# 随机环境中纯生过程的一个极限性质*

毕秋香 何凤霞
(安徽师范大学, 芜湖, 241000) (华北电力学院, 北京, 100085)

摘 要

本文证明了随机环境中纯生过程的一个强极限性质, 假设环境为一混合序列, 不必平稳, 且具有有限均值, 混合系数由环境序列中一对随机变量而定.

关键词: 随机环境, 纯生过程, 强大数定律.
学科分类号: O211.62.

## §1. 引言及主要结果

随机环境中的随机过程, 作为概率论的一个分支已被许多数学、物理学者所注重. Buffet和Hannigan在[1]中研究了一类随机环境中的纯生过程, 假设环境为一列独立同分布的随机变量, 讨论了过程的系列极限性质; Horvath和Shao([2])在其基础上, 推广了其中一结论. 本文进一步研究随机环境中的纯生过程, 假设环境为一混合序列, 不必平稳, 且具有有限均值, 混合系数由环境序列中一对随机变量而确定, 这时[1][2]中的这一极限性质仍然成立.

设$\{X_t, t\geq 0\}$为一纯生过程, 其转移概率函数$\mathsf{P}_{ij}(h)$, $i,j\geq 0$, 当$h\to 0$时

$$\mathsf{P}_{ij}(h)=\begin{cases} w_ih+o(h), & j=i+1;\\ 1-w_ih+o(h), & j=i;\\ o(h), & j\geq i+2.\end{cases}$$

其中$\{w_j, j\geq 0\}$为一列正实数, 也称$w_n$为生率. 设

$$\mathsf{P}(X_0=0)=1,\qquad \mathsf{P}(X_t=n)=\mathsf{P}_n(t), \tag{1}$$

则由定义可导出

$$\begin{cases} \mathsf{P}'_n(t)=-w_n\mathsf{P}_n(t)+w_{n-1}\mathsf{P}_{n-1}(t), & n\geq 1;\\ \mathsf{P}'_0(t)=-w_0\mathsf{P}_0(t).\end{cases}$$

易知, $\{X_t, t\geq 0\}$为一连续时间整值的马氏过程, $\{X_t=n\}$若看成质点在$t$时刻位于状态$n$, 纯生过程的定义则表明下一时刻它仅向右跳到$n+1$位置.

设$T_n$表示过程在状态$n$的逗留时间, 由马氏链的一般理论知, $T_0, T_1, T_2, \cdots$为一列服从参数分别为$w_0, w_1, w_2, \cdots$的指数分布的随机变量, 且相互独立, 即

$$\mathsf{P}\{T_{n_j}>x_j,\ 1\leq j\leq k\}=\exp\Big(-\sum_{1\leq j\leq k} w_{n_j}x_j\Big), \tag{2}$$

其中$1\leq k<\infty$, $0\leq n_1<n_2<\cdots<n_k$.

令$S_0=0$, $S_n=\sum\limits_{j=0}^{n-1}T_j$, $n\geq 1$, 则$S_n$表示过程第$n$次跳跃时刻. 易知

$$X_t=\max\{n: S_n\leq t\}, \tag{3}$$

*国家自然科学基金和广东省自然科学基金 (编号: 980287)、广发证券博士后科研基金资助项目.
本文1999年2月10日收到.

而且 $X_t$ 在有限时间内仅发生有限次跳跃的充要条件为 $\sum_{j=0}^{\infty} w_j^{-1}=\infty$.

现设 $\{w_i, i\geq 0\}$ 为一列定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ 上的随机变量, 记 $w=\{w_i, i\geq 0\}$, 我们称 $w$ 为随机环境, 称 $\{X_t, t\geq 0\}$ 为随机环境中的纯生过程, 对 $w$ 的每一现实, 我们称为一环境.

在 $\{w_j\}_{j=0}^{\infty}$ 为一列独立同分布非负随机变量的情形下, Buffet 和 Hannign 在 [1] 中得到下列结果:

**定理 A** 1) 若存在 $\varepsilon>0$, $\mathsf{E}w_0^{-1-\varepsilon}<\infty$, 则对几乎所有的环境 $w$,

$$\mathsf{P}_w\Big\{\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{t}=(\mathsf{E}w_0^{-1})^{-1}\Big\}=1;$$

2) 若 $\mathsf{E}w_0^{-1}<\infty$, 则对几乎所有的环境 $w$,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{t}=(\mathsf{E}w_0^{-1})^{-1}\ \text{依概率成立}.$$

Horväth 和 Shao[2] 在上述假设基础上, 得到: 若 $\mathsf{E}w_0^{-1}<\infty$, 则

$$\mathsf{P}_w\Big\{\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{t}=(\mathsf{E}w_0^{-1})^{-1}\Big\}=1.$$

本文的主要结果是:

**定理** 假设 $\{w_j\}_{j=0}^{\infty}$ 为一列非负同分布的随机变量序列, $\{w_j^{-1}\}_{j=0}^{\infty}$ 满足混合条件, 即

$$\beta(w_i^{-1},w_j^{-1})=\sup\{|\mathsf{P}(w_j^{-1}\in B|w_i^{-1}\in A)-\mathsf{P}(w_j^{-1}\in B)|:\ A\in\mathcal{B},\ B\in\mathcal{B},\ \mathsf{P}(w_i^{-1}\in A)>0\},\tag{4}$$

其中 $\mathcal{B}$ 为 $R^1$ 上的 Borel $\sigma-$域, $\varphi(\cdot)$ 为非负函数, 满足

$$\beta(w_i^{-1},w_j^{-1})\leq\varphi(|i-j|),\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\varphi^{\frac12}(n)<\infty,\tag{5}$$

若 $\mathsf{E}w_0^{-1}<\infty$, 则对几乎所有的环境 $w$, 有

$$\mathsf{P}_w\Big\{\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{t}=(\mathsf{E}w_0^{-1})^{-1}\Big\}=1.\tag{6}$$

**注** 当 $\{w_j\}_{j=0}^{\infty}$ 为 i.i.d 情形, 定理的条件自然满足, 结论显然成立. 而且比较非随机环境情形, 此时纯生过程的转移速率 $w=\mathsf{E}w_0$, 为一 Poisson 过程 $\{N_t, t\geq 0\}$, 而已知, $\lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{t}=w=\mathsf{E}w_0$, 又由 Jensen 不等式知: $(\mathsf{E}w_0^{-1})^{-1}\leq\mathsf{E}w_0$, 因此在随机环境中过程的运动比在非随机环境下的运动要缓慢一些.

## §2. 主要结果的证明

为了证明定理, 需要下列引理.

**引理 1** 假设 $\sum_{j=0}^{\infty}w_j^{-1}=\infty$, $w_j^{-1}<\infty$, $j=0,1,2,\cdots$, 则对任意 $\alpha>0$, 有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{X_t}{t^\alpha}=\Big(\liminf_{n\to\infty}n^{-\frac1\alpha}\sum_{j=0}^{n-1}T_j\Big)^{-\alpha},\qquad \text{a.s.},\tag{7}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{X_t}{t^\alpha}=\Big(\limsup_{n\to\infty}n^{-\frac1\alpha}\sum_{j=0}^{n-1}T_j\Big)^{-\alpha},\qquad \text{a.s.},\tag{8}$$

特别若右式极限存在, 则有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{t^\alpha}=\Big(\lim_{n\to\infty}n^{-\frac1\alpha}\sum_{j=0}^{n-1}T_j\Big)^{-\alpha},\qquad \text{a.s.}.\tag{9}$$

**证明:** 参见文 [1]. □

**引理 2** 设 $\{\eta_i\}_{i=0}^{\infty}$ 为一列随机变量, $\beta(\eta_i,\eta_j)$ 为形如定理中所定义的混合系数, 若 $\mathsf{E}\eta_i^2<\infty$, $\mathsf{E}\eta_j^2<\infty$, $i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots$, 则有

$$|\mathsf{E}\eta_i\eta_j-\mathsf{E}\eta_i\mathsf{E}\eta_j|\leq 2[\beta(\eta_i,\eta_j)\mathsf{E}\eta_i^2\mathsf{E}\eta_j^2]^{\frac12}.\tag{10}$$

**证明:** 类似于[3]中$P_{170}$引理1, 尽管我们这里序列可以是非平稳的. □

**引理3** 设$\xi_1,\xi_2,\cdots$为一列同分布的随机变量, $\mathsf{E}|\xi_1|<\infty$, 令:

$$\beta(\xi_i,\xi_j)=\sup\{|\mathsf{P}(\xi_j\in B|\xi_i\in A)-\mathsf{P}(\xi_j\in B)|:\ A\in\mathcal{B},\ B\in\mathcal{B},\ \mathsf{P}(\xi_i\in A)>0\},$$

其中$\mathcal{B}$为$R^1$上的Borel $\sigma-$域, 假设$\beta(\xi_i,\xi_j)\le\varphi(|i-j|)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi^{\frac12}(n)<\infty$, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mathsf{E}\xi_1,\qquad \text{a.s..}\tag{11}$$

**证明:** 因$\xi_i=\xi_i^+-\xi_i^-$, $\xi_i^+=\xi_iI_{\{\xi_i>0\}}$, $\xi_i^-=-\xi_iI_{\{\xi_i\le0\}}$, 显然$\xi_i^+$, $\xi_i^-$满足引理的假设. 故不失一般性, 假设$\xi_i\ge0$, 令

$$\eta_i=\xi_iI_{\{\xi_i\le i\}},\qquad S_n^*=\sum_{i=1}^{n}\eta_i.$$

因

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{P}(\xi_i\ne\eta_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{P}(\xi_i>i)\le\mathsf{E}\xi_1<\infty,$$

故$\dfrac{S_n}{n}$与$\dfrac{S_n^*}{n}$收敛等价, 只需证明

$$\frac{S_n^*}{n}\longrightarrow\mathsf{E}\xi_1,\qquad \text{a.s..}\tag{12}$$

现固定$\alpha>1$, 记$k_n=[\alpha^n]$, 由引理2,

$$\begin{aligned}DS_{k_n}^*&=\sum_{i=1}^{k_n}D\eta_i+2\sum_{1\le i<j\le k_n}\mathsf{Cov}\,(\eta_i,\eta_j)\\
&\le\sum_{i=1}^{k_n}D\eta_i+4\sum_{i=1}^{k_n-1}\sum_{j=i+1}^{k_n}\varphi^{\frac12}(|i-j|)\mathsf{E}^{\frac12}|\eta_i|^2\cdot\mathsf{E}^{\frac12}|\eta_j|^2\\
&\le\sum_{i=1}^{k_n}D\eta_i+4\sum_{i=1}^{k_n-1}\sum_{j=1}^{k_n-i}\varphi^{\frac12}(j)(\mathsf{E}\eta_i^2\cdot\mathsf{E}\eta_{i+j}^2)^{\frac12}\\
&=\sum_{i=1}^{k_n}D\eta_i+4\sum_{j=1}^{k_n-1}\varphi^{\frac12}(j)\Big(\sum_{i=1}^{k_n-j}(\mathsf{E}\eta_i^2\cdot\mathsf{E}\eta_{j+i}^2)^{1/2}\Big)\\
&\le\sum_{i=1}^{k_n}D\eta_i+2\sum_{j=1}^{k_n-1}\varphi^{\frac12}(j)\Big(\sum_{i=1}^{k_n-j}(\mathsf{E}\eta_i^2+\mathsf{E}\eta_{j+i}^2)\Big)\\
&\le\sum_{i=1}^{k_n}D\eta_i+4\Big(\sum_{j=1}^{k_n-1}\varphi^{\frac12}(j)\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k_n}\mathsf{E}\eta_i^2\Big).\end{aligned}$$

故

$$DS_{k_n}^*\le\Big(1+4\sum_{j=1}^{k_n-1}\varphi^{\frac12}(j)\Big)\Big(\sum_{i=1}^{k_n}\mathsf{E}\eta_i^2\Big).\tag{13}$$

对任意的$\varepsilon>0$, 令$C=\varepsilon^{-2}\Big(1+4\sum\limits_{j=1}^{k_n-1}\varphi^{\frac12}(j)\Big)<\infty$, $C_1$为可以变化的常数, $F(x)$为$\xi_1$的分布函数, 则

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\Big\{\Big|\frac{S_{k_n}^*-\mathsf{E}S_{k_n}^*}{k_n}\Big|>\varepsilon\Big\}\le\varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{DS_{k_n}^*}{k_n^2}\le C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n^2}\sum_{i=1}^{k_n}\mathsf{E}\eta_i^2\\
\le&C_1\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathsf{E}\eta_i^2}{i^2}=C_1\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\int_0^i x^2dF(x)=C_1\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\Big(\sum_{k=0}^{i-1}\int_k^{k+1}x^2dF(x)\Big)\\
=&C_1\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\int_k^{k+1}x^2dF(x)\le C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\int_k^{k+1}x^2dF(x)\\
\le&C_1\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}xdF(x)<\infty.\end{aligned}$$

故由Borel-Cantelli引理知

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{S_{k_n}^*-\mathsf{E}S_{k_n}^*}{k_n}\Big|>\varepsilon,\ \text{i.o.}\Big)=0,$$

又 $\mathsf{E}\xi_1=\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}\eta_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathsf{E}S_{k_n}^*}{k_n}$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{k_n}^*}{k_n}=\mathsf{E}\xi_1,\qquad \text{a.s..}\tag{14}$$

由于 $k_n=[\alpha^n]$, $\alpha>1$, 易知对任一充分大的正整数 $m$, 总存在 $n$, 使 $k_n\le m<k_{n+1}$, 且当 $m\to\infty$ 时, 有 $n\to\infty$, 而由 $\eta_i$ 的非负性知, $S_{k_n}^*\le S_m^*<S_{k_{n+1}}^*$, 因此

$$\frac{k_n}{k_{n+1}}\cdot\frac{S_{k_n}^*}{k_n}\le\frac{S_m^*}{m}\le\frac{k_{n+1}}{k_n}\cdot\frac{S_{k_{n+1}}^*}{k_{n+1}}.$$

故

$$\frac{1}{\alpha}\mathsf{E}\xi_1\le\liminf_{m\to\infty}\frac{S_m^*}{m}\le\limsup_{m\to\infty}\frac{S_m^*}{m}\le\alpha\mathsf{E}\xi_1,\qquad \text{a.s..}\tag{15}$$

上式对任意 $\alpha>1$ 成立, 取 $\alpha_n\downarrow 1$, 引理即得证. □

**定理的证明:** 由引理1, 只须证, 对 $w$ 的每一现实, $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}\sum\limits_{j=0}^{n-1}T_j=\mathsf{E}w_0^{-1}$, $\mathsf{P}_w$—a.s., 而

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}T_j=\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}(T_j-w_j^{-1})+\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}w_j^{-1}.$$

由定理条件及引理3知, $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-1}\sum\limits_{j=0}^{n-1}w_j^{-1}=\mathsf{E}w_0^{-1}$, a.s., 因此只须证

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}(T_j-w_j^{-1})=0,\qquad \mathsf{P}_w-\text{a.s..}\tag{16}$$

而 $\mathsf{E}T_j=w_j^{-1}$, $DT_j=w_j^{-2}$, $T_j$ 又相互独立, 由[4]中 $P_{272}$ Th.12知, 只须证

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w_n^{-2}}{n^2}<\infty,\qquad \text{a.s..}\tag{17}$$

令 $\tau_n=w_n^{-1}$, $\mathsf{E}\tau_n=\mathsf{E}w_n^{-1}<\infty$, 故对任意 $\varepsilon>0$, 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|\tau_n|\ge n\varepsilon)<\infty$, 由 $\varepsilon$ 的任意性知, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tau_n}{n}=0$, a.s., 故只须证

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_n^2}{n^2}I_{\{\tau_n\le n\}}<\infty,\qquad \text{a.s..}\tag{18}$$

又

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_n^2}{n^2}I_{\{\tau_n\le n\}}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\mathsf{E}\tau_n^2I_{\{\tau_n\le n\}}\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}(\tau_0^2I_{\{j-1<\tau_0<j\}})\\
=&\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}n^{-2}\mathsf{E}(\tau_0^2I_{\{j-1<\tau_0<j\}})\\
\le&\sum_{j=1}^{\infty}(j^{-2}+j^{-1})\mathsf{E}(\tau_0^2I_{\{j-1<\tau_0<j\}})\\
\le&\sum_{j=1}^{\infty}(j^{-1}+1)\mathsf{E}\tau_0I_{\{j-1<\tau_0<j\}}\\
\le&2\sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{E}\tau_0I_{\{j-1<\tau_0<j\}}<\infty,
\end{aligned}$$

故(18)式成立, 定理得证. □

**致谢** 衷心感谢导师戴永隆教授的指导.

## 参考文献

[1] E. Buffet and P. Hannigan, Directed random walks in random environments, *J. Statist. Phys.*, **65**(1991), 645–672.
[2] Lajos Horv̈ath and Qi-Man Shao, A note on the law of large numbers for directed random walks in random environments, *Stoch. Proc. Appl.*, **54**(1994), 275–279.
[3] Patrick Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley, New York, 1968.
[4] V.V. Petrov, *Sum of Independent Random Variables*, Springer-Verlag, New York, 1975.

# A Limit Property about Pure Birth Process in Random Environments

BI QIUXIANG
(*Anhui Normal University, Wuhu, 241000*)
HE FENGXIA
(*North China Electric Power University, Beijing, 100085*)

In this article, we investigate the pure-birth processes in random environments. The environments are mixing sequences with finite mean and not necessarily stationary. The mixing coefficient is involved only a pair of variables in the sequences. We prove an almost surely limit property about the process, which is generalization of a result given in [1,2].