线性回归系数最小二乘估计弱相合性的一个结果*

陈 希 孺
(中国科学院研究生院, 北京, 100039)

摘 要

假定线性回归模型的误差列为i.i.d., 有r阶矩, $1 \le r < 2$. [1]中证明: 若

$$S_n^{-1} = \Big(\sum_{i=1}^n x_i x_i'\Big)^{-1} = O(n^{-(2-r)/r}),$$

则β的最小二乘估计$\widehat{\beta}_n$为r阶矩相合, 因而也为弱相合. 本文证明了: 这个阶不能有任何改进: 对任何常数列$\{c_n\}$, 若

$$\liminf_{n\to\infty}(c_n n^{-(2-r)/r}) = 0,$$

则条件$S_n^{-1} = O(c_n^{-1})$对$\widehat{\beta}_n$为弱相合不再是充分的.

关键词: 线性回归模型, 相合性.
学科分类号: O212.1.

考虑线性回归模型

$$y_i = x_i'\beta + e_i, \qquad 1 \le i \le n,\ n \ge 1, \tag{1}$$

此处$\{x_i\}$是一串已知的p维向量, $\{e_i\}$是一串i.i.d.随机误差, β是未知的p维回归系数向量, 而$y_1, y_2, \cdots$是因变量的观察值, β的最小二乘估计为

$$\widehat{\beta}_n = \sum_{i=1}^n S_n^{-1} x_i y_i, \qquad S_n = \sum_{i=1}^n x_i x_i'.$$

在1980年代, 有一些工作(如[1], [2]和[3])讨论当e_i的公共分布F(期望为0)只有r阶矩而$1 \le r < 2$时, $\widehat{\beta}_n$的r阶矩相合与弱相合的问题. 所得的基本结论是: 若

$$S_n^{-1} = O(n^{-(2-r)/r}), \tag{2}$$

则$\widehat{\beta}_n$为r阶矩相合, 当然也就是弱相合, 也证明了: (2)式右边的指数不可能改进, 就是说, 对任何常数$c < (2-r)/r$, $S_n^{-1} = O(n^{-c})$不再是$\widehat{\beta}_n$为r阶矩相合的充分条件. 当时遗留下一个问题没有解决, 即(2)式中的阶可否有任何降低而仍能保持条件的充分性, 例如, 条件

$$S_n^{-1} = O(n^{-(2-r)/r}\log n)$$

对$\widehat{\beta}_n$为r阶矩相合是否为充分的?

到1995年, 作者在[4]中解决了当随机误差有r阶矩($1 \le r < 2$)时, $\widehat{\beta}_n$弱相合的充要条件问题. 利用这个结果, 可对上述问题作一个彻底的解决, 结果是下面的定理:

*本文得到国家自然科学基金的支持.
本文2000年2月28日收到.

定理 在只假定线性模型(1)中的误差e_i有r阶矩($1 \le r < 2$)的条件下, 对任何满足

$$\liminf_{n\to\infty}(c_n n^{-(2-r)/r}) = 0 \tag{3}$$

的常数列$\{c_n\}$, 条件

$$S_n^{-1} = O(c_n^{-1}) \tag{4}$$

对$\widehat{\beta}_n$为弱相合不是充分的.

证明: 必要时选择子列, 据条件(3)不妨假定

$$\lim_{n\to\infty}(c_n n^{-(2-r)/r}) = 0,$$

取定$\varepsilon_n \downarrow 0$, 可知存在自然数子列$n_1 < n_2 < \cdots$, 使

$$c_i \le \varepsilon_k i^{(2-r)/r}, \qquad \text{当} i > n_{k-1},\ k \ge 2, \tag{5}$$

$$\varepsilon_k n_k^{(2-r)/r} \ge \varepsilon_1 n_{k-1}, \qquad k \ge 2, \tag{6}$$

满足(5)、(6)的自然数列$\{n_k\}$不难用归纳的方法构造出来. 记

$$d_n = (n^{(2-r)/r} - (n-1)^{(2-r)/r})^{1/2}, \qquad n \ge 1. \tag{7}$$

简单计算表明:

$$d_n = ((2-r)/r)^{1/2} n^{(1-r)/r}(1 + O(n^{-1/2})). \tag{8}$$

在模型(1)中取$p = 1$, 定义

$$x_i = \varepsilon_k^{1/2} d_i, \qquad n_{k-1} < i \le n_k,\ \ k \ge 1\ (n_0 = 0), \tag{9}$$

对这个模型有

$$\widehat{\beta}_n = \beta + \sum_{i=1}^n u_{ni} e_i,$$

其中

$$u_{ni} = x_i / S_n, \qquad S_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

因$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > 0$, 当$n_{k-1} < n \le n_k$时, 按(5)式, 有

$$S_n \ge \varepsilon_k \sum_{i=1}^n d_i^2 = \varepsilon_k n^{(2-r)/r} \ge c_n,$$

因此(4)满足.

由(7)式易知$d_n \downarrow$. 再因$\varepsilon_k \downarrow$, 由(9)式知$0 < x_i \downarrow$. 因此有

$$0 < u_{nn} < u_{n,n-1} < \cdots < u_{n1}.$$

注意到(8)式, 有

$$R_n \equiv \max_{1\le i\le n} i u_{ni}^r \ge n u_{nn}^r = n S_n^{-r} \varepsilon_k^{r/2}((2-r)/r)^{r/2} n^{1-r}(1 + O(n^{-1/2}))^r, \tag{10}$$

当$n_{k-1} < n \le n_k$. 对这样的n, 按(6)式, 以及$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots$和$0 < d_i < 1$, 有

$$S_n \le \varepsilon_k n^{(2-r)/r} + n_{k-1}\varepsilon_1 \le 2\varepsilon_k n^{(2-r)/r},$$

由此式及(10)式, 得

$$R_n \geq O(\varepsilon_k^{-r/2}), \qquad \text{当} n_{k-1} < n \leq n_k.$$

注意到$\varepsilon_k \downarrow 0$. 得

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \infty. \tag{11}$$

由(11), 按[4]的定理1, 知$\widehat{\beta}_n$不为弱相合. 这表明(4)式并非$\widehat{\beta}_n$弱相合的充分条件. 定理证毕. □

对$r=2$, 周知([5]) $S_n^{-1} \to 0$是$\widehat{\beta}_n$弱收敛的充要条件. 对$r<2$, 为着$\widehat{\beta}_n$为弱相合, $S_n^{-1} \to 0$仍为必要. 可能会设想: 由于误差距条件的减轻(由2阶矩有限减轻到只要求r阶矩有限), 为着$\widehat{\beta}_n$为弱相合, 可能有必要S_n^{-1}应以一定的速度趋于0, 但事实上情况并非如此, 利用[4]的定理不难证明: 对任何常数列$\varepsilon_n \downarrow 0$, 条件$S_n^{-1} = O(\varepsilon_n)$对$\widehat{\beta}_n$的弱收敛也不是必要的.

参 考 文 献

[1] 陈希孺, 再论线性模型中回归系数最小二乘估计的相合性, 数学学报, 1(1981), 36–44.
[2] 成柱景, 线性模型回归系数最小二乘估计的平均相合性, 数学年刊, 4A(5)(1983), 657–664.
[3] 门志东, 线性模型中LS估计的r阶平均相合性, 科学探索, 2(1982), 81–85.
[4] 陈希孺, 低阶矩条件下线性回归最小二乘估计弱相合的充要条件, 中国科学A辑, 25(4)(1995), 349–358.
[5] Drygas, H., Weak and strong consistency of the least squares estimates in regression model, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 34(1976), 119–127.

A Result Concerning the Weak Consistency of LS Estimates of Linear Regression Coefficients

Chen Xiru

(*Graduate School, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100039*)

Suppose in linear model

$$y_i = x_i'\beta + e_i, \qquad 1 \leq i \leq n,$$

$e_1, e_2, \cdots$ are i.i.d., $\mathrm{E}e_1 = 0$, $0 < \mathrm{E}|e_1|^r < \infty$, $1 \leq r < 2$. It is shown in [1] that if

$$S_n^{-1} \triangleq \Big(\sum_{i=1}^n x_i x_i'\Big)^{-1} = O(n^{-\frac{2-r}{r}}),$$

then the LS estimate of β, $\widehat{\beta}_n$, is r-th mean consistent hence weakly consistent. In this note it is shown that for any constant sequence $\{c_n\}$ such that $\liminf(c_n n^{-(2-r)/r}) = 0$, the condition $S_n^{-1} = O(c_n^{-1})$ is no longer sufficient for $\widehat{\beta}_n$ to be weakly consistent.