应用概率统计　第二卷
第一期　1986年2月

Chiness Journal of Applied Probability and Statistics Vol. 2. No. 1. Feb. 1986

一类最优停止问题的解

陈家鼎　李向科
(北京大学)

§1. 引　言

设 $Z_1, \varepsilon_1, Z_2, \varepsilon_2, \cdots$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的独立随机变量列，$\{Z_n\}$ 服从相同的分布 $F(x)$，$\{\varepsilon_i\}$ 服从同一个贝努利分布，$P(\varepsilon_i=1)=p=1-P(\varepsilon_i=0)\ (i\geqslant 1,\ 0<p<1)$. 设 $T_0=z$ (z 是实数)，

$$T_n=\varepsilon_n(T_{n-1}+Z_n)\quad (n\geqslant 1),$$

给定 $C>0$，记 $X_n=T_n-nC\ (n\geqslant 0)$. 注意 X_n 与 z 有关. 记

$$\mathscr{F}_0=\{\phi,\ \Omega\},\ \mathscr{F}_n=\sigma(Z_1,\ \varepsilon_1,\ \cdots,\ Z_n,\ \varepsilon_n)\quad (n\geqslant 1)$$

以下的停时都是关于 σ 代数流 $\{\mathscr{F}_n\}$ 而言的. Ferguson 在[1]中研究了随机序列 $(X_n, \mathscr{F}_n)$ 的最优停止问题，即寻找停时 τ^* 满足 $EX_{\tau^*}=\sup\{EX_\tau: \tau$ 是任意停时$\}$.

这个问题有明确的背景：设在给定的经济系统中，"$\varepsilon_i=1$" 表示第 i 个周期胜利通过，"$\varepsilon_i=0$" 表示第 i 个周期失败，Z_i 表示第 i 个周期胜利通过时的收入. 只要是连续成功，则收入就积累，但只要一遇失败，则积累就化为 0. C 表示每个周期的费用，z 表示系统开始时的资金，T_n 表示第 n 个周期末的全部收入，X_n 表示第 n 个周期末得到的纯收入. 最优停止问题的意义是：选择明智的停止时刻，使平均纯收入达到最大.

[1]中证明了：在条件 $E(Z_1^+)^2<\infty$ 下，最优停时 τ^* 一定存在，而且可以写成下面的简单形式：

$$\tau^*=\inf\{n: n\geqslant 0,\ T_n\geqslant S\} \tag{1.1}$$

其中 S 是方程 "$V^*(z)=z$" 的最小根，这里 $V^*(z)=\sup\{EX_\tau: \tau$ 是停时$\}$，X_τ 与 z 有关. 当然，S 与 Z_1 的分布函数 $F(x)$ 及 p，C 的值有关.

要确定出 s 是十分困难的. [1]对 $F(x)$ 是指数分布和几何分布的情形用复杂的概率方法导出了 s 的明显表达式. 其推导方法充分利用了这二个分布的无记忆性，很难用到其它分布上去. 本文用解 Wiener-Hopf 积分方程(以及相应的代数方程)的方法，给出了寻找 s 的另一途径，当 $F(x)$ 是 Γ 分布(参数 α 是正整数)或某些离散分布时，用它可以具体确定 s.

§2. 最优停止问题与积分方程

沿用 §1 中的记号，我们恒设 $E(Z_1^+)^2<\infty$，由[1]知 $V^*(z)$ 是 z 的不减凸函数(当然连续)，

本文1985年1月19日收到.

且存在唯一的实数 S 满足：$z\geqslant S$ 时 $V^*(z)=z$，$z<S$ 时 $V^*(z)>z$，我们首先指出 $V^*(z)$ 满足一个积分方程.

定理 1 设 $E(Z_1^+)^2<\infty$，则有

$$V^*(z)=\max\left(z,\ p\int_{-\infty}^{\infty} V^*(z+x)dF(x)+(1-p)V^*(0)-C\right), \tag{2.1}$$

其中 $F(x)$ 是 Z_1 的分布函数.

证明：令 $V_1^*(z)=\sup\{EX_\tau;\ \tau$ 是停时且 $\tau\geqslant 1\}$，$\gamma_n=\text{ess}\sup\{E(X_\tau|\mathscr{F}_n);\ \tau$ 是停时且 $\tau\geqslant n\}$. 从[1]中引理 4 知，对一切 $n\geqslant 0$，$\gamma_n=V^*(T_n)-nC$(a.s.p.)，从[2]中定理 4.1 知 $E\gamma_1=V_1^*(z)$. 由于 $\mathscr{F}_0=\{\phi,\ \Omega\}$，所以任何停时要么恒为 0，要么不小于 1，从而

$$V^*(z)=\max(EX_0,\ V_1^*(z))=\max(z,\ V_1^*(z)).$$

但是

$$V_1^*(z)=E\gamma_1=E(V^*(T_1)-C)=EV^*(\varepsilon_1(z+Z_1))-C=\int_{(\varepsilon_1=1)}V^*(z+Z_1)dP$$

$$+\int_{(\varepsilon_1=0)}V^*(0)dP-C=P(\varepsilon_1=1)EV^*(z+Z_1)+P(\varepsilon_1=0)V^*(0)-C$$

$$=p\int_{-\infty}^{\infty}V^*(z+x)dF(x)+(1-p)V^*(0)-C,$$

这就证明了(2.1)成立.

引理 1 设 $EZ_1^2<\infty$，$P(Z_1\geqslant 0)=1$，则

$$S=V^*(0)+\frac{1}{1-p}(pEZ_1-C)$$

证明：由于 $V^*(S-\delta)>(S-\delta)$，$(\delta>0)$ 从(2.1)知

$$V^*(S-\delta)=p\int_{[0,\delta]}V^*(S-\delta+x)dF(x)+p\int_{[\delta,\infty]}V^*(S-\delta+x)dF(x)+(1-p)V^*(0)-C$$

$$=p\int_{[0,\delta]}V^*(S-\delta+x)dF(x)+p\int_{[\delta,\infty]}(S-\delta+x)dF(x)+(1-p)V^*(0)-C.$$

于是

$$\lim V^*(S-\delta)=pV^*(S)p(Z_1=0)+pSP(Z_1>0)+pEZ_1+(1-p)V^*(0)-C$$

但

$$\lim V^*(S-\delta)=V^*(S)=S.$$

故

$$S=V^*(0)+\frac{1}{1-p}(pEZ_1-C)$$

证毕.

引理 2 设 $EZ_1^2<\infty$，$P(Z_1\geqslant 0)=1$，$P(Z_1=0)<1$，则 $V^*(z)$ 是 z 的严格上升函数.

证明：用反证法. 设有 $z_1<z_2$ 满足 $V^*(z_1)=V^*(z_2)$. 由于 $V^*(z)$ 是不减凸的，对于一切 $z\leqslant z_2$，有 $V^*(z)=V^*(z_2)$. 令 $z_0=\sup\{z;\ V^*(z)=V^*(z_2)\}$，则对一切 $z\leqslant z_0$，$V^*(z)=V^*(z_0)$ 且 $z_0\leqslant S$，于是对一切 $t\geqslant 0$，从(2.1)知

$$V^*(z_0-t)=p\int_{[0,\infty]}V^*(z_0-t+x)dF(x)+(1-p)V^*(0)-C;$$

取 $\varepsilon>0$ 使得 $P(0<Z_1\leqslant\varepsilon)>0$，则

$$0=V^*(z_0)-V^*(z_0-\varepsilon)=p\int[V^*(z_0+x)-V^*(z_0-\varepsilon+x)]dF(x)$$

$$\geqslant p\int_{(0,\varepsilon)}[V^*(z_0+x)-V^*(z_0)]dF(x)>0,$$

这便有了矛盾．故 $V^*(z)$是严格上升的．证毕．

定理 2 设

$$EZ_1^2<\infty,\ P(Z_1\geqslant 0)=1,\ b=\frac{1}{1-p}(pEZ_1-C),$$

令

$$h(z)\triangleq V^*(-z+S)-V^*(0)+z-b, \tag{2.3}$$

则必有

$$h(z)=\begin{cases} p\int_{[0,\infty)} h(z-x)dF(x)+(1-p)z & z>0 \\ 0 & z\leqslant 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

而且 S 适合方程

$$h(z)=z-b \tag{2.5}$$

若还假设 $P(Z_1=0)<1$，则(2.5)的解是唯一的．

证明：因为 $z<S$ 时 $V^*(z)>z$，$z\geqslant S$ 时 $V^*(z)=z$．从定理 1 知

$$V^*(z)=\begin{cases} p\int_{[0,\infty)} V^*(z+x)dF(x)+(1-p)V^*(0)-C, & z<S \\ z & z\geqslant S. \end{cases}$$

于是利用引理 1 知 $z\leqslant 0$ 时 $h(z)=0$，当 $z>0$ 时

$$\begin{aligned} h(z)&=V^*(-z+S)-V^*(0)+z-b \\ &=p\int_{[0,\infty)} V^*(-z+S+x)dF(x)+(1-p)V^*(0)-C-V^*(0)+z-b \\ &=p\int_{[0,\infty)} h(z-x)dF(x)+(1-p)z. \end{aligned}$$

所以(2.4)成立．显然 S 满足方程(2.5)．若 $P(Z_1=0)<1$，由引理 2 知方程(2.5)的解是唯一的．证毕．

系 1 设 $P(Z_1\geqslant 0)=1$，$pEZ_1\leqslant C$，则 $S=\frac{1}{1-p}(pEZ_1-C)$．

证明：分两种情形，若 $P(Z_1=0)<1$，$pEZ_1\leqslant C$，从引理 1 知 $S\leqslant V^*(0)$，于是

$$V^*(S)=S\leqslant V^*(0),$$

再利用引理 2 知 $S\leqslant 0$。若 $P(Z_1=0)=1$，则

$$V^*(S)=S=V^*(0)+\frac{1}{1-p}(pEZ_1-C)<V^*(0),$$

于是 $S<0$．总之 $S\leqslant 0$，从而 $V^*(0)=0$，再利用引理 1 知

$$S=\frac{1}{1-p}(pEZ_1-C).$$

证毕．

定理 2 的意义在于，为了找 S 可先从方程(2.4)求得 $h(z)$，然后再求方程(2.5)的根．可以证明方程(2.4)的局部有界解是唯一的．

往下只须研究 $pEZ_1>C$ 的情形．此时 $S>0$．§3 中研究 $F(x)$绝对连续的情形，§4 中研究 $F(x)$是离散分布的情形．

§ 3. 一类 Wiener-Hopf 方程的解

下列方程

$$\varphi(x)=\int_0^\infty K(x-y)\varphi(y)dy+f(x) \tag{3.1}$$

就是著名的 Wiener-Hopf 方程，其中 $K(x)\in L_1(-\infty,\ \infty)$，$f(x)\in L_2(0,\ \infty)$，$\varphi(x)$ 是未知函数(属于 $L_2(0,\ \infty)$)．一个重要的解法是用 Wiener-Hopf 技巧(见[3])，大意如下：

将 $\varphi(x)$、$f(x)$的定义域扩展到$(-\infty,\ \infty)$上，仍记为 $\varphi(x)$，$f(x)$，(当 $x<0$ 时，令 $f(x)=\varphi(x)=0$)．用 $F(\varphi)$表示 $L_2(-\infty,\ \infty)$中函数 φ 的 Fourier 变换：

$$F(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{itx}\varphi(x)dx$$

用 F^* 表示 F 的逆变换．

令 $L_2^+=\{\varphi:\varphi\in L_2(-\infty,\ \infty),\ F(\varphi)=0$ 对一切 $t>0\}$，$L_2^-=\{\varphi:\varphi\in L_2(-\infty,\ \infty),\ F(\varphi)=0$ 对一切 $t<0\}$．如所周知，$L_2(-\infty,\ \infty)=L_2^+\oplus L_2^-$ (子空间的直接和)．$L_2(-\infty,\ \infty)$中的函数 φ 可唯一地分解为：

$$\varphi=\varphi_++\varphi_-\quad(\varphi_+\in L_2^+,\ \varphi_-\in L_2^-).$$

记 $P(t)=1-\sqrt{2\pi}F^*(K)$．设 $P(t)$能写成下列形式：

$$P(t)=\frac{q_2(t)}{q_1(t)} \tag{3.2}$$

其中 $q_1(z)$，$q_2(z)$分别在上、下半平面内解析，且

$$\lim_{y\to0^+}q_1(x+iy)=q_1(x),\quad \lim_{y\to0^-}q_2(x+iy)=q_2(x),$$

则方程(3.1)的解为：

$$\varphi=F\left(\frac{(q_1F^*(f))_-}{q_2}\right) \tag{3.3}$$

我们要利用公式(3.3)解方程(2.4)．要对一般的分布函数找出解的明显表达式是不可能的．本节只考虑 $F(x)$是 Γ 分布的情形．

设
$$F(x)=\int_0^x\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}u^{\alpha-1}e^{-\beta u}du\quad(x>0);$$
$$F(x)=0\quad(x\leqslant0),$$

其中 α 是正整数，$\beta>0$．

令 $\varphi(x)=h(x)e^{-\varepsilon x}$，$K(x)=pF'(x)e^{-\varepsilon x}$，$f(x)=(1-p)xe^{-\beta x}\quad(x>0)$；

$$f(x)=0\quad(x\leqslant0).$$

这里 $\varepsilon\in(0,\ \beta)$．从(2.4)得

$$\varphi(x)=\int_0^\infty K(x-u)\varphi(u)du+f(x).\quad(x\geqslant0) \tag{3.4}$$

我们来利用(3.3)解此方程．注意

$$\sqrt{2\pi}F^*(K)=\int_0^\infty\frac{1}{\Gamma(\alpha)}p\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x-\varepsilon x-itx}dx=\frac{p\beta^\alpha}{(\beta+\varepsilon+it)^\alpha}.$$

于是
$$P(t)=1-\sqrt{2\pi}F^*(K)=\frac{(\beta+\varepsilon+it)^\alpha-p\beta^\alpha}{(\beta+\varepsilon+it)^\alpha}.$$

注意 $$p(z)=\frac{(\beta+\varepsilon+iz)^{\alpha}-p\beta^{\alpha}}{(\beta+\varepsilon+iz)^{\alpha}}$$

在下半平面解析，故可取 $q_1(z)=1$, $q_2(z)=P(z)$, 则

$$P(t)=\frac{q_2(t)}{q_1(t)},$$

从(3.3)知(3.4)的解

$$\varphi(x)=F\left(\frac{F^*(f)}{q_2}\right)=F\left(F^*(f)+\frac{p\beta^{\alpha}}{(\beta+\varepsilon+it)^{\alpha}-p\beta^{\alpha}}F^*(f)\right)$$

$$=f(x)+p\beta^{\alpha}F\left(\frac{1}{(\beta+\varepsilon+it)^{\alpha}-p\beta^{\alpha}}\cdot\frac{1-p}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(\varepsilon+it)^2}\right)$$

$$=f(x)+\frac{p\beta^{\alpha}(1-P)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\beta+\varepsilon+it)^{\alpha}-p\beta^{\alpha}}\cdot\frac{1}{(\varepsilon+it)^2}e^{ixt}dt.$$

记 $$z_j\triangleq i(\beta+\varepsilon)-ip^{\frac{1}{\alpha}}\beta e^{i\frac{2\pi}{\alpha}j}\quad(j=1,2,\cdots,\alpha)\quad z_{\alpha+1}\triangleq\varepsilon i,$$

则这些 z_j 均在上半平面上. 设 $x>0$, 由残数定理可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt=\sum_{j=1}^{\alpha+1}2\pi i\cdot\mathrm{Res}(\psi,z_j)$$

其中 $$\psi(z)=\frac{e^{ixz}}{[(\beta+\varepsilon+iz)^{\alpha}-p\beta^{\alpha}](\varepsilon+iz)^2},$$

$\mathrm{Res}(\psi,z_j)$表示 ψ 在极点 z_j 的残数.

易知 $j=1,\cdots,\alpha$ 时,

$$\mathrm{Res}(\psi,z_j)=\frac{e^{ixz_j}(\beta+\varepsilon+iz_j)}{\alpha p\beta^{\alpha}i(\varepsilon+iz_j)^2},$$

$$\mathrm{Res}(\psi,z_{\alpha+1})=\frac{1}{i}e^{-x\varepsilon}\left\{\frac{x}{(1-p)\beta^{\alpha}}-\frac{\alpha}{(1-p)^2\beta^{\alpha+1}}\right\}.$$

用上述结果得到:

$$h(x)=\varphi(x)e^{\varepsilon x}=x-\frac{p\alpha}{(1-p)\beta}+\frac{1-p}{\alpha}\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{e^{(\varepsilon+iz_j)x}(\beta+\varepsilon+iz_j)}{(\beta+iz_j)^2}\quad(x>0).$$

从而方程(2.5)成为:

$$\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{p^{\frac{1}{\alpha}}\beta e^{i\frac{2\pi}{\alpha}j}}{\left(-\beta+p^{\frac{1}{\alpha}}\beta e^{i\frac{2\pi}{\alpha}j}\right)^2}e^{s\left(-\beta+p^{\frac{1}{\alpha}}\beta e^{i\frac{2\pi}{\alpha}j}\right)}-\frac{\alpha C}{(1-p)^2}=0\tag{3.5}$$

例 1 $\alpha=2$.

此时方程(3.5)化为:

$$\frac{-\sqrt{p}\,\beta}{(-\beta-\sqrt{p}\,\beta)^2}e^{s(-\beta-\sqrt{p}\beta)}+\frac{\sqrt{p}\,\beta}{(-\beta+\sqrt{p}\,\beta)^2}e^{s(-\beta+\sqrt{p}\beta)}-\frac{2C}{(1-p)^2}=0$$

令 $u=e^{-\beta(1-\sqrt{p}s)}$, $t=\dfrac{1+\sqrt{p}}{1-\sqrt{p}}$, 知

$$u^t-t^2u+\frac{2\beta C}{\sqrt{p}\,(1-\sqrt{p})^2}=0$$

此方程在(0, 1)中恰有一根 u_0, 于是得

$$S=\frac{1}{\beta(1-\sqrt{p})}\ln\frac{1}{u_0}.$$

若取 $p=\frac{1}{9}$，则可得

$$S=\frac{3}{2\beta}\ln\frac{2}{4-\sqrt{16-54\beta C}}.$$

注意这是条件 $\beta C<\frac{2}{9}$（即 $pEZ_1>C$）下求得的．（当 $\beta C\geqslant\frac{2}{9}$，即 $pEZ_1\leqslant C$ 时，从系 1 知 $S=\frac{1}{1-p}\left(pEZ_1-C\right)=\frac{2p-\beta C}{(1-p)\beta}\right)$．这是用[1]中的方法得不到的．

例 **2**　$\alpha=1$．

此时 Z_1 服从指数分布．方程(3.5)化为：

$$\frac{p\beta}{(-\beta+p\beta)^2}e^{x(-\beta+p\beta)}-\frac{C}{(1-p)^2}=0$$

由此可求出 $S=\frac{1}{\beta(1-p)}\ln\frac{p}{\beta C}$．这是在条件 $pEZ_1>C$ 即 $p>\beta C$ 时求得的．$\Big($当 $p\leqslant\beta C$ 时，由系 1 知 $S=\frac{p-\beta C}{(1-p)\beta}\Big)$．所得结论与[1]中的结果是一致的．

§4．离散分布情形

本节设 Z_1 只取非负整数值，$EZ_1^2<\infty$，

$$p_j=P(Z_1=j)\,(j=0,\ 1,\ \cdots),\qquad \sum_{j=0}^{\infty}p_j=1.$$

为了计算 S，对任何 $z\in[0,\ 1)$，首先要计算 $h(i+z)\,(i=0,\ 1,\ \cdots)$，这里 $h(z)$ 的定义见(2.3)．从(2.4)知

$$\begin{cases} h(i+z)=\dfrac{1}{1-pp_0}\left\{\displaystyle\sum_{j=1}^{i}pp_jh(i+z-j)+(1-p)(i+z)\right\} \\ h(z)=\dfrac{(1-p)z}{1-pp_0}\end{cases}\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots)\tag{4.1}$$

这就得到了计算 $h(i+z)$ 的递推公式．在有些情况下，可找出 $h(i+z)$ 的直接表达式．令

$$\psi(u)=\sum_{j=0}^{\infty}p_ju^j,\ \varphi(u)=\sum_{j=0}^{\infty}h(j+z)u^j$$

从(4.1)知

$$\varphi(u)=\frac{(1-p)[z+(1-z)u]}{[1-p\psi(u)](1-u)^2}\tag{4.2}$$

将 $\varphi(u)$ 展成幂级数，则 $h(i+z)$ 就可求出．令

$$g(z)=h(z)-z+b,$$

这里
$$b=\frac{1}{1-p}(pEZ_1-C).$$

故
$$g(z)=V^*(-z+S)-V^*(0)$$

是 z 的严格减函数（当 $p_0<1$ 时）．令

$$i_0=\max\{i;\ i\geqslant0,\ g(i)\geqslant0\},$$

则 $g(i_0)\geqslant0$，$g(i_0-1)<0$，于是有 $z\in[0,\ 1)$ 使得 $g(i_0+z)=0$，从而 $S=i_0+z$．

例 3 几何分布．$p_0=0,\ p_j=a^{j-1}(1-a)(j\geqslant1),0<a<1.$

此时
$$\psi(u)=\sum_{j=0}^{\infty}p_ju^j=\frac{(1-a)u}{1-au},$$
从(4.2)知
$$\begin{aligned}\varphi(u)&=\frac{(1-p)(1-au)[z+(1-z)u]}{[1-(a+p-pa)u](1-u)^2}\\&=(1-p)\left\{\frac{A}{1-(a+p-pa)u}+\frac{\alpha u+\beta}{(1-u)^2}\right\},\end{aligned}$$
其中
$$A=\frac{p}{(1-a)(1-p)^2}-\frac{pz}{1-p},\quad \alpha=\frac{1}{(1-a)(1-p)^2}-\frac{a+(1-a)z}{(1-a)(1-p)},$$
$$\beta=-\frac{p}{(1-a)(1-p)^2}+\frac{z}{1-p}$$
展成幂级数后知：
$$h(i+z)=\left(\frac{p}{(1-a)(1-p)}-pz\right)(a+p-pa)^i+i+z-\frac{p}{(1-a)(1-p)}\quad(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$
于是有
$$h(x)=\left(\frac{p}{(1-a)(1-p)}-p(x-[x])\right)(a+p-pa)^{[x]}+x-\frac{p}{(1-a)(1-p)}\quad(x\geqslant0).$$
解方程(2.5)得：
$$[S]=\left[\frac{\ln(p/(1-a)C)}{-\ln(p+a-pa)}\right]$$
$$S=[S]+\frac{1}{(1-a)(1-p)}-\frac{C}{p(1-p)}(a+p-pa)^{-[S]},$$
这里$[S]$是S的整数部分．这是在条件$p>(1-a)C$即$pEZ_1>C$下求得的，当$p\leqslant(1-a)C$时，由系1知$S=\dfrac{p-(1-a)C}{(1-a)(1-p)}$．

例 4 两点分布．Z_1只取0，1．$p_0=P(Z_1=0),p_2=P(Z_1=1)>0,\ p_0+p_1=1.$ $\Big($当$p_1=0$时，由系1知$S=-\dfrac{C}{1-p}\Big)$．

从(4.3)知
$$\varphi(u)=\frac{(1-p)(z+(1-z)u)}{(1-pp_0-pp_1u)(1-u)^2}=(1-p)\left(\frac{A}{1-pp_0-pp_1u}+\frac{\alpha u+\beta}{(1-u)^2}\right),$$
可求得
$$A=\frac{pp_1}{1-p}\left(1-z+\frac{pp_1}{1-p}\right),\quad \alpha=\frac{1}{1-p}\left(1-z+\frac{pp_1}{1-p}\right),\quad \beta=\frac{1}{1-p}\left(z-\frac{pp_1}{1-p}\right).$$
将$\varphi(u)$展成幂级数即可求得
$$h(i+z)=\left(1+\frac{pp_1}{1-p}-z\right)\left(\frac{p_1}{1-pp_0}\right)^{i+1}+i+z-\frac{pp_1}{1-p},$$
故
$$h(x)=\left(1+\frac{pp_1}{1-p}-(x-[x])\right)\left(\frac{pp_1}{1-pp_0}\right)^{[x]+1}+x-\frac{pp_1}{1-p}.$$
解方程(2.5)得：
$$[S]=\left[\frac{\ln\dfrac{pp_1}{C}}{\ln\dfrac{1-pp_0}{pp_1}}\right].$$

于是
$$S=[S]+\frac{1-pp_0}{1-p}-\frac{C}{1-p}\left(\frac{pp_1}{1-pp_0}\right)^{-[S]-1}.$$

(这是在条件 $pp_1>C$ 即 $pEZ_1>C$)下求得的. $pp_1\leqslant C$ 时,从系1知 $S=\frac{1}{1-p}(pp_1-C)$. 这个公式是[4]中结果的推广,[4]中只考虑了 $Z_1\equiv1$ 的情形.

对于三点分布($p_0+p_1+p_2=1$)也可用上面的方法求 S, 公式较烦,从略.

作为本文的结尾,我们指出,对于折扣模型即 $X_n=\beta^nT_n(0<\beta<1)$ 也可用本文的方法研究序列(X_n, $\mathscr{F}_n$, $n\geqslant0$)的最优停止问题,具体论述略.

参考文献

[1] Ferguson, T. S., Stopping a sum during a success run. *Ann. Statist.* **4** (1976), 252—264.

[2] Chow, Y. S., Robbins, H., Siegmund, D., *Great Expectation: The Theory of Optimal Stopping*. Houghton Mifflin Company, Boston 1971(有中译本).

[3] Hochstadt, H., *Integral Equations*, John Wiley & Sons. 1973.

[4] Starr, N., How to win a war if you must: Optimal stopping based on success runs. *Ann. Math. Statist.* **43**, (1972), 1884—1893.

SOLUTIONS OF A CLASS OF OPTIMAL STOPPING PROBLEMS

CHEN JIADING LI XIANGKE

(*Beijing University*)

Let $\{Z_i\}$ be i.i.d., and $\{\varepsilon_i\}$ be i.i.d., Bernoulli variables independent of $\{Z_i\}$. Set $T_0\equiv z$ and $T_n=\varepsilon_n(T_{n-1}+Z_n)$ for $n\geqslant1$. Using Wiener-Hopf type equations, we give a new approch to find optimal stopping rules for stopping T_n-nC, Where $C>0$. Special cases are considered in detail, some of them are difficult to treat by Ferguson's method.