应用概率统计 第三卷
第四期 1987年11月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 3. No. 4. Nov. 1987

球对称分布下的二次型

邓炜材
(暨南大学)

摘　　要

设 $\underset{N\times P}{X}=\begin{pmatrix}X_{(1)}\\X_{(2)}\end{pmatrix}$ 为球对称分布的矩阵，本文将证实如下命题的等价性:

1. $X_{(1)}$ 与 $X_{(2)}$ 相互独立;
2. $X'_{(1)}X_{(1)}$ 与 $X'_{(2)}X_{(2)}$ 相互独立;
3. vec X 依 $N(0, V\otimes I)$分布, V 是某个非负定阵.

最后，在 $P(X=0)<1$ 条件下，我们将关于二次型的 Cochran 定理推广至更一般的情形.

§1. 引　　言

若 $\Gamma X_{N\times P}\overset{d}{=}X\equiv\begin{pmatrix}X_{(1)}\\X_{(2)}\end{pmatrix}$ 对一切正交阵 Γ 成立，则称 X 是矩阵球对称分布的. 特别，于 $P=1$ 时则称为球对称分布. 本文讨论下面三个命题的等价性:

1° $X_{(1)}$ 与 $X_{(2)}$ 相互独立;

2° $X'_{(1)}X_{(1)}$ 与 $X'_{(2)}X_{(2)}$ 相互独立;

3° X 为正态分布.

从已往的文献中[如 Kelker, D. (1970)[1]]我们可在 $P=1$ 以及 $P(X=0)=0$ 的特定条件下推论出上述等价关系.

但是否可导至普遍的作为矩阵球对称分布下的结果，作者执笔时还未见有直接的文献记录.

有关二次型分解的 Cochran 定理的推广工作有 Kelker, D.[1] (1970)，他要求 X 的四阶矩存在，这是不必要的. 另外有 T. W. Anderson 与 K. T. Fang[2] (1982) 的工作，他们是在假设条件 $P(X=0)=0$ 之下完成的. C. G. Khatri[3] (1982) 研究了更一般的二次型分解问题，即其对应方阵不必幂等的情形. 方与吴[4] 结合 [2], [3] 得出一定结果，其中仍假设 $P(X=0)=0$. 这些结果仍可进一步加强.

§2. 有关几个等价命题的论证

定理 1 设 $\underset{N\times P}{X}=\begin{pmatrix}X_{(1)}\\X_{(2)}\end{pmatrix}$ 依矩阵球对称分布，其中 $X_{(1)}$ 为 $N_1\times P$ 分块，$X_{(2)}$ 为 $N_2\times P$ 分

本文1985年10月22日收到，1986年11月28日收到修改稿.

块, $N_1+N_2=N$, 则 $X_{(1)}$ 与 $X_{(2)}$ 相互独立等价于 $X'_{(1)}X_{(1)}$ 与 $X'_{(2)}X_{(2)}$ 相互独立.

证 设 $X'_{(1)}X_{(1)}$ 与 $X'_{(2)}X_{(2)}$ 相互独立; μ_1 及 μ_2 分别是 $O(N_1)$ 及 $O(N_2)$ 正交群上的 Haar 概率测度. 我们有

$$\begin{aligned}E\exp\{i\operatorname{tr}T'X\}&=E\exp\left\{i\operatorname{tr}(T'_{(1)},\ T'_{(2)})\begin{pmatrix}\Gamma_{(1)} & \\ & \Gamma_{(2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{(1)}\\ X_{(2)}\end{pmatrix}\right\}\\
&=E\left[\int_{O(N_1)}\exp\{i\operatorname{tr}X_{(1)}T'_{(1)}\Gamma_{(1)}\}\mu_1(d\Gamma_{(1)})\right.\\
&\qquad\left.\times\int_{O(N_2)}\exp\{i\operatorname{tr}X_{(2)}T'_{(2)}\Gamma_{(2)}\}\mu_2(d\Gamma_{(2)})\right]\\
&\triangleq E[\phi_1(\operatorname{ch}T_{(1)}X'_{(1)}X_{(1)}T'_{(1)})\cdot\phi_2(\operatorname{ch}T_{(2)}X'_{(2)}X_{(2)}T'_{(2)})]\\
&=E\phi_1(\operatorname{ch}T_{(1)}X'_{(1)}X_{(1)}T'_{(1)})\cdot E\phi_2(\operatorname{ch}T_{(2)}X'_{(2)}X_{(2)}T'_{(2)})\\
&=E\exp\{i\operatorname{tr}T'_{(1)}X_{(1)}\}\cdot E\exp\{i\operatorname{tr}T'_{(2)}X_{(2)}\}\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $$T'=(T'_{(1)},\ T'_{(2)}),\ \Gamma_{(1)}\in O(N_1),\ \Gamma_{(2)}\in O(N_2);$$

$$\phi_j(\operatorname{ch}AA')=\int_{O(N_j)}\exp\{i\operatorname{tr}A'\Gamma_{(j)}\}\mu_j(d\Gamma_{(j)}),\quad j=1,\ 2;$$

$\operatorname{ch}AA'$ 表示 AA' 的特征根组; 而(1)中最后一个等号可分别取 $T_{(1)}=0$ 及 $T_{(2)}=0$ 得出. 故知 $X_{(1)}$ 与 $X_{(2)}$ 相互独立. 逆命题是明显的, 定理得证.

推论 1.1 若 $X_{N\times 1}\sim S_N(\phi)$, 即 $X_{N\times 1}$ 为球对称分布于 R^N 上, 并且具特征函数 $\phi(T'T)=E\exp\{iT'X\}$; 则 $X=\begin{pmatrix}X_{(1)}\\ X_{(2)}\end{pmatrix}$ 中的 $X_{(1)}$ 与 $X_{(2)}$ 相互独立等价于 $X'_{(1)}X$ 与 $X_{(1)}X'_{(2)}$ 相互独立.

推论 1.2 若 $X\sim S_N(\phi)$, 则 $X'_{(1)}X_{(1)}$ 与 $X'_{(2)}X_{(2)}$ 相互独立的充要条件是 X 依正态分布.

证 由 Kelker, D.[1] 的结果, 在已给条件下 $X_{(1)}$ 与 $X_{(2)}$相互独立等价于 X 依正态分布, 结合推论 1.1 便得推论 1.2.

定理 2 设 $X_{N\times p}$ 为矩阵球对称, 且 $X'=(X'_{(1)},\ X'_{(2)}\cdots X'_{(k)})$, 其中 $X_{(i)}$ 为 $N_i\times P$ 阵, $N_i\geqslant p$, $i=1,\ 2$; 则 $X_{(1)}$ 与 $X_{(2)}$ 相互独立的充要条件是存在非负定阵 V 使

$$\operatorname{Vec}X\sim N(0,\ V\otimes I).$$

证 若 $X_{(1)}$ 与 $X_{(2)}$ 相互独立, 则

$$\begin{aligned}E\exp\left\{i\operatorname{tr}(T'_{(1)},\ T'_{(2)})\begin{pmatrix}X_{(1)}\\ X_{(2)}\end{pmatrix}\right\}&=\phi(T'_{(1)}T_{(1)}+T'_{(2)}T_{(2)})\\
&=E\exp\{i\operatorname{tr}T'_{(1)}X_{(1)}\}\cdot E\exp\{i\operatorname{tr}T'_{(2)}X_{(2)}\}\\
&=\phi(T'_{(1)}T_{(1)})\cdot\phi(T'_{(2)}T_{(2)}).\end{aligned}$$

其中 $\phi(T'T)=E\exp\{iT'X\}$. 由此知 $\log\phi(A)$ 作为非负定阵 A 的函数具有可加性, 它从 ϕ 作为特征函数的意义来看是连续的, 而且应有 $\log\phi(A)\leqslant 0$ 对一切非负定阵 A 成立。这就是说 $-\log\phi(A)$ 是非负定阵$(p\times p)$构成是凸锥上的非负线性泛函, 作为周知的结果, 存在非负定阵 V 使

$$-\log\phi(A)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}VA.$$

即 $$\phi(T'T)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr} VT'T\right\}.$$
故 $\operatorname{vec} X\sim N(0,\ V\otimes I)$. 反过来就无须说了,定理也就成立. 结合定理 1, 2, 我们有

推论 2.1 设 X 如定理 2, 则 X 为矩阵正态分布的充要条件是 $X'_{(1)}X_{(1)}$ 与 $X'_{(2)}X_{(1)}$ 相互独立.

注 T. W. Anderson and Fang[2] 曾证实当 $X\sim S_N^+(\phi)$, 即 $X\in S_N(\phi)$ 并且 $P(X=0)=0$ 时 $X'_{(1)}X_{(1)}$ 与 $X'_{(2)}X_{(2)}$ 相互独立的充要条件是 $X\sim N(0,\sigma^2I)$, 结合前面提及的 Kelker, D.[1] 的结果便在 $X\sim S_N^+(\phi)$ 时间接证实了推论 1.2 的结果, 其中方法能否得出本文的定理 1 还有待进一步探讨.

又, 定理 2 的限制条件 $N_1,\ N_2\geqslant p$ 只是为了讨论的方便, 于 $N_1,\ N_2$ 出现 $<p$ 时可证定理仍是成立的. 这时, $\log\phi(A)$ 的可加性只定义在非负定凸锥的一个子集上, 它起码包括了一切秩为 1 的非负定阵, 因此依可加性足以使定义推广到一切非负定 $(p\times p)$ 阵, 细节从略.

§3. 广义 Cochran 定理

T. W. Anderson and Fang[2] 于 $X\sim S_N^+(\phi)$ 时证明了广义的 Cochran 定理成立. 在此之前, 对一般球对称分布的 X 具有分布密度并具有限四阶矩的情形, Kelker, D.[1] 得出广义的 Cochran 定理. 不过, 方的条件仍是可改进的. 我们有

引理 1 当 $X\sim S_N(\phi)$, 而且 $P(X=0)<1$, 并且 $X=R\underset{N\times 1'}{U}$, $U'U\equiv 1$, $R>0$ 与 U 相互独立, 则下命几个关系等价.

(I) $(X'A_1X,\ \cdots,\ X'A_mX)\overset{d}{=}R^2(\|\mathscr{U}_{(1)}\|^2,\ \cdots,\ \|\mathscr{U}_{(m)}\|^2)$

(II) $(\tilde{X}'A_1\tilde{X},\cdots,\ \tilde{X}'A_m\tilde{X})\overset{d}{=}\tilde{R}^2(\|\mathscr{U}_{(1)}\|^2,\ \cdots,\ \|\mathscr{U}_{(m)}\|^2)$

(III) $(U'A_1U,\ \cdots,\ U'A_mU)\overset{d}{=}(\|\mathscr{U}_{(1)}\|^2,\ \cdots,\ \|\mathscr{U}_{(m)}\|^2)$

(IV) 对于 $Y\sim N(0,\ I_p)$
$$(Y'A_1Y,\ \cdots,\ Y'A_mY)\overset{d}{=}(\|Y_{(1)}\|^2,\ \cdots,\ \|Y_{(m)}\|^2)$$
其中 $\tilde{R}$ 满足 $P(\tilde{R}\in B)=P(R\in B\backslash\{0\})/P(R>0)$, 因而 $P(\tilde{R}>0)=1$; 并且 $\tilde{R}$ 与 U 相互独立, $\tilde{X}\equiv\tilde{R}U$; $X'=(X'_{(1)},\ \cdots,\ X'_{(m)})$, Y, U 有相应的分块; $\|Y_{(j)}\|^2=Y'_{(j)}Y_{(j)}$, $j=1,\ \cdots,\ m$.

(I) 与 (II) 的等价性是从考虑 $R>0$ 条件下的条件概率分布得到的. (II) 与 (III) 的等价性已见[2].

引理 1 还可推广为

引理 2 设 X, Y, $\tilde{X}$, $\tilde{R}$, U, R 如引理 1, 则下列命题等价:

(I) $(X'A_1X,\ \cdots,\ X'A_mX)\overset{d}{=}R^2(U'_{(1)}A_1U_{(1)},\ \cdots U'_{(m)}A_mU_{(m)})$

(II) $(\tilde{X}'A_1\tilde{X},\ \cdots,\ \tilde{X}'A_mX)\overset{d}{=}\tilde{R}^2(U'_{(1)}A_1U_{(1)},\ \cdots,\ U'_{(m)}A_mU_{(m)})$

(III) $(U'A_1U,\ \cdots,\ U'A_mU)\overset{d}{=}(U'_{(1)}A_1U_{(1)},\ \cdots,\ U'_{(m)}A_mU_{(m)})$

(IV) $(Y'A_1Y,\ \cdots,\ Y'A_mY)\overset{d}{=}(Y'_{(1)}A_1Y_{(1)},\ \cdots,\ Y'_{(m)}A_mY_m)$

用这两个引理结合 [2], [3], [4] 的结果可将二次型的分解定理(包括 Cochran 定理)推广到更一般的情形.

参 考 文 献

[1] Kelker, D., Distribution Theory of Spherical Distributions and a Location-scale Parameter Generalization. *SANKHYA SER*. **A** (1970), 419—430.

[2] Anderson T. W., Fang Kaitai; Cochran's Theorems For Elliptically Contoured Distributions. CHINA-JAPAN SYMPOSIUM ON STATISTICS. 1984.

[3] Khatri C. G.: A theorem on Quadratic Forms for Normal Variables. *ESSAYS IN HONOR OF C. R. RAO*. (1982), 411—417. NORTH HOLLAND PUBIISHING COMPANY.

[4] 方开泰,吴玉华,二次型分布与 Cochran 定理,经济数学, (1984), 29—48.

QUADRATIC FORMS UNDER SPHERICAL DISTRIBUTIONS

DENG WEICAI

(*Jinan University*)

Let $\underset{N\times P}{X}=\begin{pmatrix}X_{(1)}\\X_{(2)}\end{pmatrix}$ be a spherically Symmetric distributed matrix, we shall prove the equivalence of the following propositions:

1. $X_{(1)}$ and $X_{(2)}$ are mutually independent;
2. $X'_{(1)}X_{(1)}$ and $X'_{(2)}X_{(2)}$ are mutually independent;
3. Vec X is distributed as $N(0, V\otimes I)$ for some non-negative matrix V.

At last, under the ristriction $P(X=0)<1$ we extend the classical Cochran's theorem of quadratic formt to a more general fashion.