M-估计下误差密度核估计的相合性

刘东海
(中国人民武装警察部队学院指挥系, 廊坊, 065000)

缪柏其　　彭　衡
(中国科学技术大学统计与金融系, 合肥, 230026)

摘　要

线性模型 $Y_i = x_i'\beta + e_i$, $i = 1, 2, \cdots$, 其中 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ i.i.d., 有未知密度 $f(x)$. 本文讨论了在对 β 作一般 M-估计后, 基于残差做出的误差密度核估计的相合性. 在比文献弱的条件下, 证明了误差密度核估计的逐点弱相合、逐点强相合和一致强相合.

关键词: M-估计, 残差, 核估计, 相合性.

学科分类号: O212.7.

§1. 引言与主要结果

考虑线性模型

$$Y_i = x_i'\beta + e_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, \tag{1.1}$$

其中 β 为 p 维未知回归系数, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为固定设计点列, 其中 x_i 为 $p\times 1$ 向量, $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是i.i.d.随机变量, 且有未知密度 $f(x)$.

在传统的回归分析中, 通常在假定 $e_i \sim N(0, \sigma^2)$ 下, 采用 β 的LSE作统计推断. 若 $e_i \sim N(0, \sigma^2)$ 不成立, 则 β 的LSE将失去很多优良性质. 在 Y 对 X 的回归为线性, 误差分布非正态时, Huber[1] 提出一种稳健估计替代LSE, 并研究了其优良性质. 由此自然提出这样的问题: 在模型(1.1)中怎样确切判断 $e_i \sim N(0, \sigma^2)$ 是否成立? 为此要对误差分布进行估计和作拟合检验. 另一方面, 作回归诊断时, 亦须估计误差分布. 再者, 对 T 型截断模型, J.L.Powell[2] 提出对 β 采用LADE, 并证明了该估计的渐近正态性, 但其渐近方差含有未知误差密度 $f(x)$. 要对 β 作检验, 必须先估计误差分布. 文献[3]涉及误差分布估计的问题. 柴根象[4],[5] 对 β 采用LSE和LADE估计后的误差分布估计问题作过研究, 并在文[6]中提出了 $f(x)$ 的Rosenblatt估计并证明了其相合性. 张文扬[7] 将[6]的结果推广到核估计, 并在文[8]中对采用 β 的一般 M-估计下误差密度核估计的相合性, 但需要设计点列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 有界和 $\dfrac{1}{n}S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i}^{n} x_i x_i' \to \Sigma > 0$ 两个较强的条件. 本文则成功地去掉了 $|x_i| < M$ 和 $\dfrac{1}{n}S_n \to \Sigma > 0$ 这两个不甚满意的条件, 所需条件与陈希孺、赵林城[10] M-估计条件相似.

为导出我们的结果, 引入如下记号和条件:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i', \qquad a = (a_1, \cdots, a_p), \qquad \|a\|^2 \equiv a'a, \qquad |a| = \max_{1\le i\le p} |a_i|,$$

$$x_{ni} = S_n^{-1/2} x_i, \qquad d_n = \max_{1\le i\le p} x_i' S_n^{-1} x_i,$$

$$\widehat{\beta}_n \text{ 满足 } \sum_{i=1}^{n} \rho(Y_i - x_i\widehat{\beta}_n) = \min_{\beta} \sum \rho(Y_i - x_i\beta).$$

A_1: $\rho(x)$ 为 R^1 上的凸函数, 其左、右导数分别记为 ψ_+、ψ_-; 存在 ψ, $\psi_- \le \psi \le \psi_+$, 使 $\mathsf{E}\psi(e_i) = 0$; 当 $|u|$ 充分小时, $G(u) \equiv \mathsf{E}\psi(e_i + u)$ 存在有限且 $G(u)$ 存在, 记 $g \equiv G(0)$.

A_2: $0 < \sigma^2 \equiv \mathsf{E}\psi^2(e_i) < \infty$, $\lim\limits_{u\to 0} \mathsf{E}(\psi(e_i + u) - \psi(e_i))^2 = 0$.

本文1999年4月19日收到, 2000年4月5日收到修改稿.

A_3: 存在 n_0, 当 $n \ge n_0$ 时, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i x_i'$ 为 p 阶正定方阵.

A_4: 存在 c_0 以及 h_0, $\forall h \in (0, h_0)$, $u \in R^1$, $|\varphi(u+h) - \varphi(u)| < c_0$.

A_5: $d_n = o(\log^{-2} n)$.

上述条件中, A_1–A_4 是 M-估计渐近正态性所需条件, A_5 比渐近正态性所需条件强.

残差 $\widehat{e}_i = Y_i - x_i\widehat{\beta}_n$, 则 $f(x)$ 的 Rosenblatt 估计为

$$\widetilde{f}_n(x) \equiv \frac{1}{2na_n} \sum_{i=1}^{n} I\{x - a_n \le \widehat{e}_{ni} \le x + a_n\}. \tag{1.2}$$

$f(x)$ 的核估计为

$$\widehat{f}_n(x) = \frac{1}{na_n} \sum_{i=1}^{n} K\Big(\frac{x - \widehat{e}_{ni}}{a_n}\Big), \tag{1.3}$$

其中 $K(x)$ 满足:

B_1: $K(x)$ 在 R^1 上有界且 Rieman 可积.

B_2: $K(x) \ge 0$, $\int K(x)dx = 1$.

B_3: 存在 M, 当 $|x| > M$ 时, $K(x) = 0$.

§2. 有关引理

引理 1 (Bennet) 设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 独立, $\mathsf{E}X_i = 0$, $|X_i| \le b < \infty$, $1 \le i \le n$, 其中 b 为常数, 记 $\sigma^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{Var}(X_i)/n$, 则对 $\forall u > 0$ 有

$$\mathsf{P}\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{n} X_i/n\Big| \ge u\Big\} \le 2\exp\Big\{-nu^2\Big/\Big(2\sigma^2 + \frac{2}{3}bu\Big)\Big\}. \tag{2.1}$$

见 [10] P_{65}.

引理 2 设 μ_n 及 μ 为一维经验分布及理论分布, $a > 0$, L_a 是长度为 a 的区间, 则对任意 $\varepsilon > 0$, $0 < b < \dfrac{1}{4}$. 当 $n > \max\Big(\dfrac{1}{b}, \dfrac{8b}{\varepsilon}\Big)$ 时有

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\{\sup\{|u_n(I_a) - u(I_a)| : 0 \le u(I_a) \le b\} \ge \varepsilon\}\\ \le{}&16n^2\exp\{-n\varepsilon^2/(64b + 4\varepsilon)\} + 8n\exp\{-nb/10\}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

见 [4].

引理 3 在模型 (1.1) 下, 若 A_1–A_5 成立, 则

$$S_n^{1/2}(\widehat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{w} N(0, g^{-2}\sigma^2 I_p). \tag{2.3}$$

见 [10] 定理 4.1.

引理 4 若 $d_n^{-1/2}a_n \to \infty$, 则

$$n^{1/2}a_n \to \infty. \tag{2.4}$$

证明: $nd_n \ge \sum\limits_{i=1}^{n} x_i S_n^{-1} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(S_n^{-1}x_i x_i) = \mathrm{tr}(I_p) = p$, 因为 $d_n \ge \dfrac{p}{n}$, 故 $n^{1/2}a_n \ge \Big(\dfrac{p}{d_n}\Big)^{1/2} a_n \to \infty$. □

引理 5 (Hoeffding) 设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 独立, $\mathsf{E}X_1 = 0$, $a_1 \le |X_1| \le b_1$, $1 \le i \le n$, 其中 a_i、b_i 是常数, 则对任意 $u > 0$ 有

$$\mathsf{P}\Big\{\Big|\sum_{i=1}^{n} X_i\Big| \ge u\Big\} \le 2\exp\Big\{-2u^2\Big/\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2\Big\}. \tag{2.5}$$

引理6 若ρ为定义于R^p上的凸函数, S是R^p上的一封闭曲面, 将R^p分成内外两部分A、B, 若β_0是A的内点, 并且$\inf\limits_{\beta\in S}\Big\{\sum\limits_{i=1}^n\rho(Y_i-x_i'\beta)\Big\}>\sum\limits_{i=1}^n\rho(Y_i-x_i'\beta_0)$, 则当$\beta\in B$时, $\sum\limits_{i=1}^n\rho(Y_i-x_i'\beta)>\sum\limits_{i=1}^n\rho(Y_i-x_i'\beta_0)$.

引理7 在模型(1.1)下, 若A_1–A_5成立, 且存在常数$M<\infty$, 使$\mathsf{P}(|e_1|<M)=1$, 则

$$\|S_n^{1/2}(\widehat{\beta}_n-\beta)\|=O(\log n)\qquad \text{a.s.}. \tag{2.6}$$

证明: 不妨令$\beta=0$, 任给$a>0$, 记

$$a_n=[a\log n],\qquad D_n=\{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p):-a_n\le\beta_1\le a_n,\ i=1,\cdots,p\},$$
$$\phi_{ni}(\beta)=\rho(e_i)-\rho(e_i-x_{ni}'\beta),\qquad \Lambda_{ni}(\beta)=\mathsf{E}\phi_{ni}(\beta),\qquad R_{ni}(\beta)=\phi_{ni}(\beta)-\Lambda_{ni}(\beta).$$

把超立方体D_n划分为a_n^{2p}个不相交的小立方体$\{B_{j_1}:1\le j_1\le a_n^{2p}\}$, 使其最长边小于1; 再将$B_{j_1}$分割成$a_n^{2p}$个相等的超立方体$\{B_{j_1j_2}:1\le j_1,\ j_2\le a_n^{2p}\}$; 这样一直划分下去, 把$D_n$划分成$\{B_{j_1\cdots j_{m+1}}:1\le j_1\le a_n^{2p},\ 1\le i\le m+1\}$, 其边长最大为$a_n^{-2m}$.

$\forall\varepsilon>0$, 记$B_{j_1\cdots j_m}$的中心为$b_{j_1\cdots j_m}$,

$$U_0=\sum_{j_1}^{a_n^{2p}}\mathsf{P}\Big\{\Big|\sum_{i=1}^n R_{ni}(b_{j_1})\Big|\ge\frac{\varepsilon}{3}a_n^2\Big\},$$
$$U_m=\sum_{j_1\cdots j_{m+1}=1}^{a_n^{2p}}\mathsf{P}\Big\{\Big|\sum_{i=1}^n[R_{ni}(b_{j_1\cdots j_m})-R_{ni}(b_{j_1\cdots j_{m+1}})]\Big|\ge\frac{\varepsilon}{3^{m-1}}a_n^2\Big\},$$
$$Q_m=\sum_{j_1\cdots j_m=1}^{a_n^{2p}}\mathsf{P}\Big\{\sup_{\beta\in B_{j_1\cdots j_m}}\Big|\sum_{i=1}^n[R_{ni}(\beta)-R_{ni}(b_{j_1\cdots j_m})]\Big|\ge\frac{\varepsilon}{3^{m-1}}a_n^2\Big\}.$$

则易见

$$Q_m\le U_m+Q_{m+1},$$

且

$$V\equiv\mathsf{P}\Big\{\sup_{\beta\in D_n}\Big|\sum_{i=1}^n[R_{ni}(\beta)\Big|\ge 2\varepsilon a_n^2\Big\}\le U_0+Q_1,$$

于是, 对$\forall N\in\mathrm{N}$, 有

$$V\le\sum_{m=0}^N U_m+Q_{N+1}. \tag{2.7}$$

当$\beta\in B_{j_1\cdots j_m}$时, 以概率1成立

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^n[\phi_{ni}(\beta)-\phi_{ni}(b_{j_1\cdots j_m})]\Big|=\Big|\sum_{i=1}^n\int_{-x_{ni}'\beta}^{-x_{ni}'b_{j_1\cdots j_m}}\psi(e_i+u)du\Big|\\
\le&\Big|\sum_{i=1}^n\int_{-x_{ni}'\beta}^{-x_{ni}'b_{j_1\cdots j_m}}[\psi(e_i+u)-\psi(e_i)]du\Big|+\sum_{i=1}^m|\psi(e_i)x_{ni}'(b_{j_1\cdots j_m}-\beta)|\\
\le&c_0\sum_{i=1}^n\|x_{ni}'\|\|b_{j_1\cdots j_m}-\beta\|+\Big[\sum_{i=1}^n\psi^2(e_i)\Big]^{1/2}\Big[\sum_{i=1}^n x_{ni}'x_{ni}\Big]^{1/2}\|b_{j_1\cdots j_m}-\beta\|\\
\le&[c_0\sqrt{np}+\sqrt{n}\sigma+o(\sqrt{n})]/a_n^{2(m-1)}.
\end{aligned}$$

当n充分大时, 可找到M_n, 当$m>M_n$时, $[c_0\sqrt{np}+\sqrt{n}\sigma+o(\sqrt{n})]/a_n^{2(m-1)}\le\varepsilon a_n^2/3^{m-1}$, 因此

$$Q_m=0.$$

由(2.7)得

$$V\le\sum_{m=0}^{M_n}U_m. \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n}[\phi_{n_1}(b_{j_1})]^2=\sum_{i=1}^{n}\Big|\int_0^{-x_{ni}b_{j_1}}\psi(e_i+u)du\Big|^2$$
$$\le 2\sum_{i=1}^{n}\Big[\int_0^{-x_{ni}b_{j_1}}[\psi(e_i+u)-\psi(e_i)]du\Big]^2+2\sum_{i=1}^{n}\psi^2(e_i)|x'_{ni}b_{j_1}|^2$$
$$\le 2(c_0^2+n\sigma^2 d_n)pa_n^2\equiv c_1(n)a_n^2,$$
$$\sum_{i=1}^{n}[\phi_{ni}(b_{j_1\cdots j_m})-\phi_{ni}(b_{j_1\cdots j_{m+1}})]^2\le\sum_{i=1}^{n}\Big[\int_{-x_{ni}b_{j_1\cdots j_{m+1}}}^{-x'_{ni}b_{j_1\cdots j_m}}\psi(e_i+u)du\Big]^2$$
$$\le 2c_0^2\sum_{i=1}^{n}|x'_{ni}(b_{j_1\cdots j_m}-b_{j_1\cdots j_{m+1}})|^2+\sum_{i=1}^{n}\psi^2(e_i)\|x_{ni}\|^2\|b_{j_1\cdots j_m}-b_{j_1\cdots j_{m+1}})\|^2$$
$$\le 2c_1(n)a_n^{-4(m-1)}.$$

上两式以概率1成立.

由Hoeffding不等式有

$$U_0\le 2a_n^{2p}\exp\Big\{-2\Big(\frac{\varepsilon a_n^2}{3}\Big)^2\Big/[c_1(n)a_n^2]\Big\},$$
$$U_m\le 2a_n^{2p(m-1)}\exp\Big\{2\Big(\frac{\varepsilon a_n^2}{3^{m+1}}\Big)^2\Big/[c_1(n)a_n^{-4(m-1)}]\Big\}. \tag{2.9}$$

由(2.8)式得:

$$V\le 2a_n^{2p}\exp\Big\{-2\Big(\frac{\varepsilon a_n^2}{3}\Big)^2\Big/[c_1(n)a_n^2]\Big\}+\sum_{m=1}^{M_n}2a_n^{2p(m-1)}\exp\Big\{2\Big(\frac{\varepsilon a_n^2}{3^{m+1}}\Big)^2\Big/[c_1(n)a_n^{-4(m-1)}]\Big\}$$
$$\equiv b(n,\varepsilon,M_n).$$

$$|x'_{ni}\beta|\le\|x'_{ni}\|\|\beta\|\le d_n^{1/2}p^{1/2}a_n\to 0.$$

当$x'_{ni}\beta<0$时,

$$\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{ni}(\beta)=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\int_0^{-x'_{ni}\beta}\psi(e_i+u)du=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\int_0^{-x'_{ni}\beta}[\psi(e_i+u)-\psi(u)]du$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}\int_0^{-x'_{ni}\beta}\{[\psi(e_i+u)-\psi(u)]^2\}^{1/2}du$$
$$\le\varepsilon'\sum_{i=1}^{n}|x'_{ni}\beta|\le\sqrt{np}a_n\varepsilon'. \tag{2.10}$$

上式由条件A_2得到, 其中ε'满足, 当n充分大时

$$\varepsilon'\sqrt{np}a_n<\frac{\varepsilon}{3}a_n^2.$$

同理可得, 当$x'_{ni}\beta>0$时, (2.10)成立. 因此

$$\mathsf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\rho(e_i)-\inf_{|\beta|=a_n}\sum_{i=1}^{n}\rho(e_i-x'_{ni}\beta)>0\Big\}\le b(n,\varepsilon,M_n). \tag{2.11}$$

因为ρ为凸函数, 由引理6和(2.11)得

$$\mathsf{P}(\|s_n^{1/2}\widehat{\beta}_n\|\ge a\log n)\le b(n,\varepsilon,M_n).$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}b(n,\varepsilon,M_n)<\infty$, $\lim_{M_n\to\infty}b(n,\varepsilon,M_n)<\infty$, 由Borel-Bantelli引理, 得到

$$\mathsf{P}(\|s_n^{1/2}\widehat{\beta}_n\|\ge a\log n,\ \text{i.o.})=0. \tag{2.12}$$

由a的任意性可知引理成立. □

§3. 主要结果

设$C(f)$表示$f(x)$的连续点的全体.

定理1 (逐点弱相合)若$0 < a_n \to 0$, $d_n^{-1/2} a_n \to \infty$且$A_1$–$A_5$成立, $K(\bullet)$满足B_1–B_3, 则

$$\widehat{f}_n(x) \xrightarrow{\mathsf{P}} f(x), \qquad \forall x \in c(f). \tag{3.1}$$

证明: 记

$$f_n(x) \equiv \frac{1}{2na_n} \sum_{i=1}^{n} I\{x - a_n \le e_i \le x + a_n\}, \tag{3.2}$$

则易证$\mathsf{E} f_n(x) \to f(x)$.

$$\mathsf{Var}\,(f_n(x)) = \frac{1}{4n^2 a_n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(x - a_n \le e_i \le x + a_n) \to 0,$$

所以

$$f_n(x) \xrightarrow{\mathsf{P}} f(x). \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
|\widetilde{f}_n(x) - f_n(x)| \le & \frac{1}{2na_n} \sum_{i=1}^{n} I\{x - a_n - \|x_i'(\widehat{\beta}_n - \beta)\| \le e_i \le x - a_n\} \\
& + \frac{1}{2na_n} \sum_{i=1}^{n} I\{x - a_n \le e_i \le x - a_n + \|x_i'(\widehat{\beta}_n - \beta)\|\} \\
& + \frac{1}{2na_n} \sum_{i=1}^{n} I\{x + a_n - \|x_i'(\widehat{\beta}_n - \beta)\| \le e_i \le x + a_n\} \\
& + \frac{1}{2na_n} \sum_{i=1}^{n} I\{x + a_n \le e_i \le x + a_n + \|x_i'(\widehat{\beta}_n - \beta)\|\} \\
\equiv & I_1 + I_2 + I_3 + I_4,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

由引理3知

$$S_n^{1/2}(\widehat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{w} N(0, g^{-2}\sigma^2 I_p).$$

则对任意$\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, 当n充分大时

$$\mathsf{P}(\|S_n^{1/2}(\widehat{\beta}_n - \beta)\| > \eta) < \varepsilon. \tag{3.5}$$

而对任意$\varepsilon' > 0$, 当n充分大时, 由(3.4)有

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{I_1 > \varepsilon\} \le & \varepsilon + \mathsf{P}\{I_1 > \varepsilon, \|S_n^{1/2}(\widehat{\beta}_n - \beta)\| \le \eta\} \\
\le & \varepsilon + \mathsf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n} I\{x - a_n - d_n^{1/2}\eta \le e_i \le x - a_n\} \ge 2na_n\varepsilon\Big\} \\
\le & \varepsilon + n\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\{x - a_n - d_n^{1/2}\eta \le e_i \le x - a_n\}\Big/[4n^2 a_n^2 \varepsilon^2] \\
\le & \varepsilon + \frac{d_n^{1/2}\eta}{2a_n\varepsilon}(f(x) + o(1)),
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \sup \mathsf{P}(I_1 > \varepsilon') \le \varepsilon,$$

即

$$I_1 \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{3.6}$$

同理可证

$$I_2, I_3, I_4 \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{3.7}$$

由 (3.4), (3.6), (3.7) 得

$$\widetilde{f}_n(x) - f_n(x) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad x \in C(f). \tag{3.8}$$

由 (3.3) 和 (3.8) 有

$$\widetilde{f}_n(x) \xrightarrow{\mathsf{P}} f(x), \qquad x \in C(f).$$

仿 [7] 定理 1 的证明方法, 利用 $\widetilde{f}_n(x) \xrightarrow{\mathsf{P}} f(x)$, $x \in C(f)$, 易证

$$\widehat{f}_n(x) \xrightarrow{\mathsf{P}} f(x), \qquad x \in C(f). \qquad \square$$

定理 2 (逐点强相合) 在定理 1 的条件下, 如果 $\dfrac{d^{-1/2}a_n}{\log n} \to 0$, 则

$$\widehat{f}_n(x) \xrightarrow{\text{a.s.}} f(x), \qquad x \in C(f). \tag{3.9}$$

证明: 易证

$$\mathsf{E}f_n(x) \to f(x). \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} f_n(x) - \mathsf{E}f_n(x) =& \frac{1}{2na_n}\sum_{i=1}^{n}[I\{x - a_n \le e_i \le x + a_n\} - \mathsf{E}I\{x - a_n \le e_i \le x + a_n\}] \\ \equiv& \frac{1}{2na_n}\sum_{i=1}^{n} J_i, \end{aligned} \tag{3.11}$$

因 $J_1, \cdots, J_n$, i.i.d., $|J_i| \le 1$, $\mathsf{E}J_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 且

$$\mathsf{Var}\, J_i \le \mathsf{P}\{x - a_n \le e_i \le x + a_n\} = 2a_n f(x)[1 + o(1)] \le 4a_n f(x),$$

由引理 1 知, 对 $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(|f_n(x) - \mathsf{E}f_n(x)| \ge \varepsilon) \le& \mathsf{P}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n} J_i\Big| \ge 2na_n\varepsilon\Big) \\ \le& 2\exp\left\{\frac{-4n^2a_n^2\varepsilon^2}{8na_nf(x) + \frac{4}{3}na_n\varepsilon}\right\} \\ =& 2\exp\left\{\frac{-3na_n\varepsilon^2}{6f(x) + \varepsilon}\right\}, \end{aligned}$$

所以

$$f_n(x) - \mathsf{E}f_n(x) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0. \tag{3.12}$$

由 (3.10) 和 (3.12) 知

$$f_n(x) \xrightarrow{\text{a.s.}} f(x), \qquad x \in C(f). \tag{3.13}$$

由 (3.4)

$$|\widetilde{f}_n(x) - f_n(x)| \le I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

利用引理7有

$$I_1 \le \frac{1}{2na_n}\sum_{i=1}^{n} I\{x-a_n-d_n^{1/2}\log n \le e_i \le x-a_n\} \qquad \text{a.s.},$$

由于

$$\begin{aligned} f_{n_1}(x) \equiv & \frac{1}{2na_n}\mathsf{P}\{x-a_n-d_n^{1/2}\log n \le e_i \le x-a_n\} \\ \le & \frac{d_n^{1/2}\log n}{2a_n}2f(x) = \frac{d_n^{1/2}\log n}{a_n}f(x) \to 0, \end{aligned}$$

记

$$\xi_{n_i} \equiv I\{x-a_n-d_n^{1/2}\log n \le e_i \le x-a_n\} - \mathsf{P}\{x-a_n-d_n^{1/2}\log n \le e_i \le x-a_n\},$$

则 $\xi_{n_1},\cdots,\xi_{n_n}$, i.i.d., $|\xi_{n_i}| \le 1$, $\mathsf{E}\xi_{n_i}=0$, $\mathsf{Var}(\xi_{n_i}) \le 2d_n^{1/2}\log n \cdot f(x)$.

由引理1和引理4, 对 $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \mathsf{P}\Big(\Big|\frac{1}{2na_n}\sum_{i=1}^{n} I\{x-a_n-d_n^{1/2}\log n \le e_i \le x-a_n\} - f_{n_1}(x)\Big| > \varepsilon\Big) \\ \le & 2\exp\left\{\frac{-4n^2\varepsilon^2a_n^2}{2nd_n^{1/2}\log n\cdot f(x)+\frac{2}{3}n\varepsilon}\right\} \le 2\exp\{-na_n\}, \end{aligned}$$

所以

$$I_1 \xrightarrow{\text{a.s.}} 0. \tag{3.14}$$

同理

$$I_2,\, I_3,\, I_4 \xrightarrow{\text{a.s.}} 0. \tag{3.15}$$

所以

$$\widetilde{f}_n(x) - f_n(x) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, \qquad x \in C(f). \tag{3.16}$$

由 (3.13) 和 (3.16) 得

$$\widetilde{f}_n(x) \xrightarrow{\text{a.s.}} f(x), \qquad x \in c(f).$$

仿 [7] 定理2的证明方法, 利用 $\widetilde{f}_n(x) \xrightarrow{\text{a.s.}} f(x)$, $x \in C(f)$, 易证

$$\widehat{f}_n(x) \xrightarrow{\text{a.s.}} f_n(x), \qquad x \in C(f). \qquad \square$$

定理3 (一致强相合)在定理2的条件下, 当 $f(x)$ 在 R^1 上一致连续, 则

$$\sup_x|\widehat{f}_n(x) - f(x)| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0. \tag{3.17}$$

证明: 记 U_n 为 $e_1,\cdots,e_n$ 的经验分布, U 为 e_1 的分布. 因为 $f(x)$ 一致连续, 故

$$\sup_x f(x) \equiv f_0 < \infty.$$

显然

$$\sup_x|\mathsf{E}f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

因为

$$f_n(x)-\mathsf{E}f_n(x)=\frac{1}{2a_n}(U_n[x-a_n,x+a_n]-U[x-a_n,x+a_n]),$$

记 $b_n=2f_0a_n$, 对任意 $\varepsilon>0$, 当 n 充分大时,

$$0<b_n<\frac{1}{4},\qquad \sup_x U([x-a_n,x+a_n])\le b_n.$$

由引理2知

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\{\sup_x|f_n(x)-\mathsf{E}f_n(x)|\ge\varepsilon\}\\=&\mathsf{P}\{\sup_x|(U_n([x-a_n,x+a_n])-U([x-a_n,x+a_n])|\ge 2a_n\varepsilon\}\\\le&16n^2\exp\{-4na_n^2\varepsilon^2/(64\cdot 2f_0a_n+8a_n\varepsilon)\}+8n\exp\{-2f_0a_nn/10\},\end{aligned}$$

所以

$$\sup_x|f_n(x)-\mathsf{E}f_n(x)|\xrightarrow{\text{a.s.}}0.$$

从而

$$\sup_x|f_n(x)-f(x)|\xrightarrow{\text{a.s.}}0. \tag{3.18}$$

显然

$$\sup_x f_{n1}(x)\to 0.$$

记 $g_n=cf_0d_n^{1/2}\log n$, 则当 n 充分大时,

$$0<g_n<\frac{1}{4}\quad 且\quad \sup_x U([x-a_n-d_n^{1/2}\log n,x-a_n])\le g_n,$$

对 $\forall\varepsilon>0$, 由引理2

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\{\sup_x|J_1(x)-f_{n1}(x)|\ge\varepsilon\}\\\le&\mathsf{P}\{\sup_x|U_n([x-a_n-d_n^{1/2}\log n,x+a_n])-U([x-a_n-d_n^{1/2}\log n,x+a_n])|\ge 2a_n\varepsilon\}\\\le&16n^2\exp\{-4na_n^2\varepsilon^2/(64f_0d_n^{1/2}\log n+4a_n\varepsilon)\}+8n\exp\{-nf_0d_n^{1/2}\log n/10\}\\\le&16n^2\exp\{-na_n\varepsilon^2/(1+2\varepsilon)\}+8n\exp\{-cn^{1/2}\log n\},\end{aligned}$$

所以

$$\sup_x I_1\xrightarrow{\text{a.s.}}0. \tag{3.19}$$

同理

$$\sup_x I_i\xrightarrow{\text{a.s.}}0,\qquad i=2,3,4. \tag{3.20}$$

从而

$$\sup_x|\widetilde{f}_n(x)-f_n(x)|\xrightarrow{\text{a.s.}}0. \tag{3.21}$$

由 (3.19) 和 (3.21) 有

$$\sup_x|\widetilde{f}_n(x)-f(x)|\xrightarrow{\text{a.s.}}0.$$

仿 [7] 定理 2, 易证

$$\sup_x |\widehat{f}_n(x) - f(x)| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0. \qquad \square$$

致谢 感谢赵林城教授的精心指导.

参 考 文 献

[1] Huber, P.J., Robust regression, *Ann. Statist.*, **1**(1973), 799–821.
[2] Powell, J.L., Symmetrically trimmed least square estimation for Tobit models, *Ecommetrica*, **54**(1986), 1435–1460.
[3] Tsui, K.L., Jewell, N.P. and Wu, C.F., *J. Amer. Statist. Assoc.*, **83**(1988), 782–792.
[4] 柴根象, 线性模型误差分布估计的渐近理论, 中国科学 A 辑, **11**(1992), 1135–1144.
[5] Chai Genxiang, Asyptomtic theory for estimation of error distribution in linear model, *Science in China (Serial A)*, **36**(1993), 408–419.
[6] 柴根象, 田红, 线性模型中误差分布的非参数相合估计, (已投应用数学学报).
[7] 张文扬, 线性模型中误差密度估计的相合核估计, 四川大学学报, **27**(1990), 132–144.
[8] 张文扬, 施笋娟, 误差密度的相合估计, 四川大学学报, **2**(1996), 128–133.
[9] 刘东海, 线性模型 M-估计下误差密度估计的相合性, 中国科学技术大学学报, **2**(1992), 127–134.
[10] 陈希孺, 赵林城, 线性模型中的 M 方法, 上海科技出版社, 上海, 1994.
[11] Rao, C.R. and Zhao, L.C., Linear representation of M-estimates in linear model, *Canadian J. Statist.*, **20**(1992), 359–368.

Convergence for Kernel Estimation of Error Density in M-Estimator

LIU DONGHAI
(*Chinese People's Armed Police Force Academy, Langfang, 065000*)
MIAO BAIQI　　PENG HENG
(*Department of Statistics and Finance of University of Science and Technology of China, Hefei, 230026*)

Linear model $Y_i = x_i'\beta + e_i$, $i = 1, 2, \cdots$, where $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ i.i.d. with unknown density $f(x)$. In this paper, we consider some converegence of kernel estimation of error density based on the residuals of M-estimation. Under weaker assumptions than references, the article proves the weak local convergence, the strong local convergence and the strong uniform convergence of kernel estimation of error density.