应用概率统计 第七卷
第三期 1991年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 7, No. 3, Aug. 1991.

增长曲线模型参数的似然比检验

潘 建 新
(云南大学)

摘 要

正态假设下增长曲线模型参数的极大似然估计已被广为研究. 本文在两类更为广泛的分布族——椭球等高分布族中研究了增长曲线模型参数的极大似然估计问题;并讨论它们与正态假设下其估计的内在联系;导出了一般假设检验的似然比准则;对某些特殊而常见的检验问题,研究了其验检统计量的零分布不变性.

§1. 引 言

增长曲线模型(The Growth Curve Model)或广义多元方差分析模型(Generalized Multivariate Analysis of Variance Model),是普通线性模型的一种推广.关于它的起源,可追溯到1938年 Wishart 对不同组间动、植物的生长情况的研究:1964年 Potthoff & Ray[7] 对该模型产生的背景作了更深入的研究,并系统总结出这一模型的基本概念;之后,许多统计学家如C. R. Rao、Khatri[5] 及 Kariya[4] 等曾致力于这方面的研究,并取得了许多对古典模型有重大突破的成果.

所谓增长曲线模型,是指具有均值 ABC 的线性模型:

$$X = ABC + E \tag{1.1}$$

其中 X、E 为 $p\times n$ 随机矩阵;A: $p\times q$ $q\leqslant p$, C: $k\times n$ 为已知的设计矩阵;B: $q\times k$ 为未知的回归系 数矩阵.

若对模型(1.1)进一步假定: X 的列向量是互不相关、具有公共协差阵 Σ 的 p 维随机向量,其中 $\Sigma\geqslant 0$ 是 $p\times p$ 阶未知参数阵,则 X 的协差阵为:

$$\mathscr{D}(X) = \mathscr{D}(\mathrm{Vec}\ X) = I_n \otimes \Sigma \tag{1.2}$$

Vec X 表示矩阵的拉直运算,⊗表示两个矩阵的 Kronecker 积.

当满足条件(1.2)的增长曲线模型(1.1)来自正态母体时,则简记作 $X\sim N_{p\times n}(ABC; \Sigma, I_n)$;对此正态母体,人们采用不同的方法获得了不同形式的参数(B、Σ)的极大似然估计,并进一步讨论了各种假设检验的似然比问题;这些工作都散见于文献[4]、[5]、[7]及[8]中.

本文在比正态分布更广泛的分布族——椭球等高分布族中研究了增长曲线模型参数的极大似然估计问题,并讨论它与正态假设下其估计的内在联系,导出了一般假设检验问题之似然比准则,对某些特殊的检验问题,研究其检验统计量的分布不变性.

考虑椭球分布的线性变换类:

$$\mathscr{F}_1^+ = \{X: X \overset{d}{=} M + AY,\ Y\Gamma \overset{d}{=} Y\ \forall \Gamma\in O(n),\ AA' = \Sigma > 0,$$

本文1987年7月30日收到. 1989年11月16日收到修改稿.

$$A\in S_p,\ \mathrm{pr}\{XX'>0\}=1,\ M,\ \Sigma \text{ 为常数阵}\}$$

$$\mathscr{F}_3^+=\{X:\ X\overset{d}{=}M+\Sigma^{1/2}Y,\ \Gamma\,\mathrm{Vec}Y\overset{d}{=}\mathrm{Vec}\,Y\quad \forall\Gamma\in O(pn),$$

$$\mathrm{pr}\{Y\neq 0\}=1,\ M,\ \Sigma>0 \text{ 为常数阵}\}$$

其中 $O(n)$ 是一切 $n\times n$ 阶正交阵构成的集合，“$\overset{d}{=}$” 表示等式两端的变量同分布，S_p 是一切对角线元素为正的 $p\times p$ 阶下三角阵构成的集合.

当具有协方差阵(1.2)的增长曲线模型(1.1)来自椭球等高分布母体 $\mathscr{F}_i^+(i=1,\ 3)$ 时，记作: $X\sim\mathscr{F}_i^+(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;\ g)\ (i=1,\ 3)$，其中已假定 X 的密度存在，函数 g 与 X 的密度相差一个因子 $|\Sigma|^{-n/2}$.

§2. 增长曲线模型参数的极大似然估计与似然比准则

§2.1 $N_{p\times n}(ABC;\ \Sigma,\ I_n)$ 中参数的 MLE 与 LRC

令 $\Omega_m=\{B:\ B$ 是 $q\times k$ 阶实矩阵$\}$，$\Omega_v=\{\Sigma:\ \Sigma$ 是 $p\times p$ 阶正定阵$\}$，$\Omega\triangleq\Omega_m\times\Omega_v$ 是$(B$、$\Sigma)$的整个参数空间;又设 ω_m、ω_v 分别是 Ω_m、Ω_v 的非空子集，而 $\omega\triangleq\omega_m\times\omega_v\subseteq\Omega$;若存在 $B_\omega\in\omega_m$ 使

$$|(X-AB_\omega C)(X-AB_\omega C)'|=\inf_{B\in\omega_m}|(X-ABC)(X-ABC)'| \tag{2.1}$$

则称 B_ω 为 B 在 (2.1) 意义下，参数空间 ω_m 上的广义最小二乘估计，简记作 $GLSE$；其中(2.1)中 $|Y|$ 表示矩阵 Y 的行列式. 关于 B_ω 的存在性问题将在 §3 中讨论. 下列定理建立了矩阵正态分布下，模型(1.1)的回归系数的 $GLSE$ 与 MLE 的关系.

定理 2.1 设 $X\sim N_{p\times n}(ABC;\ \Sigma,\ I_n)$，$p+rk(C)\leqslant n$，其中: $(B,\ \Sigma)\in\omega=\omega_m\times\omega_v\subseteq\Omega$；若 B 在(2.1)意义下 ω_m 上的 $GLSE$ B_ω 存在，且 $\Sigma_\omega\triangleq\frac{1}{n}(X-AB_\omega C)(X-AB_\omega C)'\in\omega_v$，则参数 $(B,\ \Sigma)$ 在 ω 上的极大似然估计 $(\widetilde{B}_\omega,\ \widetilde{\Sigma}_\omega)$ 存在，且为: $\widetilde{B}_\omega=B_\omega$，$\widetilde{\Sigma}_\omega=\Sigma_\omega$: 极大似然函数值为: $|\widetilde{\Sigma}_\omega|^{-n/2}(2\pi)^{-pn/2}e^{-pn/2}$.

证明 因 $X\sim N_{p\times n}(ABC;\ \Sigma,\ I_n)$，于是 ω 上的似然函数为:

$$\begin{aligned}
\underset{(B,\Sigma)\in\omega}{L(B,\ \Sigma)}&=|\Sigma|^{-n/2}\,\mathrm{etr}\left\{-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}(X-ABC)(X-ABC)'\right\}(2\pi)^{-pn/2}\\
&\leqslant\left|\frac{1}{n}(X-ABC)(X-ABC)'\right|^{-n/2}(2\pi)^{-pn/2}\exp\{-pn/2\}\\
&\leqslant\left|\frac{1}{n}(X-AB_\omega C)(X-AB_\omega C)'\right|^{-n/2}(2\pi)^{-pn/2}\exp\{-pn/2\}\\
&=|\Sigma_\omega|^{-n/2}(2\pi)^{-pn/2}\,\mathrm{etr}\left\{-\frac{1}{2}\Sigma_\omega^{-1}(X-AB_\omega C)(X-AB_\omega C)'\right\}\\
&=|\widetilde{\Sigma}_\omega|^{-n/2}(2\pi)^{-pn/2}\,\mathrm{etr}\left\{-\frac{1}{2}\widetilde{\Sigma}_\omega^{-1}(X-A\widetilde{B}_\omega C)(X-A\widetilde{B}_\omega C)'\right\}\\
&=L(\widetilde{B}_\omega,\ \widetilde{\Sigma}_\omega)
\end{aligned}$$

即: $L(\widetilde{B}_\omega,\ \widetilde{\Sigma}_\omega)=\sup\limits_{(B,\Sigma)\in\omega}L(B,\ \Sigma)=|\widetilde{\Sigma}_\omega|^{-n/2}(2\pi)^{-pn/2}\exp\{-pn/2\}$ 说明 $(\widetilde{B}_\omega,\ \widetilde{\Sigma}_\omega)\in\omega$ 是 $(B,\ \Sigma)$ 在 ω 上的极大似然估计.

证毕!

注: 定理 2.1 中的 $\widetilde{\Sigma}_\omega$ 以概率 1 地正定，事实上: 因

$$n\widetilde{\Sigma}_\omega=(X-A\widetilde{B}_\omega C)(X-A\widetilde{B}_\omega C)'=S+(XP_{C'}-A\widetilde{B}_\omega C)(XP_{C'}-A\widetilde{B}_\omega C)'$$

其中：$P_{C'}=C'(CC')^{-}C$，$S=X(I-P_{C'})X'$，由于 $rk(C)+p\leqslant n$ 由文献[6]的定理2知：$\mathrm{pr}\{S>0\}=1$，故：

$$1\geqslant\mathrm{pr}\{\widetilde{\Sigma}_\omega>0\}=\mathrm{pr}\{S+(XP_{C'}-A\widetilde{B}_\omega C)(XP_{C'}-A\widetilde{B}_\omega C)'>0\}\geqslant\mathrm{pr}\{S>0\}=1$$

$$\Rightarrow\mathrm{pr}\{\widetilde{\Sigma}_\omega>0\}=1.$$

推论 2.1 设定理 2.1 的条件成立，则原假设：$(B,\ \Sigma)\in\omega\sqsubseteq\Omega$ 的似然比检验统计量等价于：$\lambda^{2/n}=|\hat{\Sigma}_\Omega|/|\hat{\Sigma}_\omega|$，其中 $\hat{\Sigma}_\Omega$、$\hat{\Sigma}_\omega$ 分别是正态假设下 Σ 在 Ω、ω 上的极大似然估计.

§2.2 $\mathscr{F}_3^+(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;\ g)$ 中参数的 MLE 与 LRC

下列定理给出第三类椭球分布下，模型(1.1)回归系数的 $GLSE$ 与 MLE 的关系.

定理 2.2 设 $X\sim\mathscr{F}_3^+(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;\ g)$，$p+rk(C)\leqslant n$，$g(\cdot)$ 在 $[0,\ +\infty)$ 上单调下降连续；其中 $(B,\ \Sigma)\in\omega=\omega_m\times\omega_v\sqsubseteq\Omega$，非空子集 ω_v 满足：若 $\Sigma\in\omega_v\Rightarrow a\Sigma\in\omega_v$，对任意 $a>0$ 成立；若 B 在(2.1)意义下 ω_m 上的 $GLSE$ $\widetilde{B}_\omega$ 存在，且：$\widetilde{\Sigma}_\omega=\dfrac{1}{n}(X-A\widetilde{B}_\omega C)(X-A\widetilde{B}_\omega C)'\in\omega_v$，则 $(B,\ \Sigma)$ 在 ω 上的极大似然估计 $(\hat{B}_\omega,\ \hat{\Sigma}_\omega)$ 存在，且为：

$$\hat{B}_\omega=\widetilde{B}_\omega,\quad \hat{\Sigma}_\omega=\frac{pn}{y_g}\widetilde{\Sigma}_\omega \tag{2.2}$$

极大似然函数值为：

$$|\hat{\Sigma}_\omega|^{-n/2}g(y_g) \tag{2.3}$$

其中 $y_g>0$ 是使函数 $h(y)=y^{pn/2}g(y)\ (y\geqslant0)$ 达最大的点.

证明 仿定理 2.1 的注不妨设 $(X-ABC)(X-ABC)'>0$，又 $\Sigma>0$，设 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p$ 是矩阵 $\Sigma^{-1/2}(X-ABC)(X-ABC)'\Sigma^{-1/2}>0$ 的特征根，则显然 $\lambda_i>0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$，由于：$X\sim\mathscr{F}_3^+(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;\ g)$，故当 $(B,\ \Sigma)\in\omega\sqsubseteq\Omega$ 时，似然函数为：

$$\begin{aligned}
\underset{(B,\Sigma)\in\omega}{L(B,\ \Sigma)}&=|\Sigma|^{-n/2}g(\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}(X-ABC)(X-ABC)')\\
&=|(X-ABC)(X-ABC)'|^{-n/2}|\Sigma^{-1/2}(X-ABC)(X-ABC)'\Sigma^{-1/2}|^{n/2}\\
&\quad\cdot g(\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1/2}(X-ABC)(X-ABC)'\Sigma^{-1/2})\\
&=|(X-ABC)(X-ABC)'|^{-n/2}\Big(\prod_{i=1}^p\lambda_i\Big)^{n/2}g\Big(\sum_{i=1}^p\lambda_i\Big)\\
&\leqslant|(X-A\widetilde{B}_w C)(X-A\widetilde{B}_w C)'|^{-n/2}p^{-pn/2}\Big(\sum_{i=1}^p\lambda_i\Big)^{pn/2}g\Big(\sum_{i=1}^p\lambda_i\Big)\\
&\leqslant|(X-A\widetilde{B}_\omega C)(X-A\widetilde{B}_\omega C)'|^{-n/2}p^{-pn/2}y_g^{pn/2}g(y_g)\\
&=\Big|\frac{pn}{y_g}\cdot\frac{1}{n}(X-A\widetilde{B}_\omega C)(X-A\widetilde{B}_\omega C)'\Big|^{-n/2}g(y_g)\\
&=\Big|\frac{pn}{y_g}\widetilde{\Sigma}_\omega\Big|^{-n/2}g(y_g)\\
&=\Big|\frac{pn}{y_g}\widetilde{\Sigma}_\omega\Big|^{-n/2}g\Big(\frac{y_g}{pn}\mathrm{tr}\{\widetilde{\Sigma}_\omega^{-1}(X-A\widetilde{B}_\omega C)(X-A\widetilde{B}_\omega C)'\Big)\\
&=|\hat{\Sigma}_\omega|^{-n/2}g(\mathrm{tr}\,\hat{\Sigma}_\omega^{-1}(X-A\hat{B}_\omega C)(X-A\hat{B}_\omega C)')\\
&=L(\hat{B}_\omega,\ \hat{\Sigma}_\omega)
\end{aligned}$$

此即：$L(\hat{B}_\omega,\ \hat{\Sigma}_\omega)=\sup\limits_{(B,\Sigma)\in\omega}L(B,\ \Sigma)=|\hat{\Sigma}_\omega|^{-n/2}g(y_g)$ 说明 $(\hat{B}_\omega,\ \hat{\Sigma}_\omega)$ 是 $(B,\ \Sigma)$ 在 $\omega\sqsubseteq\Omega$ 上的极大似然估计，其中 $(\hat{B}_\omega,\ \hat{\Sigma}_\omega)=(\widetilde{B}_\omega,\ \dfrac{pn}{y_g}\widetilde{\Sigma}_\omega)\in\omega$. 证毕！

注: 1° 由定理2.1知，定理2.2中的$(\widetilde{B}_\omega,\ \widetilde{\Sigma}_\omega)$是正态$X\sim N_{p\times n}(ABC;\ \Sigma, I_n)$下参数$(B,\ \Sigma)$在$\omega$上的$MLE$.

2° 由文献[1]的定理3，定理2.2中使函数$h(y)=y^{pn}g(y)\ (y\geqslant 0)$达到最大的点$y_g>0$必存在.

推论2.2 设定理2.2的条件成立，则原假设：$(B,\ \Sigma)\in\omega\sqsubseteq\Omega$的似然比检验统计量等价于：

$$\lambda^{2/n}=|\hat{\Sigma}_\Omega|/|\hat{\Sigma}_\omega|=|\hat{B}_\Omega|/|\hat{B}_\omega| \tag{2.4}$$

其中$\hat{\Sigma}_\Omega$、$\hat{\Sigma}_\omega$分别是$\mathscr{F}_3^+(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;\ g)$下$\Sigma$在$\Omega$、$\omega$上的$MLE$; $\widetilde{\Sigma}_\Omega$、$\widetilde{\Sigma}_\omega$分别是$N_p(ABC;\ \Sigma,\ I_n)$下$\Sigma$在$\Omega$、$\omega$上的$MLE$.

§2.3 $\mathscr{F}_1^+(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;\ g)$中参数的$MLE$与$LRC$

对Ω_v上的函数$g(\cdot)$，我们进一步假定:

1° $g(\cdot)$单调下降：即若

$$\Sigma_1\geqslant\Sigma_2>0\Rightarrow g(\Sigma_1)\leqslant g(\Sigma_2) \tag{2.5}$$

2° $g(\cdot)$连续：即

$$\lim_{\Sigma\to\Sigma_0} g(\Sigma)=g(\Sigma_0) \tag{2.6}$$

其中$\Sigma>0,\ \Sigma_0>0$.

下列定理给出在第一类椭球分布下，模型(1.1)回归系数的$GLSE$与MLE的关系.

定理2.3 设$X\sim\mathscr{F}_1^+(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;\ g)$, $p+rk(C)\leqslant n$; 单调下降的连续函数$g(\cdot)$满足: Σ_{ij}与$\partial g(\Sigma)/\partial\sigma_{ij}$同号或$\partial g(\Sigma)/\partial\sigma_{ij}=0\ (1\leqslant i<j\leqslant p)$，其中$\Sigma=(\sigma_{ij})_{p\times p}>0$, Σ_{ij}为σ_{ij}的代数余子式; 又参数空间：$(B,\ \Sigma)\in\omega=\omega_m\times\omega_v\sqsubseteq\Omega$，其中非空子集$\omega_v$满足：若$\Sigma\in\omega_v\Rightarrow K\Lambda K'\in\omega_v$，对任意$p\times p$阶对角阵$\Lambda>0$均成立，这里$KK'=\Sigma,\ K\in S_p$; 若$B$在(2.1)意义下$\omega_m$上的$GLSE\widetilde{B}_\omega$存在，且: $\widetilde{B}_\omega=\frac{1}{n}(X-A\widetilde{B}_\omega C)(X-A\widetilde{B}_\omega C)'\in\omega_v$，则$(B,\ \Sigma)$在$\omega$上的极大似然估计$(\hat{B}_\omega,\ \hat{\Sigma}_\omega)$存在，且为:

$$\hat{B}_\omega=\widetilde{B}_\omega,\quad \hat{\Sigma}_\omega=nK\Lambda_g^{-1}K' \tag{2.7}$$

其中$KK'=\widetilde{\Sigma}_\omega,\ K\in S_p$，极大似然函数值是: $|\hat{\Sigma}_\omega|^{-n/2}g(\Lambda_g)$，这里$\Lambda_g>0$是使函数$h(\Sigma)=|\Sigma|^{n/2}g(\Sigma)$在$\Omega_v$上达最大的正定对角阵.

证明 因为$X\sim\mathscr{F}_1^+(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;\ g)$，故$\omega$上的似然函数为:

$$\begin{aligned}
L(B,\underset{(B,\Sigma)\in\omega}{\Sigma})&=|\Sigma|^{-n/2}g(L^{-1}(X-ABC)(X-ABC)'L'^{-1})\quad (LL'=\Sigma,\ L\in S_p)\\
&=|(X-ABC)(X-ABC)'|^{-n/2}|L^{-1}(X-ABC)(X-ABC)'L'^{-1}|^{n/2}\cdot\\
&\quad\cdot g(L^{-1}(X-ABC)(X-ABC)'L'^{-1})\\
&\leqslant|(X-ABC)(X-ABC)'|^{-n/2}|\Lambda_g|^{n/2}g(\Lambda_g)\\
&\leqslant|(X-A\widetilde{B}_\omega C)(X-A\widetilde{B}_\omega C)'|^{-n/2}|\Lambda_g|^{n/2}g(\Lambda_g)\\
&=|n\widetilde{\Sigma}_\omega|^{-n/2}|\Lambda_g|^{n/2}g(\Lambda_g)\\
&=|nK\Lambda_g^{-1}K'|^{-n/2}g(\Lambda_g)\quad (\widetilde{\Sigma}_\omega=KK',\ K\in S_p)\\
&=|\hat{\Sigma}_\omega|^{-n/2}g\left((\sqrt{n}\ K\Lambda_g^{-\frac{1}{2}})^{-1}(nKK')(\sqrt{n}K\Lambda g^{-\frac{1}{2}})'^{-1}\right)\quad (\hat{\Sigma}_\omega\triangleq nK\Lambda_g^{-1}K')\\
&=|\hat{\Sigma}_\omega|^{-n/2}(\hat{L}\omega^{-1})(X-A\widetilde{B}_\omega C)(X-A\widetilde{B}_\omega C)'\hat{L}_\omega'^{-1})\qquad (\hat{L}_\omega\triangleq\sqrt{n}\ K\Lambda_g^{-\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

$$=|\hat{\Sigma}_\omega|^{-n/2}g(\hat{L}_\omega^{-1}(X-A\tilde{B}_\omega C)(X-A\hat{B}_\omega C)'\hat{L}_\omega'^{-1})\quad(\hat{B}_\omega=\tilde{B}_\omega)$$
$$=L(\hat{B}_\omega,\ \hat{\Sigma}_\omega)\quad(\because\ \hat{L}_\omega\hat{L}_\omega'=\hat{\Sigma}_\omega,\ \hat{L}_\omega\in S_p)$$

此即：
$$L(\hat{B}_\omega,\ \hat{\Sigma}_\omega)=\sup_{(B,\Sigma)\in\omega}L(B,\ \Sigma)=|\hat{\Sigma}_\omega|^{-n/2}g(\Lambda_g)$$

说明$(\hat{B}_\omega,\ \hat{\Sigma}_\omega)$是$(B,\ \Sigma)$在$\omega$上的极大似然估计.

证毕!

注：1° 由定理2.1,该定理中的$(\tilde{B}_\omega,\ \tilde{\Sigma}_\omega)$是正态$N_{p\times n}(ABC;\Sigma,\ I_n)$下$(B,\ \Sigma)$在$\omega$上的$MLE$.

2° 由文献[10]的定理3知，使$h(\Sigma)=|\Sigma|^{n/2}g(\Sigma)$在$\Omega_v$上达到最大的正定对角阵$\Lambda_g$必存在,这里$g(\cdot)$满足定理2.3的所有条件.

推论2.3 设定理2.3的条件全都成立，则原假设：$(B,\ \Sigma)\in\omega\subseteq\Omega$的似然，比检验统计量等价于：

$$\lambda^{2/n}=|\hat{\Sigma}_\Omega|/|\hat{\Sigma}_\omega|=|\tilde{\Sigma}_\Omega|/|\tilde{\Sigma}_\omega|\tag{2.8}$$

其中$\hat{\Sigma}_\Omega$、$\hat{\Sigma}_\omega$分别是$\mathscr{F}_1^+(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;\ g)$下$\Sigma$在$\Omega$、$\omega$上的$MLE$; $\tilde{\Sigma}_\Omega$、$\tilde{\Sigma}_\omega$的定义同推论2.2.

§3. 应　　用

本节我们要对某些特定的原假设,导出具体的似然比统计量,并研究其分布是否不变. 其判别准则是建立在[2]中的定理2之上，即如下：引理：1° 设$X\sim\mathscr{F}_3^+(0,\ I_n\otimes\Sigma;g)$，若对任意实数$a>0$,均有$t(X)\overset{d}{=}t(aX)$,则统计量$t(X)$的分布与$g(\cdot)$的具体选择无关.

2° 设$X\sim\mathscr{F}_1^+(0,\ I_n\otimes\Sigma;g)$,若对任意$T\in S_p$,均有$t(X)\overset{d}{=}t(TX)$，则$t(X)$的分布与$g(\cdot)$的具体选择无关.

本节将满足$p+rk(C)\leqslant n$且

$$\begin{cases}X=ABC+E & \varepsilon(X)=ABC\\ \mathscr{D}(X)=I_n\otimes\Sigma; & (B,\ \Sigma)\in\omega\triangleq\omega_m\times\omega_v\subseteq\Omega\triangleq\Omega_m\times\Omega_v\end{cases}$$

的模型称作模型H_1.

例1 对模型H_1,若参数空间$\omega\equiv\Omega$即$\omega_m\equiv\Omega_m$, $\omega_v\equiv\Omega_v$,则由文献[8]知,满足：

$$AB_\Omega C=A(A'S^{-1}A)^{-}A'S^{-1}XP_{C'}\tag{3.1}$$

和B_Ω是B在(2.1)意义下Ω_m上的$GLSE$，其中：$P_{C'}=C'(CC')^{-}C,S=X(I-P_{C'})X'$,由$p+rk(C\leqslant n$知$\Pr\{S>0\}=1\Rightarrow Pr\{\Sigma_\Omega>0\}=1$,其中：$\Sigma_\Omega\triangleq\frac{1}{n}(X-AB_\Omega C)(X-AB_\Omega C)'$由定理2.1—2.3知,在$X\sim N_{p\times n}(ABC;\Sigma,\ I_n)$、$\mathscr{F}_3^+(ABC,I_n\otimes\Sigma;g)$及$\mathscr{F}_1^+(ABC,I_n\otimes\Sigma;g)$下,参数$(B、\Sigma)$在$\Omega$上的$MLE$皆存在,且分别为：$(B_\Omega,\ \Sigma_\Omega)$、$\left(B_\Omega,\ \frac{pn}{y_g}\ \Sigma_\Omega\right)$及$(B_\Omega,\ nK\Lambda_g^{-1}K')$,其中$yg$及$\Lambda_g$、$K$的定义分别见定理2.2及定理2.3. 进一步地,$\Sigma_\Omega$可分解成：

$$\Sigma_\Omega=\frac{1}{n}(X-AB_\Omega C)(X-AB_\Omega C)'$$
$$=\frac{1}{n}[S+(XP_{C'}-AB_\Omega C)(XP_{C'}-AB_\Omega C)']$$

$$=\frac{1}{n}[S+(I-A(A'S^{-1}A)^{-}A'S^{-1})XP_{C'}X'(I-A(A'S^{-1}A)^{-}A'S^{-1})']$$

$$=\frac{1}{n}[S+SA^{\circ}(A^{\circ\prime}SA^{\circ})^{-}A^{\circ\prime}XP_{C'}X'A^{\circ}(A^{\circ\prime}SA^{\circ})^{-}A^{\circ\prime}S'] \tag{3.2}$$

其中 A° 是 $\mu(A)$的正交补空间 $\mu^{\perp}(A)$的生成元, 即 $\mu^{\perp}(A)=\mu(A^{\circ})$, 显然 A° 满足: $rk(A)+rk(A^{\circ})=p$, $A^{\circ\prime}A=0$ $\mu(A)$表示矩阵 A 的列向量生成的线性空间.

例 2 对模型 H_1: 若参数空间 $\omega=\omega_m\times\Omega_v\subseteq\Omega$, 其中

$$\omega_m=\{B: DB=F_1,\ BE=F_2\}\subseteq\Omega_m \tag{3.3}$$

$D: s\times q$, $F_1: s\times k$, $E: k\times t$, $F_2: q\times t$ 均已知, 且

$$\mu(F_1)\subseteq\mu(D)\quad \mu(F_2')\subseteq\mu(E')\quad DF_2=F_1E \tag{3.4}$$

由[8]知, 满足:

$$AB_{\omega}C=AD^{-}F_1C+AF_2E^{-}C-AD^{-}F_1EE^{-}C+A_1\hat{\theta}C_1 \tag{3.5}$$

的 B_{ω} 是 B 在(2.1)意义下 ω_m 上的 $GLSE$, 其中:

$$A_1\hat{\theta}C_1=A_1(A_1'S_1^{-1}A_1)^{-}A_1'S_1^{-1}X_1P_{C_1'} \tag{3.6}$$

$$X_1=X-AD^{-}F_1C-AF_2E^{-}C+AD^{-}F_1EE^{-}C \tag{3.7}$$

$$A_1=A(I-D^{-}D),\quad C_1=(I-EE^{-})C \tag{3.8}$$

$$S_1=X_1(I-P_{C_1'})X_1'$$

令 $\Sigma_{\omega}=\frac{1}{n}(X-AB_{\omega}C)(X-AB_{\omega}C)'$ 则显然 $\Pr\{\Sigma_{\omega}\in\Omega_v\}=1$ 进一步地:

$$\Sigma_{\omega}=\frac{1}{n}(X_1-A_1\hat{\theta}C_1)(X_1-A_1\hat{\theta}C_1)'$$

$$=\frac{1}{n}[S_1+(I-A_1(A_1'S_1^{-1}A_1)^{-}A_1'S_1^{-1})X_1P_{C_1'}X_1'(I-A_1(A_1'S_1^{-1}A_1)^{-}A_1'S_1^{-1})']$$

$$=\frac{1}{n}[S_1+S_1A_1^{\circ}(A_1^{\circ\prime}S_1A_1^{\circ})^{-}A_1^{\circ\prime}X_1P_{C_1'}X_1'A_1^{\circ}(A_1^{\circ\prime}S_1A_1^{\circ})^{-}A_1^{\circ}S_1'] \tag{3.9}$$

由推论 2.1—2.3. 在 $N_{p\times n}(ABC;\Sigma,\ I_n)$或 $\mathscr{F}_3^{+}(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;g)$或 $\mathscr{F}_1^{+}(ABC,\ I_n\oplus\Sigma;g)$下, 原假设 $H: DB=F_1,\ BE=F_2$ 的似然比统计量均等价于:

$$\lambda^{2/n}=\frac{|S+SA^{\circ}(A^{\circ\prime}SA^{\circ})^{-}A^{\circ\prime}XP_{C'}X'A^{\circ}(A^{\circ\prime}SA^{\circ})^{-}A^{\circ\prime}S|}{|S_1+S_1A_1^{\circ}(A_1^{\circ\prime}S_1A_1^{\circ})^{-}A_1^{\circ\prime}X_1P_{C_1'}X_1'A_1^{\circ}(A_1^{\circ}S_1A_1^{\circ})^{-}A_1^{\circ\prime}S_1|} \tag{3.10}$$

注意到: $S=X(I-P_{C'})X'=X_1(I-P_{C'})X_1'$, $A^{\circ\prime}A=0$ 知(3.10)中的 X 可以 X_1 代替, 即(3.10)是 X_1 的函数记作 $\lambda^{2/n}(X_1)$则因:

$$\lambda^{2/n}(X_1-A_1\theta C_1)=\lambda^{2/n}(X_1)\quad \text{对任意 } \theta\in\Omega_m$$

$$\lambda^{2/n}(aX_1)=\lambda^{2/n}(X_1)\quad \text{对任意 } a>0$$

由引理 1° 知, 若 $X\sim\mathscr{F}_3^{+}(ABC,\ I_n\oplus\Sigma;g)$, 则(3.10)的零分布与函数 $g(\cdot)$的具体选择无关; 特别地它与 X 来自正态母体时一样; 但一般地, 统计量 $\lambda^{2/n}(X_1)$不适宜于用引理 2° 来判别.

例 3 对模型 H_1, 若参数空间是 $\omega=\omega_m\times\Omega_v\subseteq\Omega$, 其中 $\omega_m=\{B: DBE=F\ B\in\Omega_m\}\subseteq\Omega_m$, $D: s\times q$, $E: k\times t$ 及 $F: s\times t$ 均已知, 且满足: $\mu(F)\subseteq\mu(D)$, $\mu(F')\subseteq\mu(E')$ 由[8]知, 满足:

$$AB_{\omega}C=A_1(A_1'S_1^{-1}A_1)^{-}A_1'S_1^{-1}X_1P_{C_1'}+T_1A_2(A_2'T_1'(S_1+S_2)^{-1}T_1A_2)^{-}A_2'T_1'(S_1+S_2)^{-1}T_1X_1P_{C'} \tag{3.11}$$

的 B_{ω} 是 B 在(2.1)意义下 ω_m 上的 $GLSE$, 其中

$$X_1=X-AD^{-}FE^{-}C,\quad A_1=A(D')^{\circ},\quad C_1=C$$

$$S_1=X_1(I-P_{C_1'})X_1',\quad T_1=I-A_1(A_1'S_1^{-1}A_1)^-A_1'S_1^{-1}$$
$$A_2=AD',\quad C_2=E^{\circ\prime}C,\ S_2=T_1X_1P_{C_1'}(I-P_{C_i})P_{C_1'}X_1'T_1'$$
$$P_{C_i'}=C_i'(C_iC_i')^-C_i\quad(i=1,\ 2)$$

令 $\Sigma_\omega\triangleq\dfrac{1}{n}(X-AB_\omega C)(X-AB_\omega C)'$则可证 $\Pr\{\Sigma_\omega>0\}=1$ 进一步地：

$$\Sigma_\omega=\frac{1}{n}(S_1+S_2+T_2T_1XP_{C_i}X'T_1'T_2')\tag{3.12}$$

其中： $T_2=I-T_1A_2(A_2'T_1'(S_1+S_2)^{-1}T_1A_2)^-A_2'T_1'(S_1+S_2)^{-1}$

由推论 2.1-2.3, 在 $N_{p\times n}(ABC;\Sigma,\ I_n)$或 $\mathscr{F}_3^+(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;g)$或 $\mathscr{F}_1^+(ABC,\ I_\lambda\oplus\Sigma;g)$下，原假设 $H: DBE=F$ 的似然比统计量等价于：

$$\lambda^{2/n}=\frac{|S+SA^\circ(A^{\circ\prime}SA^\circ)^-A^{\circ\prime}XP_{C'}X'A^\circ(A^{\circ\prime}SA^\circ)^-A^{\circ\prime}S|}{|S_1+S_2+T_2T_1XP_{C_i}X'T_1'T_2'|}\tag{3.13}$$

注意到 $S=S_1$, $A_1^{\circ\prime}A=0$, $T_1X_1=T_1X$ 知(3.13)中 X 可用 X_1 代替，即 $\lambda^{2/n}$ 是 X_1 的函数记作 $\lambda^{2/n}(X_1)$则有：

$$\lambda^{2/n}(X_1-A\theta C)=\lambda^{2/n}(X_1)\quad 对任意\ \theta\in\Omega_m$$
$$\lambda^{2/n}(aX_1)=\lambda^{2/n}(X_1)\quad 对任意\ a\in R^+$$

由引理 1° 知，若 $X\sim\mathscr{F}_3^+(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;g)$，则(3.13)之 $\lambda^{2/n}$ 的零分布与函数 $g(\cdot)$ 的选择无关；特别地，它与 X 来自正态母体时一样. 但一般地引理 2° 不适宜于似然比统计量 $\lambda^{2/n}$. 可以证明[3]，在正态分布下，(3.13)的渐近零分布是 χ^2 分布，渐近非零分布是非中心 χ^2 分布.

从例 2、例 3 看到，在 $X\sim\mathscr{F}_1^+(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;g)$下，其似然比 $\lambda^{2/n}$(见(3.10)及(3.13))，引理 2° 的判别方法一般难以奏效，主要是由于 $\lambda^{2/n}$ 的结构太复杂；但是对某些特殊情形，这种判别依然可用，请看下列：

例 4 在例 3 中，若 $X\sim\mathscr{F}_1^+(ABC,\ I_n\oplus\Sigma;g)$，其中 $g(\cdot)$ 满足定理 2.4 的条件，且 $p=q$, $A=I_p$, $F=0$, E 列满秩，D 是 $p\times p$ 非退化阵. 则由(3.13)，原假设 $H: DBE=0$ 的似然比检验统计量等价于：

$$\lambda^{2/n}(X)=\frac{|X(I-P_{C'})X'|}{|X(I-P_{C'})X'+XC'(CC')^{-1}E(E'(CC')^{-1}E)^{-1}E'(CC')^{-1}CX'|}\tag{3.14}$$

于是对 $\forall T\in S_p$ 知. $\lambda^{2/n}(TX)=\lambda^{2/n}(X)=\lambda^{2/n}(X-ABC)$ 由引理 2° 知 $\lambda^{2/n}(X)$ 的零分布与 $g(\cdot)$的选择无关；特别地，$\lambda^{2/n}(X)$的零分布与 X 来自正态时一样.

下面考虑 $X\sim\mathscr{F}_3^+(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;g)$时，协方差阵 Σ 的一个检验问题：

例 5 球性检验. 设 $X\sim\mathscr{F}_3^+(ABC,\ I_n\otimes\Sigma;\ g)$, $p+rk(C)\leqslant n$, $g(\cdot)$在$[0,\ +\infty)$上单调下降连续，参数空间为：$(B、\Sigma)\in\Omega_m\times\omega_v\triangleq\omega\subseteq\Omega$，其中：

$$\omega_v=\{\Sigma=\sigma^2G;\ G>0\ 已知,\ \sigma^2>0\}$$

则可证 B 在 ω 上的 $MLE\hat{B}_\omega$ 满足：

$$A\hat{B}_\omega C=A(A'G^{-1}A)^-A'G^{-1}XP_{C'}\tag{3.15}$$

Σ 在 ω 上的 $MLE\hat{\Sigma}_\omega$ 是：$\hat{\Sigma}_\omega=\hat{\sigma}^2G$，其中：

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{y_g}\operatorname{tr}\{G^{-1}(X-A\hat{B}_\omega C)(X-A\hat{B}_\omega C)'\}$$
$$=\frac{1}{y_g}\operatorname{tr}\{G^{-1}S+A^\circ(A^{\circ\prime}GA^\circ)^-A^{\circ\prime}XP_{C'}X'A^\circ(A^{\circ\prime}GA^\circ)^-A^{\circ\prime}G\}$$

$$=\frac{1}{y_g}\operatorname{tr}\{G^{-1}S+A^\circ(A^{\circ\prime}GA^\circ)^-A^{\circ\prime}XP_{C'}X'\} \tag{3.16}$$

这里 $S=X(I-P_{C'})X'$, $P_{C'}=C'(CC')^-C$, $\mu^\perp(A)=\mu(A^\circ)$, $y_g>0$ 是使 $h(y)=y^{pn/2}g(y)(y\geqslant 0)$ 达最大的点. 可证原假设 $H: \Sigma=\sigma^2G$ 的似然比检验统计量等价于:

$$\lambda^{2/n}=\frac{|S|\cdot|I+A^\circ(A^{\circ\prime}SA^\circ)^-A^{\circ\prime}XP_{C'}X'A^\circ(A^{\circ\prime}SA^\circ)^-A^{\circ\prime}S|}{|G|\cdot[\operatorname{tr}\{G^{-1}S+A^\circ(A^{\circ\prime}GA^\circ)^-A^{\circ\prime}XP_{C'}X'\}/p]^p} \tag{3.17}$$

显然 $\lambda^{2/n}(aX)=\lambda^{2/n}(X)=\lambda^{2/n}(X-ABC)$, 对 $\forall a>0$ 成立, 由引理 1° 知 $\lambda^{2/n}$ 的零分布与 $g(\cdot)$ 的选择无关; 特别地它与 X 来自正态时一样.

致谢: 本文是在导师方开泰研究员的悉心指导下完成的,特此表示衷心感谢.

参 考 文 献

[1] Anderson, T. W., K. T. Fang, Hsu H., Maximum likelihood estimators and likelihood ratio criteria for multivasiate elliptically contoured distributions. *The Canadian J. Statist.*, **14** (1986), 55—59.

[2] Fang, K. T., Chen, H. F., Relationships among class of spherical matrix distributions., *Acta Mathematical Applicatae Sinica* (English ser.) **1** (1984), 138—148.

[3] Fujikoshi, Y., Asymptotic formulas for the distributions of three statistics for multivariate linear hypothesis., *Ann. Inst. Statist. Math.*, **25** (1973), 423—437.

[4] Kariya, T., *Testing in the Multivariate General Linear Model.*, Kinokuniya Comp. Tokyo. 1985.

[5] Khatri, C. G., Testing some covariance structures under a growth curve model., *J. Multivar. Anal.*, **3** (1973), 102—116.

[6] Okamato, M., Distinctness of the eigenvalues of a quadratic form in a multivariate sample, *Ann. Statist*, **1** (1973), 763—765.

[7] Potthoff, R. F., Roy, S. N., A generalized multivariate analysis of variance model useful especially for growth curve problems, *Biometrika*, **51** (1964), 313—326.

[8] Von Rosen, D., Maximum likelihood estimates in multivariate linear normal models with special references to the growth curve model, *Research Report* No. 135. Inst. of Actuar. Mathematics and Math. Statist., University of Stockhalm, Sweden. 1984.

[9] Von Rosen, D., Moments and some asymptotic results for maximum likelihood estimates in multivariate linear normal models with special references to the growth curve model, *Research Report* No. 141,同上.

[10] 方开泰、许建伦,关于椭球等高分布参数的似然比检验. *经济数学*. (1985)、No. 2, 1—19.

[11] 方开泰,椭球等高分布族理论,*多元分析资料汇编* (VIII) (1983),中国科学院应用数学所印.

[12] 张尧庭、方开泰,*多元统计分析引论*,科学出版社,北京, 1982.

LIKELIHOOD RATIO CRITERIA OF PARAMETERS IN GROWTH CURVE MODEL FOR MULTIVARIATE ELLIPTICALLY CONTOURED DISTRIBUTIONS

PAN JIANXIN

(*Yunnan University*)

The maximum likelihood estimates of parameters in growth curve model under normal distribution have been studied by many authors. In this paper, the maximum likelihood estimates of parameters in the growth curve model under two classes of matrix elliptically contoured distributions are discussed. Likelihood ratio criteria are obtained for many null hypotheses, which have the same form as that of the normal case. The testing statistics that are invariant in the classes of matrix elliptically contoured distributions are also studied.