应用概率统计　第二十一卷
第四期　2005 年 11 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 21 No. 4 Nov. 2005

ρ^*- 混合随机变量序列部分和的方差估计 *

王　聪 [1,2]　　张立新 [1]

([1] 浙江大学数学系，杭州，310028; [2] 宁波市统计局，宁波，315010)

摘　要

本文研究了 ρ^*- 混合随机变量序列部分和的方差估计，给出了部分和方差估计的相合性及渐近正态性.

关 键 词: ρ^*- 混合，部分和，方差估计，相合性，渐进正态性.

学 科 分 类 号: O211.4.

§1.　引言及主要结果

设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{K},\mathrm{P})$ 上的随机变量序列，$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{K}$ 中的两个子 σ- 域. 对于 $T\subset N$, $S\subset N$, 定义: $\mathcal{F}_T=\sigma(X_i, i\in T)$, $\mathcal{F}_S=\sigma(X_i,i\in S)$. 定义最大相关系数: $\rho(\mathcal{A},\mathcal{B})=\sup\{\mathrm{corr}(f,g): f\in L_2(\mathcal{A}), g\in L_2(\mathcal{B})\}$.

称 $\{X_n, n\geq 1\}$ 是 ρ- 混合的，若

$$\rho(n)=\sup_k \rho(\sigma(X_i, 1\leq i\leq k), \sigma(X_i, i\geq k+n))\longrightarrow 0, \qquad n\to\infty.$$

令 $\rho_n^*=\sup\{\rho(\mathcal{F}_S,\mathcal{F}_T)$, 非空有限子集 $S,T\subset N$, 且 $\mathrm{dist}(S,T)\geq n\}$. 对于三角组列 $\{\xi_{ni}, 1\leq i\leq k_n\}$, $k_n\to\infty$, 定义:

$$\overline{\rho}_{nk}^*=\sup\{\rho(\sigma(\xi_{ni}, i\in S), \sigma(\xi_{nj}, j\in T), \text{非空子集 } S,T\subset\{1,2,\cdots,k_n\}, \mathrm{dist}(S,T)\geq k\};$$

$$\overline{\rho}_k^*=\sup_n \overline{\rho}_{nk}^*.$$

ρ- 混合的概念是由 Kolmogorov 和 Rozanov[1] 引入的. ρ- 混合序列的性质得到广泛的研究. 系统的结果参见陆传荣和林正炎 [2]. ρ^*- 混合的概念是由 Bradley[3] 引入的. 从定义来看，ρ^*- 混合比 ρ- 混合稍强. 但一些常见的 ρ- 混合序列 (如 m 相依序列) 都是 ρ^*- 混合序列. 而且在讨论 ρ^*- 混合序列时，对混合系数的收敛速度几乎不要加什么条件. 因此一些文献 (如 [4] [5] [6] [7] 等) 中反而将 ρ^*- 混合称为弱混合. 近十多年来，ρ^*- 混合序列的性质也得到了大量的研究 (参见 [4] [5] [6] [7] [8] [9] 等).

Peligrad[5] 曾给出如下的中心极限定理:

* 国家自然科学基金资助项目 (10471126).

本文 2004 年 12 月 20 日收到.

定理 A 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为强混合严平稳随机变量序列， $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 < \infty$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n^* < 1$, $\sigma_n^2 = \mathsf{Var}\, S_n \to \infty$, 则

$$\frac{S_n}{\sigma_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1), \qquad n \to \infty.$$

由 Peligrad[6] 知，当进一步有 $\rho_n^* \to 0$ 时， $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^2/n = \sigma^2 > 0$, 此时结合定理 A, 有

$$S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,\sigma^2). \tag{1.1}$$

在 (1.1) 中， σ^2 是未知的，当 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为独立随机变量序列时， σ^2 即为 X_n 的方差．为使 (1.1) 式得到实际的运用，我们需要对 σ^2 进行估计．至今为止已有许多估计方差的方法，最常用的估计为样本方差 $[1/(n-1)] \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$, 其中 $\overline{X} = (1/n) \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. 当序列为相依时样本方差不是 σ^2 的相合估计．但是当序列为平稳序列时，在一定的条件下常常有

$$\mathsf{Var}\left\{\frac{S_l}{\sqrt{l}}\right\} \longrightarrow \sigma^2, \qquad l \to \infty.$$

也就是说，当 l 充分大时， $S_l/\sqrt{l}$ 的方差是 σ^2 的近似．而 $S_l/\sqrt{l}$ 之方差的一个自然估计是

$$B_{n,2}^2 = \frac{1}{n-l+1} \sum_{j=0}^{n-l} \left(\frac{S_j(l) - l\overline{X}_n}{\sqrt{l}}\right)^2,$$

其中 $\{l_n, n \geq 1\}$ 为一列正整数， $1 \leq l = l_n \leq n$, $\{l_n, n \geq 1\}$ 为一列正整数， $S_j(k) = \sum\limits_{i=j+1}^{j+k} X_i$, $S(k) = S_0(k)$, $\overline{X}_n = (1/n) \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. $B_{n,2}^2$ 是样本 $\{S_j(l)/\sqrt{l}; j = 0, 1, \cdots, n-l\}$ 的样本方差．

一般地， Peligrad 和 Shao[10] 给出了 σ^2 的如下估计：对 $p \geq 1$, 记 $c_p = 1/(\mathsf{E}|N(0,1)|^p) = 2^{-p/2}\sqrt{\pi}/\Gamma((p+1)/2)$, $\mathsf{E}X_i = \mu$. 定义：

$$B_{n,p}^p = \frac{c_p}{n-l+1} \sum_{j=0}^{n-l} \left(\frac{|S_j(l) - l\overline{X}_n|}{\sqrt{l}}\right)^p, \tag{1.2}$$

$$\widehat{B}_{n,p}^p = \frac{c_p}{n-l+1} \sum_{j=0}^{n-l} \left(\frac{|S_j(l) - l\mu|}{\sqrt{l}}\right)^p. \tag{1.3}$$

Peligrad 和 Shao[10] 对于平稳 ρ- 混合序列的情况，给出了 $B_{n,p}$ 及 $\widehat{B}_{np}$ 是 σ 的相合估计，并给出了它们的渐近正态性．Zhang[11], Zhang 和 Shi[12] 研究了平稳 LNQD 及 NA 的情况．本文要研究的是 ρ^*- 混合随机变量序列．在本文的主要定理中，都有 $\rho_n^* \to 0$ 的条件，因此为行文方便，下面称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 ρ^*- 混合的，若 $\rho_n^* \to 0$. 记 C 为常数，在不同的地方可代表不同的值．主要结果如下：

定理 1 令 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为严平稳 ρ^*- 混合随机变量序列， $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^{2\vee p} < \infty$, $p \geq 1$, $\sigma_n^2 \to \infty$, $n \to \infty$. 令

$$l = l_n \to \infty, \qquad l = o(n), \qquad n \to \infty. \tag{1.4}$$

则

$$B_{n,p} \xrightarrow{L^2} \sigma, \qquad n \to \infty, \tag{1.5}$$

$$\frac{S_n}{\sqrt{n} B_{n,p}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1), \qquad n \to \infty. \tag{1.6}$$

定理 2 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是严平稳 ρ^*- 混合随机变量序列．$\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}|X_1|^{2p} < \infty$, $p \geq 1$, $\sigma_n^2 \to \infty$, $n \to \infty$. 且 (1.4) 成立．则

$$\sqrt{\frac{n}{l}}(\widehat{B}_{n,p} - (\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p}) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2 A_p). \tag{1.7}$$

另外，当 $p > 1$ 时，有

$$\sqrt{\frac{n}{l}}(B_{n,p} - (\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p}) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2 A_p). \tag{1.8}$$

并且 (1.7), (1.8) 中的 $\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p$ 可以由 $\mathsf{E}B_{n,p}^p$, $(\mathsf{E}B_{n,p})^p$, $(\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p})^p$ 来代替．其中

$$A_p = 2(c_p/p)^2 \int_0^1 \mathsf{Cov}\{|W(1)|^p, |W(1+t) - W(t)|^p\} \mathrm{d}t,$$

$\{W(t), t \geq 0\}$ 是标准 Wiener 过程．

定理 1 给出了 $B_{n,p}$ 和 $\widehat{B}_{n,p}$ 的相合性．定理 2 给出了它们的渐近正态性．但是由定理 2, 还不能直接给出是 σ 的置信区间，因为 $(\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p}$ 等只是 σ 的近似．要给出 σ 的置信区间还要知道这些量收敛于 σ 的速度．以 $p = 2$ 为例，由 (1.7) 和 (1.8) 可以给出 $\sqrt{\mathsf{Var}\{S_l/\sqrt{l}\}}$ 的置信区间．如果还有

$$\sum_{j=2}^{\infty} j|\mathsf{Cov}\{X_1, X_j\}| < \infty,$$

则容易证明

$$\mathsf{Var}\left\{\frac{S_l}{\sqrt{l}}\right\} = \sigma^2 + o\Big(\frac{1}{l}\Big) \qquad \text{和} \qquad \sqrt{\mathsf{Var}\left\{\frac{S_l}{\sqrt{l}}\right\}} = \sigma + o\Big(\frac{1}{l}\Big).$$

若取 l 使得 $l/n \to 0$, $n/l^3 = O(1)$, 则由 (1.7) 和 (1.8) 有

$$\sqrt{\frac{n}{l}}(\widehat{B}_{n,2} - \sigma) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\Big(0, \frac{\sigma^2}{3}\Big) \tag{1.9}$$

和

$$\sqrt{\frac{n}{l}}(B_{n,2} - \sigma) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\Big(0, \frac{\sigma^2}{3}\Big). \tag{1.10}$$

由 (1.9) 或 (1.10) 可以构造 σ 的置信区间．一般地，只要适当地选取 $l = l_n$ 可使得当 $(\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p}$ 用 σ 代替后， (1.7) 和 (1.8) 仍成立，但 l 的选取与 ρ^*- 混合系数的收敛速度有关．

注 在 ρ- 混合情形， Peligrad 和 Shao[10] 只对 $p = 2$ 时给出了 (1.8) 式的证明．事实上，按本文的方法，在 ρ- 混合情形 (1.8) 式在 Peligrad 和 Shao[10] 一文中定理 1.2 的条件下对任意 $p > 1$ 都成立．

§2. 主要结果的证明

在给出主要结果的证明之前，先给出如下引理.

引理 1[7] 设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 为一随机变量序列, $\mathsf{E}X_i=0$, $\mathsf{E}|X_i|^p<\infty$, $p\geq 2$, 对正整数 $N\geq 1$ 及 $0\leq r<1$, 有 $\rho_N^*\leq r$, 则存在正常数 $D_p=D(p,N,r)$, 使得对所有 $n\geq 1$, 有

$$\mathsf{E}\max_{1\leq i\leq n}\Big|\sum_{j=1}^{i}X_j\Big|^p\leq D_p\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}|X_i|^p+\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}X_i^2\Big)^{p/2}\Big).$$

引理 2 设 $\{X_n, n\geq 1\}$ 为一 ρ^*- 混合随机变量序列. $\{m_n, n\geq 1\}$ 为一整数列, $1\leq m_n\leq n$, f_j 为 R^{m_n} 上的实值 Borel 可测函数. 记 $Z_j=f_j(X_{j+1},\cdots,X_{j+m_n})$, 令 $p\geq 2$, 则存在 $D_p=D(p)$, 使得

$$\mathsf{E}\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{j=1}^{k}(Z_j-\mathsf{E}Z_j)\Big|^p\leq D_p(nm_n)^{p/2}\max_{1\leq j\leq n}\mathsf{E}|Z_j-\mathsf{E}Z_j|^p.$$

证明: 不失一般性, 假设 $\mathsf{E}Z_j=0$. 当 $j>n$ 时, 令 $Z_j=0$. 则

$$\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{j=1}^{k}Z_j\Big|\leq\sum_{m=0}^{m_n}\max_{1\leq j\leq n/m_n}\Big|\sum_{i=1}^{j}Z_{mm_n+i}\Big|.$$

则由引理 1, 可得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{j=1}^{k}Z_j\Big|^p &\leq m_n^p\max_{0\leq m\leq m_n}\Big(\mathsf{E}\max_{1\leq j\leq n/m_n}\Big|\sum_{i=1}^{j}Z_{mm_n+i}\Big|^p\Big)\\ &\leq m_n^pD_p\Big\{\frac{n}{m_n}\max_{1\leq j\leq n}\mathsf{E}|Z_j|^p+\Big(\frac{n}{m_n}\max_{1\leq j\leq n}\mathsf{E}Z_j^2\Big)^{p/2}\Big\}\\ &\leq D_p(nm_n)^{p/2}\max_{1\leq j\leq n}\mathsf{E}|Z_j|^p.\end{aligned}$$

证毕. #

引理 3[5] 令 $\{\xi_{ni}, 1\leq i\leq k_n\}$ 为一三角随机变量组列, $\mathsf{E}\xi_{ni}=0$, $\mathsf{E}\xi_{ni}^2<\infty$. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\rho}_n^*=0$, 定义 $\tau_n^2=\mathsf{Var}\Big(\sum\limits_{i=1}^{k_n}\xi_{ni}\Big)$, 且假设

$$\sup_n\frac{1}{\tau_n^2}\sum_{i=1}^{k_n}\mathsf{E}\xi_{ni}^2<\infty,$$

并对 $\forall\varepsilon>0$, 有

$$\frac{1}{\tau_n^2}\sum_{i=1}^{k_n}\mathsf{E}\xi_{ni}^2I(|\xi_{ni}|>\varepsilon\tau_n)\longrightarrow 0,\qquad n\to\infty.$$

则有

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k_n}\xi_{ni}}{\tau_n}\xrightarrow{\mathcal{D}}N(0,1),\qquad n\to\infty.$$

引理 4[4] 假设 $0\leq r<1$, $\{X_n, n\geq 1\}$ 为一随机变量序列, $\mathsf{E}X_i=0$, $\mathsf{E}X_i^2<\infty$, 且对每一非空子集 $S\subset\{1,2,\cdots,n\}$, $S^*=\{1,2,\cdots,n\}-S$, 有 $\mathrm{corr}\Big(\sum\limits_{k\in S}X_k,\sum\limits_{k\in S^*}X_k\Big)\leq r$, 则

$$\frac{1-r}{1+r}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}X_k^2\leq\mathsf{E}\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k\Big)^2\leq\frac{1+r}{1-r}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}X_k^2.$$

下面给出本文所要论证的主要定理.

定理 1 的证明: (1.6) 是 (1.5) 的直接结果，只需证 (1.5). 先证

$$\Big\{\Big(\frac{|S(n)|}{\sqrt{n}}\Big)^p, n\ge 1\Big\}\text{是一致可积的}.$$

令 $\Omega_A=\{|S(n)|/\sqrt{n}>A\}$. 则由引理 1 知

$$\mathsf{P}(\Omega_A)\le\frac{1}{A^2}\mathsf{E}\Big|\frac{S(n)}{\sqrt{n}}\Big|^2\le\frac{n\mathsf{E}|X_1|^2}{A^2n}\longrightarrow 0,\qquad A\to\infty.$$

记 $X_{i1}=X_iI(|X_i|\le B)$, $X_{i2}=X_iI(|X_i|>B)$, 其中 $B>0$. 因此由 Holder 不等式及引理 1, 可得

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\Big|\frac{S(n)}{\sqrt{n}}\Big|^pI_{\Omega_A}&\le 2^p\mathsf{E}\Big|\frac{\sum\limits_{i=1}^n(X_{i1}-\mathsf{E}X_{i1})}{\sqrt{n}}\Big|^pI_{\Omega_A}+2^p\mathsf{E}\Big|\frac{\sum\limits_{i=1}^n(X_{i2}-\mathsf{E}X_{i2})}{\sqrt{n}}\Big|^pI_{\Omega_A}\\&\le 2^p\Bigg(\mathsf{E}\Big|\frac{\sum\limits_{i=1}^n(X_{i1}-\mathsf{E}X_{i1})}{\sqrt{n}}\Big|^{2p}\Bigg)^{1/2}\mathsf{P}^{1/2}(\Omega_A)+2^p\mathsf{E}\Big|\frac{\sum\limits_{i=1}^n(X_{i2}-\mathsf{E}X_{i2})}{\sqrt{n}}\Big|^p\\&\le D_p(\mathsf{E}|X_{11}-\mathsf{E}X_{11}|^{2p})^{1/2}\mathsf{P}^{1/2}(\Omega_A)+D_p\mathsf{E}|X_{12}-\mathsf{E}X_{12}|^p\\&\le D_p(B^p\mathsf{P}^{1/2}(\Omega_A)+\mathsf{E}|X_1|^pI(|X_1|\ge B)).\end{aligned}$$

因此

$$\limsup_{A\to\infty}\sup_{n\ge1}\mathsf{E}\Big|\frac{S(n)}{\sqrt{n}}\Big|^pI\Big(\Big|\frac{S(n)}{\sqrt{n}}\Big|\ge A\Big)\le D_p\mathsf{E}|X_1|^pI(|X_1|\ge B)\longrightarrow 0,\qquad B\to\infty.$$

所以 $\{(|S(n)|/\sqrt{n})^p,n\ge1\}$ 是一致可积的.

注意到 $l=l_n=o(n)$, $n\to\infty$, 则由引理 1, 有

$$\mathsf{E}|B_{n,p}-\widehat{B}_{n,p}|^2\le c_p^{2/p}\mathsf{E}(\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n)^2=\frac{lc_p^{2/p}}{n^2}n\mathsf{E}|X_1|^2\longrightarrow 0.$$

因此只需证 $\widehat{B}_{n,p}\xrightarrow{L^2}\sigma$, $n\to\infty$. 注意到 $\{(|S(n)|/\sqrt{n})^p,n\ge1\}$ 是一致可积的，由 (1.1) 知

$$c_p\Big(\mathsf{E}\frac{|S(l)|}{\sqrt{l}}\Big)^p\longrightarrow\sigma^p,\qquad l\to\infty.\tag{2.1}$$

首先我们来证

$$\mathsf{E}\Big|\widehat{B}_{n,p}^p-c_p\mathsf{E}\Big(\frac{|S(l)|}{\sqrt{l}}\Big)^p\Big|^{2/p}\longrightarrow 0,\qquad l\to\infty.\tag{2.2}$$

记:

$$Y_{j,1}=\Big(\frac{|S_j(l)|}{\sqrt{l}}\Big)^pI\Big(\Big|\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big|^p\le\Big(\frac{n}{l}\Big)^{1/4}\Big),\qquad Y_{j,2}=\Big(\frac{|S_j(l)|}{\sqrt{l}}\Big)^pI\Big(\Big|\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big|^p>\Big(\frac{n}{l}\Big)^{1/4}\Big).$$

则

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{E}\Big|\widehat{B}_{n,p}^{p} - c_p \mathsf{E}\Big(\frac{|S(l)|}{\sqrt{l}}\Big)^{p}\Big|^{2/p} \\
= \ & \mathsf{E}\Big|\frac{c_p}{n-l+1}\sum_{j=0}^{n-l}\Big(\frac{|S_j(l)|}{\sqrt{l}}\Big)^{p} - \frac{c_p}{n-l+1}\sum_{j=0}^{n-l}\mathsf{E}\Big(\frac{|S_j(l)|}{\sqrt{l}}\Big)^{p}\Big|^{2/p} \\
\le \ & \Big(\frac{c_p}{n-l+1}\Big)^{2/p}\mathsf{E}\Big|\sum_{j=0}^{n-l}(Y_{j,1}-\mathsf{E}Y_{j,1}) + \sum_{j=0}^{n-l}(Y_{j,2}-\mathsf{E}Y_{j,2})\Big|^{2/p} \\
\le \ & Cn^{-2/p}\Big\{\mathsf{E}\Big|\sum_{j=0}^{n-l}(Y_{j,1}-\mathsf{E}Y_{j,1})\Big|^{2/p} + \mathsf{E}\Big|\sum_{j=0}^{n-l}(Y_{j,2}-\mathsf{E}Y_{j,2})\Big|^{2/p}\Big\} \\
\le \ & C\Big\{\Big(n^{-2}\mathsf{E}\Big(\sum_{j=0}^{n-l}Y_{j,1} - \mathsf{E}\sum_{j=0}^{n-l}Y_{j,1}\Big)^2\Big)^{1/p} + \mathsf{E}\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-l}(Y_{j,2}-\mathsf{E}Y_{j,2})\Big|^{2/p}\Big\} \\
=: \ & I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

由引理 2 有

$$
\begin{aligned}
I_1^p \ & \le \ Cn^{-2}\mathsf{E}\Big(\sum_{j=0}^{n-l}Y_{j,1} - \mathsf{E}\sum_{j=0}^{n-l}Y_{j,1}\Big)^2 \le Cn^{-2}nl\mathsf{E}(Y_{0,1}-\mathsf{E}Y_{0,1})^2 \\
& \le \ C\frac{l}{n}\Big(\frac{n}{l}\Big)^{1/2} = C\Big(\frac{l}{n}\Big)^{1/2} \longrightarrow 0, \qquad n\to\infty.
\end{aligned}
$$

当 $1\le p\le 2$ 时，由有界收敛定理，$\forall M>0$,

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} I_2 \ & \le \ C\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=0}^{n-l}\mathsf{E}|Y_{j,2}|^{2/p}}{n} \le C\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}|Y_{0,2}|^{2/p} \\
& \le \ C\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\Big(\frac{|S(l)|}{\sqrt{l}}\Big)^2 I\Big(\Big|\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\Big| > \Big(\frac{n}{l}\Big)^{1/(4p)}\Big) \\
& \le \ C\sigma^2\limsup_{n\to\infty}\mathsf{E}\Big(\frac{|S(l)|}{\sigma\sqrt{l}}\Big)^2 I\Big(\Big|\frac{S(l)}{\sigma\sqrt{l}}\Big| > \frac{1}{\sigma}\Big(\frac{n}{l}\Big)^{1/(4p)}\Big) \\
& = \ C\sigma^2\limsup_{n\to\infty}\Big[\frac{\sigma_l^2}{\sigma^2 l} - \mathsf{E}\Big(\frac{|S(l)|}{\sigma\sqrt{l}}\Big)^2 I\Big(\Big|\frac{S(l)}{\sigma\sqrt{l}}\Big| \le \frac{1}{\sigma}\Big(\frac{n}{l}\Big)^{1/(4p)}\Big)\Big] \\
& \le \ C\sigma^2\limsup_{n\to\infty}\Big[\frac{\sigma_l^2}{\sigma^2 l} - \mathsf{E}\Big(\frac{|S(l)|}{\sigma\sqrt{l}}\Big)^2 I\Big(\Big|\frac{S(l)}{\sigma\sqrt{l}}\Big| \le M\Big)\Big] \\
& = \ C\sigma^2[1-\mathsf{E}N^2 I(|N|\le M)] \\
& = \ C\sigma^2\mathsf{E}N^2 I(|N|>M)),
\end{aligned}
$$

其中 N 为标准正态随机变量. 因此

$$
I_2 \longrightarrow 0, \qquad n\to\infty. \tag{2.4}
$$

当 $p>2$ 时，由 Holder 不等式及 $\{(|S(n)|/\sqrt{n})^p, n\ge 1\}$ 一致可积知

$$
\begin{aligned}
I_2 \ & \le \ C\Big(\frac{1}{n}\mathsf{E}\Big|\sum_{j=0}^{n-l}Y_{j,2}\Big|\Big)^{2/p} \le C(\mathsf{E}|Y_{0,2}|)^{2/p} \\
& \le \ C\Big(\mathsf{E}\Big(\frac{|S(l)|}{\sqrt{l}}\Big)^p I\Big(\Big|\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\Big| > \Big(\frac{n}{l}\Big)^{1/(4p)}\Big)^{2/p} \longrightarrow 0, \qquad n\to\infty.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

综合 (2.3), (2.4), (2.5) 知 (2.2) 成立.

又对每一 $p\ge 1$, 存在 $C>0$, 使得对任意 $x,y\ge 0$, 有 $|x-y|^2\le C|x^p-y^p|^{2/p}$. 因此有

$$\mathsf{E}\Big|\widehat{B}_{n,p}-\Big(C_p\mathsf{E}\Big(\frac{|S(l)|}{\sqrt{l}}\Big)^p\Big)^{1/p}\Big|^2\le C\mathsf{E}\Big|\widehat{B}_{n,p}-C_p\mathsf{E}\Big(\frac{|S(l)|}{\sqrt{l}}\Big)^p\Big|^{2/p}\longrightarrow 0.$$

再结合 (2.1) 知, 定理得证. #

定理 2 的证明: 类似定理 1 中的证明知 $\{|S(l)/\sqrt{l}|^{2p}, l\ge 1\}$ 是一致可积的. 记

$$f(x)=|x|^p,\qquad D_n=\frac{1}{n-l+1}\sum_{j=0}^{n-l}f\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big).$$

下面证明

$$\sqrt{\frac{n}{l}}\Big(D_n-\mathsf{E}f\Big(\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big)\xrightarrow{\mathcal{D}}N(0,\sigma_f^2),\tag{2.6}$$

其中

$$\sigma_f^2=2\int_0^1\mathsf{Cov}\,(f(\sigma W(1)),f(\sigma(W(1+t)-W(t))))\mathrm{d}t.$$

由于 $\{f^2(S(l)/\sqrt{l})\}$ 一致可积, 则可找到一列正整数 $\{r_n,n\ge 1\}$, 使得

$$l=o(r),\tag{2.7}$$

$$(r/l)\mathsf{E}f^2(S(l)/\sqrt{l})I\{|f(S(l)/\sqrt{l})|\ge (n/l)^{1/8}\}=o(1),\tag{2.8}$$

$$r\le l(n/l)^{1/4},\tag{2.9}$$

$$(r/l)\rho^*(l^{1/2})=o(1),\tag{2.10}$$

其中 $r=r_n$. 记:

$$\xi_{m,n}=\sum_{j=m(2l+r)}^{m(2l+r)+r-1}\Big(f\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)-\mathsf{E}f\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big),$$

$$\eta_{m,n}=\sum_{j=m(2l+r)+r}^{(m+1)(2l+r)-1}\Big(f\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)-\mathsf{E}f\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big),$$

其中 $m=0,1,\cdots,k_n$, $k_n=[(n-l+1)/(2l+r)]-1$. 则有

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{n}{l}}\Big(D_n-\mathsf{E}f\Big(\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big)\\
=\;&\sqrt{\frac{n}{l}}\frac{1}{n-l+1}\sum_{j=0}^{n-l}\Big(f\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)-\mathsf{E}f\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big)\\
=\;&\sqrt{\frac{n}{l}}\frac{1}{n-l+1}\sum_{m=0}^{k_n}\xi_{m,n}+\sqrt{\frac{n}{l}}\frac{1}{n-l+1}\sum_{m=0}^{k_n}\eta_{m,n}\\
&+\sqrt{\frac{n}{l}}\frac{1}{n-l+1}\sum_{j=(k_n+1)(2l+r)}^{n-l}\Big(f\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)-\mathsf{E}f\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big)\\
=:\;&I_{1,n}+I_{2,n}+I_{3,n}.
\end{aligned}\tag{2.11}$$

由 (2.7) 及引理 2, 有

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}\, I_{2,n} &\leq C\frac{1}{nl}k_n \max_{m\leq k_n} \mathsf{E}\eta_{m,n}^2 \leq C\frac{1}{nl}k_n l^2 \mathsf{E} f^2\Big(\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\Big) \\ &\leq C\frac{1}{nl}\frac{n}{r}l^2 \leq C\frac{l}{r} \longrightarrow 0, \qquad n\to\infty. \end{aligned} \tag{2.12}$$

由 (2.9) 及引理 2, 有

$$\mathsf{Var}\, I_{3,n} \leq C\frac{1}{nl} rl \mathsf{E} f^2\Big(\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\Big) \leq C(\frac{l}{n})^{3/4} \longrightarrow 0, \qquad n\to\infty. \tag{2.13}$$

因此只须证

$$I_{1,n} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,\sigma_f^2).$$

由于

$$\max_{1\leq m<k_n} \max_{i\leq k_n-m} \Big|\mathrm{corr}\Big(\frac{1}{\sqrt{nl}}\xi_{i,n}, \frac{1}{\sqrt{nl}}\xi_{i+m,n}\Big)\Big| \leq \rho^*(l) \longrightarrow 0, \qquad n\to\infty.$$

在引理 4 中取 $r=\rho^*(l)$, 可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{E}\Big(\sum\limits_{m=0}^{k_n} \frac{\xi_{m,n}}{\sqrt{nl}}\Big)^2}{\sum\limits_{m=0}^{k_n} \mathsf{E}\Big(\frac{\xi_{m,n}}{\sqrt{nl}}\Big)^2} = 1.$$

因此由引理 3 知只须证

$$\frac{1}{nl}\sum_{m=0}^{k_n} \mathsf{E}\xi_{m,n}^2 \longrightarrow \sigma_f^2 \tag{2.14}$$

及

$$\frac{1}{nl}\sum_{m=0}^{k_n} \mathsf{E}\xi_{m,n}^2 I\{|\xi_{m,n}|\geq \varepsilon\sqrt{nl}\} \longrightarrow 0, \qquad n\to\infty,\ \forall\varepsilon>0. \tag{2.15}$$

类似于 Peligrad 和 shao[10] 的证明可知 (2.14), (2.15) 成立. 从而由 (2.11)-(2.15) 知: (2.6) 得证. 因此

$$\sqrt{\frac{n}{l}}(\widehat{B}_{n,p}^p - \mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,\Sigma_p^2),$$

其中

$$\Sigma_p^2 = 2c_p^2\sigma^{2p}\int_0^1 \mathsf{Cov}\,\{|W(1)|^p, |W(1+t)-W(t)|^P\}\mathrm{d}t.$$

由定理 1 的证明知

$$\widehat{B}n,p \xrightarrow{P} \sigma.$$

则有

$$\frac{\widehat{B}_{n,p} - (\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p}}{\widehat{B}_{n,p}^p - \mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p} = \frac{\widehat{B}_{n,p}/(\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p}-1}{\{\widehat{B}_{n,p}/(\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p}\}^p-1}\cdot\frac{1}{(\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{(p-1)/p}} \xrightarrow{P} \frac{1}{p\sigma^{p-1}}. \tag{2.16}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{n}{l}}(\widehat{B}_{n,p}-(\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p}) \\
=\ &\sqrt{\frac{n}{l}}(\widehat{B}_{n,p}^p-\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)\cdot\frac{\widehat{B}_{n,p}-(\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p}}{\widehat{B}_{n,p}^p-\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p}\xrightarrow{\mathcal{D}}N(0,\sigma^2A_p).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

(1.7) 得证. 下面再证 (1.8). 令:

$$A_n=\frac{1}{\sqrt{nl}}\sum_{j=0}^{n-l}\Big\{f\Big(\frac{S_j(l)-l\overline{X}_n}{\sqrt{l}}\Big)-f\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)+\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n\sigma^{p-1}\mathsf{E}f'(N)\Big\}.$$

下面要证

$$A_n\xrightarrow{L^1}0,\qquad n\to\infty. \tag{2.18}$$

只须证 $f(x)=(x^+)^p$ 的情况. 首先假设 $p\geq 2$. 注意到 $f'(x)=p(x^+)^{p-1}$, $f''(x)=p(p-1)(x^+)^{p-2}$, 及 $f(x+y)=f(x)+yf'(x)+(y^2/2)f''(x+\theta y)$, $|\theta|\leq 1$. 则有

$$\begin{aligned}
A_n\ =\ &\frac{1}{\sqrt{nl}}\sum_{j=0}^{n-l}\Big\{f\Big(\frac{S_j(l)-l\overline{X}_n}{\sqrt{l}}\Big)-f\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)+\sqrt{l}\cdot\overline{X}_nf'\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big\} \\
&+\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n\frac{1}{\sqrt{nl}}\sum_{j=0}^{n-l}\Big\{\mathsf{E}f'\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)-f'\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big\} \\
&+\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n\frac{n-l+1}{\sqrt{nl}}\Big\{\sigma^{p-1}\mathsf{E}f'(N)-\mathsf{E}f'\Big(\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big\} \\
=\ &\frac{1}{\sqrt{nl}}\frac{(\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n)^2}{2}\sum_{j=0}^{n-l}f''\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}+\theta_j\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n\Big) \\
&+\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n\frac{1}{\sqrt{nl}}\sum_{j=0}^{n-l}\Big\{\mathsf{E}f'\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)-f'\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big\} \\
&+\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n\frac{n-l+1}{\sqrt{nl}}\Big\{\sigma^{p-1}\mathsf{E}f'(N)-\mathsf{E}f'\Big(\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big\} \\
=:\ &A_1+A_2+A_3\qquad \text{其中 } |\theta_j|<1.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

由引理 2, $(2p)/(p-1)\geq 2$, 及 Holder 不等式知

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}|A_2|\ \leq\ &\big\|\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n\big\|_p\cdot\Big\|\frac{1}{\sqrt{nl}}\sum_{j=0}^{n-l}\Big\{\mathsf{E}f'\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)-f'\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big\}\Big\|_{p/(p-1)} \\
\leq\ &\sqrt{\frac{l}{n}}\Big\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Big\|_p\cdot\Big\|\frac{1}{\sqrt{nl}}\sum_{j=0}^{n-l}\Big\{\mathsf{E}f'\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)-f'\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big\}\Big\|_{2p/(p-1)} \\
\leq\ &C\sqrt{\frac{l}{n}}\|X_1\|_p\cdot\Big\|f'\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big\|_{2p/(p-1)} \\
\leq\ &C\sqrt{\frac{l}{n}}\Big\|\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\Big\|_{2p}^{p-1}\leq C\sqrt{\frac{l}{n}}\longrightarrow 0,\qquad n\to\infty.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

注意到

$$\mathsf{E}f'\Big(\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\Big)\longrightarrow\sigma^{p-1}\mathsf{E}f'(N),$$

及

$$\mathsf{E}\Big|\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n\frac{n-l+1}{\sqrt{nl}}\Big|\le C\mathsf{E}\Big|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Big|\le C(\mathsf{E}X_1^2)^{1/2}.$$

因此有

$$\mathsf{E}|A_3|\longrightarrow 0. \tag{2.21}$$

最后，注意到 $|f''(x+\theta y)|\le C(f''(x)+|y|^{p-2})$, 则有

$$\begin{aligned}
|A_1| &\le C(\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n)^2\frac{1}{\sqrt{nl}}\sum_{j=0}^{n-l}\Big\{f''\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)+|\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n|^{p-2}\Big\}\\
&\le C|\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n|^p\frac{n-l+1}{\sqrt{nl}}+C(\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n)^2\frac{n-l+1}{\sqrt{nl}}\mathsf{E}f''\Big(\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\Big)\\
&\quad +C(\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n)^2\frac{1}{\sqrt{nl}}\sum_{j=0}^{n-l}\Big\{f''\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)-\mathsf{E}f''\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big\}\\
&=: A_{11}+A_{12}+A_{13}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

由引理 1

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}|A_{11}| &\le C\sqrt{\frac{n}{l}}\cdot\Big(\frac{l}{n}\Big)^{p/2}\mathsf{E}\Big|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Big|^p\le C\Big(\frac{l}{n}\Big)^{(p-1)/2}\cdot n^{-p/2}\big[n\mathsf{E}|X_1|^p+(n\mathsf{E}X_1^2)^{p/2}\big]\\
&= C\Big\{\Big(\frac{l}{n}\Big)^{(p-1)/2}\cdot n^{1-p/2}\mathsf{E}|X_1|^p+\Big(\frac{l}{n}\Big)^{(p-1)/2}(\mathsf{E}X_1^2)^{p/2}\Big\}\longrightarrow 0. \qquad (2.23)\\
\mathsf{E}|A_{12}| &\le C\mathsf{E}\Big|\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\Big|^{p-2}\sqrt{\frac{l}{n}}\mathsf{E}\Big|\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\Big|^2\\
&\le C\Big(\mathsf{E}\Big|\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\Big|^p\Big)^{(p-2)/p}\sqrt{\frac{l}{n}}\mathsf{E}X_1^2\le C\sqrt{\frac{l}{n}}\longrightarrow 0,\qquad n\to\infty. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

与 (2.20) 类似可得

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}|A_{13}| &\le \big\|(\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n)^2\big\|_{p/2}\cdot\Big\|\frac{1}{\sqrt{nl}}\sum_{j=0}^{n-l}\Big\{f''\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)-\mathsf{E}f''\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big\}\Big\|_{p/(p-2)}\\
&\le C\frac{l}{n}\longrightarrow 0,\qquad n\to\infty.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

则由 (2.19)–(2.25) 知： (2.18) 成立.

当 $1<p<2$ 时， $0<p-1<1$. 注意到 $|((x+y)^+)^{p-1}-(x^+)^{p-1}|\le|y^+|^{p-1}$, 及 $|f(x+y)-f(x)-yf'(x)|=|y||f'(x+\theta y)-f'(x)|\le|y|\cdot p\cdot|\theta y|^{p-1}\le p|y|^p$, 其中 $|\theta|\le 1$. 因此可得 $A_n=A_1^*+A_2+A_3$. 其中

$$\begin{aligned}
|A_1^*| &= \frac{1}{\sqrt{nl}}\Big|\sum_{j=0}^{n-l}\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n\Big\{f'\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}+\theta\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n\Big)-f'\Big(\frac{S_j(l)}{\sqrt{l}}\Big)\Big\}\Big|\\
&\le p\cdot\frac{n-l+1}{\sqrt{nl}}|\sqrt{l}\cdot\overline{X}_n|^p\le C\Big(\frac{l}{n}\Big)^{(p-1)/2}\Big|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Big|^p.
\end{aligned}$$

因此

$$\mathsf{E}|A_1^*|\le C\Big(\frac{l}{n}\Big)^{(p-1)/2}\Big(\mathsf{E}\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\Big)^2\Big)^{p/2}\le C\Big(\frac{l}{n}\Big)^{(p-1)/2}\longrightarrow 0,\qquad n\to\infty.$$

因此 (2.18) 对 $1<p<2$ 也成立. 对 $f(x)=|x|^p$ 同理可证.

而当 $f(x)=|x|^p$ 时, $f'(x)=p|x|^{p-1}\mathrm{sgn}x$. 则 $\mathsf{E}f'(N)=0$. 因此

$$\sqrt{\frac{n}{l}}\{B_{n,p}^p-\widehat{B}_{n,p}^p\}\xrightarrow{L^1}0. \tag{2.26}$$

则有 $\mathsf{E}B_{n,p}^p\longrightarrow\sigma^p$, $B_{n,p}\xrightarrow{L^1}\sigma$, 及 $\sqrt{n/l}(B_{n,p}^p-\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)\xrightarrow{\mathcal{D}}N(0,\Sigma_p^2)$. 因此

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{n}{l}}(B_{n,p}-\mathsf{E}(\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p})\\ =\ &\sqrt{\frac{n}{l}}(B_{n,p}^p-\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)\frac{B_{n,p}/(\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p}-1}{\{B_{n,p}/(\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p}\}^p-1}\cdot\frac{1}{(\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{(p-1)/p}}\\ \xrightarrow{\mathcal{D}}\ &N(0,\sigma^2A_p).\end{aligned} \tag{2.27}$$

(1.8) 得证. 又由 (2.26) 知 $\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p$ 可由 $\mathsf{E}B_{n,p}^p$ 代替. 为证 $(\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p}$ 可由 $\mathsf{E}B_{n,p}$ 和 $\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}$ 代替, 只须证

$$\left\{\sqrt{\frac{n}{l}}(\widehat{B}_{n,p}-(\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p})\right\}\quad\text{与}\quad\left\{\sqrt{\frac{n}{l}}(B_{n,p}-(\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)^{1/p})\right\}\text{一致可积}.$$

注意到 (2.16), (2.17), (2.27) 及 $(x-1)/(x^p-1)$ 是有界函数, 只须证

$$\left\{\sqrt{\frac{n}{l}}(\widehat{B}_{n,p}^p-\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)\right\}\quad\text{与}\quad\left\{\sqrt{\frac{n}{l}}(B_{n,p}^p-\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)\right\}\text{一致可积}.$$

又由 (2.26) 知, 只须证

$$\left\{\sqrt{\frac{n}{l}}(\widehat{B}_{n,p}^p-\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)\right\}\text{一致可积}.$$

而

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left\{\sqrt{\frac{n}{l}}(\widehat{B}_{n,p}^p-\mathsf{E}\widehat{B}_{n,p}^p)\right\}^2&\le C\mathsf{E}\left(\frac{S(l)}{\sqrt{l}}\right)^{2p}\le C(l^{-p})(l\mathsf{E}|X_1|^{2p}+(l\mathsf{E}X_1^2)^p)\\ &\le C(\mathsf{E}|X_1|^{2p}+(\mathsf{E}X_1^2)^p)<\infty.\end{aligned}$$

证毕. #

参 考 文 献

[1] Kolmogorov, A.N., Rozanov, U.A., On the strong mixing conditions of a stationary Gaussian process, *Probab. Theory Appl.*, **2**(1960), 222-227. (In Russian)

[2] 陆传荣, 林正炎, 混合相依变量的极限理论, 科学出版社, 北京, 1997.

[3] Bradley, R.C., Equivalent mixing conditions for random fields, *Technical Report No. 336: Center for Stochastic Processes*, Univ. of North Carolina, Chapel Hill, 1990.

[4] Bradley, R.C., On the spectral density and asymptotic normality of weakly dependent random fields, *J. Theor. Probab.*, **5**(1992), 355–373.

[5] Peligrad, M., On the asymptotic normality of sequences of weak dependent random variables, *J. Theoret. Probab.*, **9**(1996), 703–715.

[6] Peligrad, M., Maximum of partial dums and an invariance principle for a class of weak dependent random variables, *Proc. AMS.*, **126(4)**(1998), 181–1189.

[7] Utev, S., Peligrad, M., Maximal inequalities and an invariance principle for a class of weakly dependent random variables, *J. Theoret. Probab.*, **16(1)**(2003), 101–115.

[8] Zhang, L.X., Rosenthal type inequalities for B-valued strong mixing random fields and their applications, *Science in China*, **41(7)**(1998), 736–745.

[9] 张立新, B 值混合随机场的进一步矩不等式及强在数律, *应用数学学报*, **23(4)**(2000), 518–525.

[10] Peligrad, M., Shao, Q.M., Estimation of the variance of partial dums for ρ-mixing random variables, *J. Multiv. Anal.*, **52**(1995), 140–157.

[11] Zhang, L.X., The weak convergence for functions of negatively associated random variables, *J. Multi. Anal.*, **78**(2001), 272–298.

[12] Zhang, L.X., Shi, S.W., Self-normalized central limit theorem and estimation of variance of partial dums for negative dependent random variables, *Appl. Math. J. Chinese. Univ. Ser. B.*, **17(3)**(2002), 326–334.

Estimation of the Variance of Partial Sums for ρ^*-Mixing Random Variables

WANG CONG[1,2] ZHANG LIXIN[1]

([1] *Department of Mathematics of Zhejiang University, Hangzhou, 310028*)

([2] *Ningbo Municipal Bureau of Statistics, Ningbo, 315010*)

In this paper, we studied the estimation of the variance of partial sums for ρ^*-mixing random variables and obtained the consistency and the asymptotic normalities of the estimators of the variance.