应用概率统计　第二卷
第四期　1986年11月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 2. No. 4. Nov. 1986

多状态单调关联系统的可用度与不可用度的界

李　麟　雄
（华中师范大学）

§1　基本定义及符号

考虑一个由 n 个元件所构成的系统，并以集合 $C=\{1, 2, \cdots, n\}$ 表示构成系统的 n 个元件. 每个元件及系统都可取 $m+1$ 种状态，状态空间为 $S=\{0, 1, \cdots, m\}$. 其中"0"表示失效状态，"m"表示完好状态，其余表示随性能递增的各中间状态. 又以 S^n 表示 S 的 n 维乘积空间. 设 $X_i(t)$ 为元件 i 在时刻 t 的状态随机变量，$i=1, \cdots, n$. $X(t)=(X_1(t), \cdots, X_n(t))$ 为时刻 t 状态随机向量，$\Phi(X(t))$ 为时刻 t 系统的状态随机变量.

对向量 $x=(x_1, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, \cdots, y_n)$. 定义

$$x\geqslant y\Leftrightarrow\forall i,\ x_i\geqslant y_i;$$

$$x>y\Leftrightarrow x\geqslant y,$$

且至少存在某个 i 使 $x_i>y_i$. 又规定向量 $(\cdot_i, x)=(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, \cdot_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$. 以后用向量 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 和 n 元变量函数 $\Phi(x)$ 分别表示元件状态向量和系统状态函数.

定义 1.1　系统状态函数 Φ 称为单调关联结构函数，如果

（i）$\Phi(x)$ 关于每个分量非减；

（ii）$\Phi(0, \cdots, 0)=0$, $\Phi(m, \cdots, m)=m$;

（iii）$\forall i\in C$, 存在向量 $(\cdot_i, x)$, 使 $\Phi(0_i, x)<\Phi(m_i, x)$.

定义 1.2　具有元件集 C, 单调关联结构函数 Φ 的系统称为单调关联系统，记成 (C, Φ).

定义 1.3　设 $1\leqslant j\leqslant m$, 若向量 $\underline{x}$ 使 $\Phi(\underline{x})\geqslant(<)j$, 则称 $\underline{x}$ 为 Φ 的一个 j 路（割）向量；如果 x 不仅为一个 j 路（割）向量，并且 $\forall y<(>)x$, 有 $\Phi(y)<(>)j$, 则称 x 为 Φ 的一个最小 j 路（割）向量.

设 $x(P_1), \cdots, x(P_p)$ 和 $x(K_1), \cdots, x(K_k)$ 分别为 Φ 的最小 j 路向量和最小 j 割向量全体，分别定义系统 Φ 的第 r 个最小 j 路集和最小 j 割集为

$$E_r=\{i\,|\,x_i(P_r)\geqslant1\},\quad r=1, \cdots, p$$

和

$$D_r=\{i\,|\,x_i(K_r)<m\},\quad r=1, \cdots, k.$$

相应于 $x(P_r)$, $x(K_r)$ 的结构函数分别定义为

$$\rho_r(x)=I_{[x\geqslant x(P_r)]}=\prod_{i=1}^{n}I_{[x_i\geqslant x_i(P_r)]},\quad r=1, \cdots, p$$

本文1985年9月18日收到.

和 $$\beta_r(x)=I_{[x\notin x(K_r)]}=1-\prod_{i=1}^{n} I_{[x_i>x_i(K_r)]},\quad r=1,\ \cdots,\ k$$

定义 1.4 单调关联系统$(A_i,\ \chi_i)$, $i=1,\cdots,N$, 连同单调关联函数 Ψ 称为$(C,\ \Phi)$的一个模块分解(记为$(C,\ \Phi)\sim\{(A_i,\ \chi_i),\ 1\leqslant i\leqslant N,\ \Psi\})$, 如果

(i) $C=\bigcup_{i=1}^{N}A_i$, $A_i\cap A_j=$空集, $i\neq j$;

(ii) $\forall x\in S^n$, $\Phi(x)=\Psi(\chi_1(x^{A_1}),\ \cdots,\ \chi_N(x^{A_N}))$,

其中 x^{A_i} 为 x 中坐标属于 A_i 的那些分量所组成的向量, 每个 $(A_i,\ \chi_i)$ 称为 $(C,\ \Phi)$ 的一个模块.

定义 1.5 设 T 为一非负实数集. 称 n 个状态随机过程$\{X_i(t),\ t\in T\}$, $i=1,\ \cdots,\ n$ 在 T 中独立, 如果对任意自然数 R 和任意$\{t_1,\ \cdots,\ t_R\}\subset T$, 随机向量$(X_i(t_1),\ \cdots,\ X_i(t_R))$, $i=1,\ \cdots,\ n$ 是独立的, 称模块分解$(A_i,\ \chi_i)$, $i=1,\ \cdots,\ N$ 在 T 中独立, 如果对以上的 R 及$(t_1,\cdots,t_R)$, 随机向量$(X^{A_i}(t_1),\ \cdots,\ X^{A_i}(t_R))$, $i=1,\ \cdots,\ N$ 是独立的.

下面给出随机变量牵连的定义和某些基本性质, 其性质的证明见[1]:

定义 1.6 随机变量集$\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}$称为牵连的, 如果对任意两个非减示性函数(即关于每个分量都非减的示性函数)Γ_1, Γ_2, 有

$$\mathrm{Cov}(\Gamma_1(y_1,\ \cdots,\ y_n),\ \Gamma_2(y_1,\ \cdots,\ y_n))\geqslant 0$$

命题 1.1 设 $\mathscr{F}=\{y_1,\ \cdots,\ y_n\}$, $\mathscr{G}=\{z_1,\ \cdots,\ z_m\}$皆为牵连随机变量集, 则

(i) $\mathscr{F}$ 的任意非空子集仍为牵连的;

(ii) 若 $\mathscr{F}$ 与 $\mathscr{G}$ 独立, 则 $\mathscr{F}\cup\mathscr{G}$ 仍为牵连集;

(iii) 若函数 $f_i(x_1,\ \cdots,\ x_n)$关于每个分量非减, $i=1,\ \cdots,\ r$, 那么$\{f_i(y_1,\ \cdots,\ y_n),\ i=1,\cdots,\ r\}$是牵连的;

(iv) 对任意实数 $t_1,\ \cdots,t_n$,

$$P\{y_1>t_1,\ \cdots,\ y_n>t_n\}\geqslant\prod_{i=1}^{n}P\{y_i\geqslant t_i\},$$

$$P\{y_1\leqslant t_1,\ \cdots,\ y_n\leqslant t_n\}\geqslant\prod_{i=1}^{n}P\{y_i\leqslant t_i\}.$$

定义 1.7 随机过程$\{X_i(t),\ t\in T\}$, $i=1,\ \cdots,\ n$ 称为在 T 中牵连, 如果对任意自然数 R 及任意$\{t_1,\ \cdots,\ t_R\}\subset T$, 随机变量集$\{X_i(t_j),\ i=1,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ \cdots,\ R\}$是牵连的.

§2 元件与系统可用度

设组成系统的各个元件皆是可维修的, 元件状态随机变量 $X_i(t)$ 的样本函数关于 t 右连续, $i=1,\ \cdots,\ n$, 对 $1\leqslant j\leqslant m$, 元件 i 在 T 中的状态可用度与不可用度分别定义为

$$p_{ij}=P\{X_i(t)\geqslant j,\ \forall t\in T\}$$

与 $$q_{ij}=P\{X_i(t)<j,\ \forall t\in T\},\quad i=1,\ \cdots,\ n.$$

系统 Φ 在 T 中的状态 j 可用度与不可用度分别记为

$$h_{\Phi(j)}=P\{\Phi(X(t))\geqslant j,\ \forall t\in T\}$$

与 $$g_{\Phi(j)}=P\{\Phi(X(t))<j,\ \forall t\in T\}.$$

最后记
$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{1m} & p_{2m} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}=(\mathbb{P}_1,\ \cdots,\ \mathbb{P}_n)$$
$$Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{1m} & q_{2m} & \cdots & q_{nm} \end{pmatrix}=(Q_1,\ \cdots,\ Q_n).$$

定理 2.1 设 $1\leqslant j\leqslant m$, $x(P_1)$, $\cdots$, $x(P_p)$ 和 $x(K_1)$, $\cdots$, $x(K_k)$ 分别为 Φ 的最小 j 路向量和最小 j 割向量; $\{X_i(t),\ t\in T\}$, $i=1,\ \cdots,\ n$ 在 T 中牵连,则有
$$l_{\phi(j)}\triangleq\prod_{r=1}^{k}P\{\beta_r(X(t))=1,\ \forall t\in T\}$$
$$\leqslant h_{\phi(j)}\leqslant 1-\prod_{r=1}^{p}P\{\rho_r(X(t))=0,\ \forall t\in T\}\triangleq 1-\bar{l}_{\phi(j)}, \tag{2.1}$$
$$\bar{l}_{\phi(j)}\leqslant g_{\phi(j)}\leqslant 1-l_{\phi(j)} \tag{2.2}$$

证 这里只证(2.1),类似可证(2.2). 设$\{t_1,\ \cdots,\ t_R,\ \cdots\}$为 T 中稠密子集,对任自然数 R,记 $T_R=\{t_1,\ \cdots,\ t_R\}$(以后均用此记号),由命题 1.1(iii), (iv), 得
$$P\{\Phi(X(t_i))\geqslant j,\ \forall t_i\in T_R\}=P\left\{\prod_{r=1}^{k}\beta_r(X(t_i))=1,\ \forall t_i\in T_R\right\}$$
$$=P\left\{\prod_{r=1}^{k}\min_{t_i\in T_R}\beta_r(X(t_i))=1\right\}\geqslant\prod_{r=1}^{k}P\{\beta_r(X(t_i))=1,\ \forall t_i\in T_R\} \tag{2.1$'$}$$
又
$$P\{\Phi(X(t_i))\geqslant j,\ \forall t_i\in T_R\}$$
$$=1-P\{\text{有 } t_i\in T_R,\ \text{使 } \rho_r(X(t_i))=0,\ \forall r\in\{1,\ \cdots,\ p\}\}$$
$$\leqslant 1-P\{\max_{1<r<p}\max_{t_i\in T_R}\rho_r(X(t_i))=0\}$$
$$\leqslant 1-\prod_{r=1}^{p}P\{\rho_r(X(t_i))=0,\ \forall t_i\in T_R\}, \tag{2.1$''$}$$
由假设 $X_i(t)$ 的样本函数关于 t 右连续, 在(2.1)$'$, (2.1)$''$ 中令 $R\to\infty$ 便分别得到(2.1)的前一不等式和后一不等式.

定理 2.2 设 $1\leqslant j\leqslant m$, 定义
$$l'_{\phi(j)}=\max_{1<r<p}P\{\min_{i\in E_r}I_{[X_i(t)\geqslant x_i(P_r)]}=1,\ \forall t\in T\},$$
$$u'_{\phi(j)}=\min_{1<r<k}P\{\max_{i\in D_r}I_{[X_i(t)>x_i(K_r)]}=1,\ \forall t\in T\},$$
$$\bar{l}'_{\phi(j)}=\max_{1<r<k}P\{\max_{i\in D_r}I_{[X_i(t)>x_i(K_r)]}=0,\ \forall t\in T\},$$
$$\bar{u}'_{\phi(j)}=\min_{1<r<p}P\{\min_{i\in E_r}I_{[X_i(t)\geqslant x_i(P_r)])]}=0,\ \forall t\in T\},$$
有
$$l'_{\phi(j)}\leqslant h_{\phi(j)}\leqslant u'_{\phi(j)} \tag{2.3}$$
$$\bar{l}'_{\phi(j)}\leqslant g_{\phi(j)}\leqslant\bar{u}'_{\phi(j)}.$$

证 $\forall r\in\{1,\ \cdots,\ p\}$, 必然
$$P\{\min_{i\in E_r}I_{[X_i(t)\geqslant x_i(P_r)]}=1,\ \forall t\in T\}\leqslant h_{\phi(j)},$$
因此 $l'_{\phi(j)}\leqslant h_{\phi(j)}$. 其余同理可证.

推论 2.1 令 $V'_{\phi(j)}=\max_{j<l<m}l'_{\phi(l)}$, $U'_{\phi(j)}=\max_{j<l<m}u'_{\phi(j)}$,

$$\bar V'_{\phi(j)}=\max_{1\le l\le j}\bar l'_{\phi(l)},\quad \bar U'_{\phi(j)}=\max_{j\le l\le m}\bar u'_{\phi(l)},$$

则 $$V'_{\phi(j)}\leqslant h_{\phi(j)}\leqslant U'_{\phi(j)},\ \bar V'_{\phi(j)}\leqslant g_{\phi(j)}\leqslant \bar U'_{\phi(j)}.$$

定理 2.3 若$\{X_i(t),\ t\in T\}$, $i=1,\cdots,n$ 在 T 中牵连，则

$$l'_{\phi(j)}(P)\triangleq\max_{1\le r\le p}\prod_{i\in E_r}p_{i,x_i(T_r)}\leqslant h_{\phi(j)}\leqslant 1-\max_{1\le r\le k}\prod_{i\in D_r}q_{i,x_i(K_r)+1}\triangleq 1-\bar l'_{\phi(j)}(Q),\tag{2.4}$$

以及

$$\bar l'_{\phi(j)}(Q)\leqslant g_{\phi(j)}\leqslant 1-l'_{\phi(j)}(P).\tag{2.5}$$

证 只证(2.4). 对任意 $r\in\{1,\cdots,p\}$, 据牵连随机变量性质命题1.1(iv), 有

$$P\{\min_{i\in E_r}I_{[X_i(t_s)>x_i(P_r)]}=1,\ \forall t_s\in T_R\}\geqslant\prod_{i\in E_r}P\{I_{[X_i(t_s)>x_i(P_r)]}=1,\ \forall t_s\in T_R\}\tag{2.6}$$

另外
$$\begin{aligned}&\min_{1\le r\le k}P\{\max_{i\in D_r}I_{[X_i(t_s)>x_i(K_r)]}=1,\ \forall t_s\in T_R\}\\&=1-\max_{1\le r\le k}P\{\text{有 } t_s\in T_R,\ \text{使 } I_{[X_i(t_s)>x_i(K_r)]}=0,\quad \forall i\in D_r\}\\&\leqslant 1-\max_{1\le r\le k}P\{\prod_{i\in D_r}\max_{t_s\in T_R}I_{[X_i(t_s)>x_i(K_r)]}=0\}\\&\leqslant 1-\max_{1\le r\le k}\prod_{i\in D_r}P\{I_{[X_i(t_s)>x_i(K_r)]}=0\quad \forall t_s\in T_R\}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

根据 $X_i(t)$ 的样本函数关于 t 右连续，在上面(2.6), (2.7)中令 $R\to\infty$, 再由定理2.2的(2.3)式即得(2.4).

推论 2.2 设$\{X_i(t),\ t\in T\}$, $i=1,\cdots,n$, 在 T 中独立,

定义 $$l_{\phi(j)}(P)=\prod_{r=1}^{k}\coprod_{i\in D_r}p_{i,x_i(K_r)+1},\qquad \bar l_{\phi(j)}(Q)=\prod_{r=1}^{p}\coprod_{i\in E_r}q_{i,x_i(P_r)},$$

则有 $$l_{\phi(j)}(P)\leqslant l_{\phi(j)},\quad \bar l_{\phi(j)}(Q)\leqslant \bar l_{\phi(j)}.$$

式中 $$\coprod_{i=1}^{n}y_i\triangleq 1-\prod_{i=1}^{n}(1-y_i).$$

证 只证前一不等式，后一个类似可证. 设 $1\leqslant r\leqslant k$, 那么

$$\begin{aligned}P\{\beta_r(X(t_s))=1,\ \forall t_s\in T_R\}&\geqslant P\{\exists i\in D_r\ni I_{[X_i(t_s)>x_i(K_r)]}=1,\forall t_s\in T_R\}\\&=1-P\{\prod_{i\in D_r}(1-\prod_{t_s\in T_R}I_{[X_i(t_s)>x_i(K_r)]}=1\}\\&=\coprod_{i\in D_r}P\{I_{[X_i(t_s)>x_i(K_r)]}=1,\quad \forall t_s\in T_R\}\end{aligned}$$

令 $R\to\infty$, 即得所需结论.

推论 2.3 设 $\{X_i(t),\ t\in T\}$, $i=1,\cdots,n$ 在 T 中独立, $\{X_i(t),\ t\in T\}$在 T 中牵连, $i=1,\cdots,n$ 定义

$$L_{\phi(j)}=\max(l_{\phi(j)},\ l'_{\phi(j)}(P)),\qquad \bar L_{\phi(j)}=\max(\bar l_{\phi(j)},\ \bar l'_{\phi(j)}(Q))$$
$$\bar L_{\phi(j)}(Q)=\max(\bar l_{\phi(j)}(Q),\ \bar l'_{\phi(j)}(Q)),\qquad L_{\phi(j)}(P)=\max(l_{\phi(j)}(P),\ l'_{\phi(j)}(P))$$

则 $$L_{\phi(j)}(P)\leqslant L_{\phi(j)}\leqslant h_{\phi(j)}\leqslant 1-\bar L_{\phi(j)}\leqslant 1-\bar L_{\phi(j)}(Q),$$
$$\bar L_{\phi(j)}(Q)\leqslant \bar L_{\phi(j)}\leqslant g_{\phi(j)}\leqslant 1-L_{\phi(j)}\leqslant 1-L_{\phi(j)}(P).$$

推论 2.4 令 $B_{\phi(j)}=\max_{1\le l\le j}\bar L_{\phi(l)}$, $F_{\phi(j)}=\max_{j\le l\le m}L_{\phi(l)}$,

有 $$F_{\phi(j)}\leqslant h_{\phi(j)}\leqslant 1-B_{\phi(j)},\ B_{\phi(j)}\leqslant g_{\phi(j)}\leqslant 1-F_{\phi(j)}.$$

定理 2.4

(i) $h_{\phi(j)}\geqslant\sum_{r=1}^{p}P\{\rho_r(X(t))=1,\forall t\in T\}-\sum_{1\le r<s\le p}P\{\rho_r(X(t))=\rho_s(X(t))=1,\ \forall t\in T\}$;

(ii) $g_{\phi(j)}\geqslant\sum_{r=1}^{k}P\{\beta_r(X(t))=0,\forall t\in T\}-\sum_{1\le r<s\le k}P\{\beta_r(X(t))=\beta_s(X(t))=0,\forall t\in T\}$.

§3 模块与系统可用度

从Butler[2]中看出，利用模块分解估计系统可靠度比直接用元件来估计要精确些. 本节将证明在估计系统可用度时也是如此.

引理3.1 设 $(C,\ \Phi)\sim\{(A_i,\ \chi_i),\ 1\leqslant i\leqslant N,\ \Psi\}$，并且此分解在 T 中独立；又设单调关联结构 Ψ 仅有一个最小 j 割向量 $\chi(K)$，即

$$I_{[\phi\geqslant j]}=I_{[\Psi\geqslant j]}=\prod_{i=1}^{N}I_{[\chi_i>\chi_i(K)]}$$

那么

$$u'_{\phi(j)}\leqslant 1-\prod_{i=1}^{N}\bar{l}'_{\chi_i(\chi_i(K))}=1-\bar{l}'_{\phi(j)} \tag{3.1}$$

证 设 $\beta_{il_i}(D_{il_i},\ \chi(K_{il_i}))$为模块 χ_i 的第 l_i 个最小 $\chi_i(K)+1$ 割结构函数(集，向量)，$1\leqslant l_i\leqslant m_i$. 那么$\left\{\prod_{i=1}^{N}\beta_{il_i}:\ 1\leqslant l_i\leqslant m_i,\ i=1,\ \cdots,\ N\right\}$为 Φ 的最小 j 割结构函数全体. 根据模块在 T 中独立的条件，可得

$$\begin{aligned}
&\min_{\substack{1\leqslant l_1\leqslant m_1\\ \vdots\\ 1\leqslant l_N\leqslant m_N}} P\{\max_{\substack{r\in D_{il_i}\\ 1\leqslant i\leqslant N}} I_{[X_r(t_s)>x_r(K_{il_i})]}=1,\ \ \forall t_s\in T_R\}\\
&\leqslant 1-\max_{\substack{1\leqslant l_1\leqslant m_1\\ \vdots\\ 1\leqslant l_N\leqslant m_N}} P\{\bigcap_{i=1}^{N}\{I_{[X_r(t_s)>x_r(K_{il_i})]}=0,\ \forall i\in D_{il_i},\ \forall t_s\in T_R\}\\
&=1-\max_{\substack{1\leqslant l_1\leqslant m_1\\ \vdots\\ 1\leqslant l_N\leqslant m_N}}\prod_{i=1}^{N}P\{\max_{r\in D_{il_i}}I_{[X_r(t_s)>x_r(K_{il_i})]}=0,\ \ \forall t_s\in T_R\}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

令 $R\to\infty$，便得 $u'_{\phi(j)}\leqslant 1-\prod_{i=1}^{N}\bar{l}'_{\chi_i(\chi_i(K))}$.

又因 $R\to\infty$ 时，(3.2)趋于 $1-\bar{l}'_{\phi(j)}$，故

$$\bar{l}'_{\phi(j)}=\prod_{i=1}^{N}\bar{l}'_{\chi_i(\chi_i(K))}.$$

引理3.1′ 设$(C,\ \Phi)\sim\{(A_i,\ \chi_i),\ 1\leqslant i\leqslant N,\ \Psi\}$，$\Psi$ 仅有一条最小 j 路向量 $\chi(P)$，模块分解在 T 中独立，则

$$\bar{u}'_{\phi(j)}\leqslant 1-\prod_{i=1}^{N}l'_{\chi_i(\chi_i(P))}=1-l'_{\phi(j)}.$$

定理3.1 设$(C,\ \Phi)\sim\{(A_i,\ \chi_i),\ 1\leqslant i\leqslant N,\ \Psi\}$，此分解在 T 中独立，$\{\chi_i(t),\ t\in T\}$在 T 中牵连，$i=1,\ \cdots,\ N$. 那么

$$\begin{aligned}
1-\bar{L}_{\psi(j)}(\bar{V}'_{\chi_1},\ \cdots,\ \bar{V}'_{\chi_N})&\overset{a}{\geqslant}1-\bar{L}_{\psi(j)}(g_{\chi_1},\ \cdots,\ g_{\chi_N})\\
&\overset{b}{\geqslant}h_{\phi(j)}\overset{c}{\geqslant}L_{\psi(j)}(h_{\chi_1},\ \cdots,\ h_{\chi_N})\overset{d}{\geqslant}L_{\psi(j)}(V'_{\chi_1},\ \cdots,\ V'_{\chi_N})\overset{e}{\geqslant}l'_{\phi(j)};\\
&1-\bar{l}'_{\psi(j)}(V_{\chi_1},\ \cdots,\ V_{\chi_N})\overset{f}{\geqslant}u'_{\phi(j)};
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
1-L_{\psi(j)}(V'_{\chi_1},\ \cdots,\ V'_{\chi_N})&\overset{a'}{\geqslant}1-L_{\phi(j)}(\bar{V}'_{\chi_1},\ \cdots,\ \bar{V}'_{\chi_N})\\
&\overset{b'}{\geqslant}g_{\phi(j)}\overset{c'}{\geqslant}\bar{L}_{\psi(j)}(g_{\chi_1},\ \cdots,\ g_{\chi_N})\overset{d'}{\geqslant}\bar{L}_{\psi(j)}(\bar{V}'_{\chi_1},\ \cdots,\ \bar{V}'_{\chi_N})\overset{e'}{\geqslant}\bar{l}'_{\phi(j)},
\end{aligned}$$

$$1-\bar{l}'_{\psi(j)}(W_{\chi_1},\cdots W_{\chi_N})\overset{f'}{\geqslant}u'_{\phi(j)};$$

式中
$$V_{\chi_i}=\begin{pmatrix}V_{\chi_i(1)}\\ \vdots\\ V_{\chi_i(m)}\end{pmatrix},\ V_{\chi_i(j)}=\min_{j\leqslant l\leqslant m}\bar{l}'_{\chi_i(l)},\quad j=1,\ \cdots,\ m,\ i=1,\ \cdots,\ N.$$

$$W_{\chi_i}=\begin{pmatrix}W_{\chi_i(1)}\\ \vdots\\ W_{\chi_i(m)}\end{pmatrix},\ W_{\chi_i(j)}=\min_{1\leqslant l\leqslant j}\bar{l}'_{\chi_i(l)},\quad j=1\cdots,\ m,\ i=1,\ \cdots,\ N.$$

其余的 V'_{χ_i}, $\bar{V}'_{\chi_i}$, h_{χ_i}, g_{χ_i} 等可相应理解.

证 因为当 $P=(p_{ij})_{n\times m}\geqslant P'=(p'_{ij})_{n\times m}$(即 $\forall i,\ j,\ p_{ij}\geqslant p'_{ij}$), 有 $L_{\phi(j)}(P)\geqslant L_{\phi(j)}(P')$; 同样, $Q=(q_{ij})_{n\times m}\geqslant Q'=(q'_{ij})_{n\times m}$ 时, $\bar{L}_{\phi(j)}(Q)\geqslant\bar{L}_{\phi(j)}(Q')$.因此将推论 2.1, 2.3 用到 Ψ 和 χ_i 上, 立即得到不等式 a, b, c, d 和 a', b', c', d'. 下面用引理 3.1 证明不等式 f, e', 完全类似可用引理 3.1′ 证明 f', e.

设 $\beta_l(\chi(K_l))$ 为 Ψ 的第 l 个最小 j 割结构函数(向量). 定义 $\Phi_l(x)=\beta_l(\chi_1(x),\ \chi_N(x))$, $l=1,\ \cdots,\ k$. 设 $D_{lr_l}(x(K_{lr_l}))$ 为 Φ_l 的最小割集(向量), β_{lr_l} 为相应最小割结构函数, $1\leqslant r_l\leqslant m_l$, $1\leqslant l\leqslant k$. 如同引理 3.1 所述, $\{\beta_{lr_l},\ 1\leqslant r_l\leqslant m_l,\ 1\leqslant l\leqslant k\}$ 为 Φ 的最小 j 割结构函数全体. 因此根据引理 3.1

$$u'_{\phi(j)}=\min_{1\leqslant l\leqslant k}\min_{1\leqslant r_l\leqslant m_l}P\{\max_{t\in D_{lr_l}}I_{[X_t(t)>x_t(Klr_l)]}=1,\ \ \forall t\in T\}$$
$$\leqslant\min_{1\leqslant l\leqslant k}\left(1-\prod_{i=1}^{N}\bar{l}'_{\chi_i(\chi_i(K_l))}\right)\leqslant 1-\max_{1\leqslant l\leqslant k}\prod_{i=1}^{N}V_{\chi_i(\chi_i(K_l))}=1-\bar{l}'_{\psi(j)}(V_{\chi_1},\ \cdots,\ V_{\chi_N}),$$

此即不等式 f.

另外

$$\bar{l}'_{\phi(j)}=\max_{1\leqslant l\leqslant k}\max_{1\leqslant r_l\leqslant m_l}P\{\max_{t\in D_{lr_l}}I_{[X_t(t)>x_t(K_{lr_l})]}=0,\ \ \forall t\in T\}=\max_{1\leqslant l\leqslant k}\prod_{i=1}^{N}\bar{l}'_{\chi_i(\chi_i(K_l))}$$
$$\leqslant\max_{1\leqslant l\leqslant k}\prod_{i=1}^{N}\bar{V}'_{\chi_i(\chi_i(K_l))}=\bar{l}'_{\psi(j)}(\bar{V}'_{\chi_1},\ \cdots,\ \bar{V}'_{\chi_N}),$$

故不等式 e' 成立.

引理 3.2 设 $(C,\ \Phi)\sim\{(A_i,\ \chi_i),\ 1\leqslant i<N,\ \Psi\}$, 此分解在 T 中独立; 如果 Ψ 仅有一个最小 j 割(路)向量 $\chi(K)(\chi(P))$; 那么

$$\bar{l}'_{\phi(j)}(Q)=\prod_{i=1}^{N}\bar{l}'_{\chi_i(\chi_i(K))}(Q)$$
$$\left(l'_{\phi(j)}(P)=\prod_{i=1}^{N}l'_{\chi_i(\chi_i(P))}(P)\right).$$

证 设 Ψ 仅有一条最小 j 割向量 $\chi(K)$,沿用引理 3.1 的符号,有

$$\bar{l}'_{\phi(j)}(Q)=\max_{\substack{1\leqslant l_1\leqslant m_1\\ \cdots\\ 1\leqslant l_N\leqslant m_N}}\prod_{i=1}^{N}\prod_{r\in D_{il_i}}q_{r,x_r(K_{il_i})+1}=\prod_{i=1}^{N}\max_{1\leqslant l_i\leqslant m_i}\prod_{r\in D_{il_i}}q_{r,x_r(K_{il_i})+1}=\prod_{i=1}^{N}\bar{l}'_{\chi_i(\chi_i(K))}(Q).$$

另一情形类似可证.

定理 3.2 设 $(C,\ \Phi)\sim\{(A_i,\ \chi_i),\ 1\leqslant i\leqslant N,\ \Psi\}$, 此分解在 T 中独立; $\{X_i(t),\ t\in T\}$, $i\in A_r$ 在 T 中牵连, $r=1,\ \cdots,\ N$. 那么

$$
\begin{aligned}
1-\bar{l}'_{\phi(j)}(Q) &\overset{a}{\geqslant} 1-\bar{L}_{\psi(j)}(B_{\chi_1},\ \cdots,\ B_{\chi_N}) \overset{b}{\geqslant} 1-\bar{L}_{\psi(j)}(g_{\chi_1},\ \cdots,\ g_{\chi_N}) \\
&\overset{c}{\geqslant} h_{\phi(j)} \overset{d}{\geqslant} L_{\psi(j)}(h_{\chi_1},\ \cdots,\ h_{\chi_N}) \overset{e}{\geqslant} L_{\psi(j)}(F_{\chi_1},\ \cdots,\ F_{\chi_N}) \overset{f}{\geqslant} l'_{\phi(j)}(P);
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
1-l'_{\phi(j)}(P) &\overset{a'}{\geqslant} 1-L_{\psi(j)}(F_{\chi_1},\ \cdots,\ F_{\chi_N}) \overset{b'}{\geqslant} 1-L_{\psi(j)}(h_{\chi_1},\ \cdots,\ h_{\chi_N}) \\
&\overset{c'}{\geqslant} g_{\phi(j)} \overset{d'}{\geqslant} \bar{L}_{\psi(j)}(g_{\chi_1},\ \cdots,\ g_{\chi_N}) \overset{e'}{\geqslant} \bar{L}_{\psi(j)}(B_{\chi_1},\ \cdots,\ B_{\chi_N}) \overset{f'}{\geqslant} \bar{l}'_{\phi(j)}(Q).
\end{aligned}
$$

证 将推论2.3、2.4用到Ψ, χ_i上立即得到不等式b、c、d、e和b', c', d', e'. 下面利用引理3.2证明f, 这同时也证明了a'. 相仿可证f'和a.

设Ψ的最小j路结构函数(向量、集)为$\eta_r(\chi(P_r),\ E_r)$, $1\leqslant r\leqslant p$, η_r的最小路集(向量)为$E_{rl_r}(\chi(P_{rl_r}))$, $1\leqslant l_r\leqslant m_r$. 据引理3.2和$l'_{\phi(j)}(P)$的定义,

$$
\begin{aligned}
l'_{\phi(j)}(P) &= \max_{1\leqslant r\leqslant p}\ \max_{1\leqslant l_r\leqslant m_r}\ \prod_{i\in E_{rl_r}} p_{i,x_i(P_{rl_r})} = \max_{1\leqslant r\leqslant p}\ \prod_{i\in E_r} l'_{\chi_i(\chi_i(P_r))}(P) \\
&\leqslant \max_{1\leqslant r\leqslant p}\ \prod_{i\in E_r} F_{\chi_i(\chi_i(P_r))} = l'_{\psi(j)}(F_{\chi_1},\ \cdots,\ F_{\chi_N}).
\end{aligned}
$$

至此定理3.2全部证毕.

当集合T退化为一点$\{t\}$时,上述结果直接转化为不可修单调关联系统的可靠度与不可靠度的估计,这些估计与Butler[2]所得到的结果有所不同. 此处不详细叙述.

参 考 文 献

[1] Barlow, R. E., Proschan, F., Statistical Theory of Reliability and Life Testing Probability. 1975.

[2] Butler, D. A., Bounding the multistate system. *Oper. Res.*, (1981), 530—544.

[3] Esary, J. D., Proschan, F., A reliability bound for systems of maintained independent components. *JASA.*, **65** (1970), 329—338.

[4] Natvig. B., Improved bounds for the availability and unavailability in a fixed time interval for systems of maintained interdependent components. *Adv. Appl. Prob.*, **12** (1980), 200—221.

BOUNDS FOR THE AVAILABILITY AND UNAVAILABILITY FOR MULTISTATE MONOTONE COHERENT SYSTEMS

Li Linxiong

(Huazhong Normal University)

Esary and Proschan (1970) and Natvig (1980) have got some bounds of availability and unavailability in a fixed time interval for binary systems. The main purposes of this paper is to extend these results to multi-state monotone coherent system. It is good that these bounds never depend on any concrete repair policies, however, they are hard to use in practice because of complexity in form.