Prentice-Hall, 1967.
[8] Fitzsimmons, P.J., Construction and regularity of measure-valued Markov branching processes, *Israel J. Math.*, **64**(1988), 337–361.
[9] Stroock, D.W., Varadhan, S.R., *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag/Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

An Estimate of the Probability for One Class of Super-Diffusion Processes

JIAN XIONGFEI

(*Department of Mathematics, South-China Normal University, Guangzhou, 510631*)

In this paper, the support set of the super-diffusion processes with the uniform elliptic operator is considered. An estimate of the hitting probability of the super-processes are given.