# 残差X-图对平稳可逆ARMA过程数据的检验能力

姜永康 王静龙
(华东师范大学统计系, 上海, 200062)

**摘 要**

本文将SPC(Statistical Process Control)技术应用于自相关数据, 使用的基本方法是对数据做残差处理, 本文给出了对于平稳可逆的ARMA过程数据, 在检验过程均值变化方面, 残差X-图优于X-图的条件.

关键词: 残差X-图, X-图, 平稳可逆的ARMA过程.
学科分类号: O213.1.

## §1. 引 言

近年来, 在工业生产过程中, SPC(Statistical Process Control)技术常被用来监控过程的变化. 传统的控制图如: X-图, CUSUM-图, EWMA-图均是基于过程数据独立这一基本假设的. 而在实际生产过程中, 数据常是相关的, 此时传统的控制图已不再适用. 满足时间序列ARMA模型的数据是自相关的, 但其残差却是不相关的, 若对残差使用传统图是否会改善控制图的使用效果? 本文仅就平稳可逆ARMA过程数据在均值发生变化时, 残差X-图在检验这种变化的能力是否优于传统X-图作了一些探讨.

AR过程和MA过程是ARMA过程的两个特例. 关于AR过程数据, Zhang(1997)定义了一个衡量检验能力的指标, 并在此指标下得出结论: 在均值发生变化的那一刻, 残差X-图对均值变化的检出力总优于X-图, 之后, 在一定条件下残差X-图的检出力也优于X-图. 本文推广了他的结果. 第二节首先考虑MA过程的情形, 第三节考虑ARMA过程的情况.

## §2. MA过程

### §2.1 MA(1)

首先, 我们考察一阶可逆滑动平均过程

$$x_t-\mu=\varepsilon_t-\beta\varepsilon_{t-1},$$

其中$\varepsilon_t$为正态白噪声服从$N(0,\sigma_a^2)$, $\beta$满足可逆条件: $|\beta|<1$(本文研究对象均为平稳可逆、正态白噪声的过程, 以后不再赘述), 这时残差

$$e_t=x_t-\hat{x}_t=x_t-(\hat{\mu}-\hat{\beta}\varepsilon_{t-1}).$$

所谓残差X-图, 就是对残差过程$\{e_t\}$做X-图(以零为中心线的残差的$k\sigma_a$限次序图). 这里我们假定模型完全拟合, 即: $\widehat{\mu}=\mu$, $\widehat{\beta}=\beta$, 为简便起见, 我们记

$$e_t=x_t-(\mu-\beta\varepsilon_{t-1}).$$

残差$e_t$的方差等于白噪声方差

$$\sigma_a^2=\mathsf{Var}\,(e_t)=\frac{1}{1+\beta^2}\sigma_x^2,$$

本文1999年6月8日收到, 1999年10月8日收到修改稿.

其中$\sigma_x^2$为$x_t$的方差.

若在时刻$T$, $x_t$的均值发生变化:

$$\mu \to \mu^* = \mu + \delta\sigma_x,$$

且 $\mathrm{E}x_t = \mu^* \quad t = T, T+1, \cdots$ 即过程在时刻$T$之后又恢复平稳.

现在, 我们要研究的问题就是讨论在这种情况下, 残差X-图与传统X-图对这种变化的检验能力哪一个更好一些(以后对不同的过程, 所研究的都是这个问题, 不再赘述). 为此我们首先定义一个衡量检验能力强弱的指标

$$f(t) = \left|\mathrm{E}\Big(\frac{e_t}{\sigma_a}\Big)\Big/\delta\right|,$$

在$\delta = 0$即$x_t$的均值没有发生变化时, $\mathrm{E}(e_t) = 0$, 定义$f(t) = 0$.

下面, 我们解释$f(t)$作为衡量指标的合理性. 为此我们引入残差$e_t$落入其$k\sigma_a$控制限内的概率

$$\begin{aligned}\gamma &= \mathrm{P}(-k\sigma_a < e_t < k\sigma_a)\\ &= \mathrm{P}([-k\sigma_a - \mathrm{E}(e_t)]/\sigma_a < [e_t - \mathrm{E}(e_t)]/\sigma_a < [k\sigma_a - \mathrm{E}(e_t)]/\sigma_a),\end{aligned}$$

若$\mathrm{E}(e_t)/\sigma_a$与$\delta f(t)$同号, 上式$= \mathrm{P}(-k-\delta f(t) < Z < k-\delta f(t))$; 若$\mathrm{E}(e_t)/\sigma_a$与$\delta f(t)$异号, 上式$= \mathrm{P}(-k+\delta f(t) < Z < k+\delta f(t))$. 这里$Z = [e_t - \mathrm{E}(e_t)]/\sigma_a \sim N(0,1)$, 所以由正态分布对称性有: $\gamma = \mathrm{P}(-k-\delta f(t) < Z < k-\delta f(t))$. 即: 对固定的$k$和$\delta$, $\gamma$是$f(t)$的偶函数, 记$\gamma$为$\gamma[f(t)]$. 有: $\gamma[f(t)] = \gamma[-f(t)]$. 所以$f(t)$取绝对值是合理的, 又$\gamma$还是$f(t)$的减函数, 或者说$1-\gamma$是$f(t)$的增函数. 这说明均值变化被检出的概率是$f(t)$的增函数. 另外, 若在$t = T$时过程均值没有发生变化, 即: $\delta = 0$, 则$f(t) = 0$; 若过程均值发生变化, 即: $\delta \neq 0$, 则$f(t) > 0$. 因此$f(t)$做检验能力的衡量指标是合理的.

若以传统X-图来检验过程均值是否发生变化, 它的前提假设是: $\{x_t\}$独立, 即: $\beta = 0$. 此时检验能力

$$f(t) = \left|\mathrm{E}\Big(\frac{e_t}{\sigma_a}\Big)\Big/\delta\right| = \left|\mathrm{E}\Big(\frac{x_t-\mu}{\sigma_x}\Big)\Big/\delta\right| = \begin{cases} 0, & t < T;\\ 1, & t \geq T.\end{cases}$$

因此, 只要残差X-图在时刻$t \geq T$有$f(t) > 1$, 则说明这一刻残差X-图的检验能力优于X-图.

下面我们来计算可逆MA(1)过程的检验能力指标$f(t)$, $t \geq T$. 由逆转公式

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j (x_{t-j} - \mu).$$

这样, 残差

$$\begin{aligned}e_t &= x_t - \mu + \beta\varepsilon_{t-1}\\ &= x_t - \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \beta^{j+1}(x_{t-1-j} - \mu)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j (x_{t-j} - \mu),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(e_T) &= \delta\sigma_x,\\ \mathrm{E}(e_{T+k}) &= (1+\beta+\cdots+\beta^k)\delta\sigma_x, \qquad k \geq 1.\end{aligned}$$

相应地

$$\begin{aligned}f(T) &= \left|\mathrm{E}\Big(\frac{e_T}{\sigma_a}\Big)\Big/\delta\right| = \sqrt{1+\beta^2},\\ f(T+k) &= \left|\mathrm{E}\Big(\frac{e_{T+k}}{\sigma_a}\Big)\Big/\delta\right| = \sqrt{1+\beta^2}(1+\beta+\cdots+\beta^k), \qquad k \geq 1.\end{aligned}$$

由此得定理1.

**定理1** 对有正态白噪声可逆MA(1)过程有

(1) $\beta > 0$时, $f(T+k) > 1 \quad k = 0, 1, \cdots$.

(2) $\beta < 0$时, $f(T) > 1$, $f(T+2k+1) < 1 \quad k = 0, 1, \cdots$.

(3) $\beta < 0$时, 存在$0 > \beta_2^0 > \beta_4^0 > \cdots > -1$, 使得当$\beta \in (-1, \beta_{2k}^0)$时, $f(T+2m) > 1$, $m = 1, 2, \cdots, k$; 当$\beta \in (\beta_{2k}^0, 0)$时, $f(T+2m) < 1$, $m = k+1, k+2, \cdots$.

定理证明参见附录1. 并且由定理1可以得到下面的推论.

**推论1** $-0.56 \le \beta < 0$时, $f(T+k) < 1 \quad k = 1, 2, \cdots$.

### §2.2 MA(2)

下面我们来看二阶可逆滑动平均过程

$$x_t - \mu = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2},$$

其残差

$$e_t = x_t - \mu + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2},$$
$$\sigma_a^2 = \mathsf{Var}(e_t) = \frac{1}{1+\beta_1^2+\beta_2^2}\sigma_x^2.$$

逆转公式

$$\varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s (x_{t-s} - \mu),$$

其中$\{\varphi_s\}$满足:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s B^s = \frac{1}{1-\beta_1 B - \beta_2 B^2}.$$

这里$B$是后移算子, 即: $B\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$, $Bx_t = x_{t-1}$. 于是

$$e_t = x_t - \mu + \beta_1 \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s (x_{t-1-s} - \mu) + \beta_2 \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s (x_{t-2-s} - \mu),$$

所以

$$\mathsf{E}(e_T) = \delta\sigma_x,$$
$$\mathsf{E}(e_{T+1}) = (1+\beta_1)\delta\sigma_x,$$
$$\mathsf{E}(e_{T+k}) = \left(1 + \beta_1 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s + \beta_2 \sum_{s=0}^{k-2} \varphi_s\right)\delta\sigma_x, \qquad k \ge 2.$$

相应地

$$f(T) = \left|\mathsf{E}\left(\frac{e_T}{\sigma_a}\right)\Big/\delta\right| = \sqrt{1+\beta_1^2+\beta_2^2},$$
$$f(T+1) = \left|\mathsf{E}\left(\frac{e_{T+1}}{\sigma_a}\right)\Big/\delta\right| = \sqrt{1+\beta_1^2+\beta_2^2}\,|1+\beta_1|,$$
$$f(T+k) = \left|\mathsf{E}\left(\frac{e_{T+k}}{\sigma_a}\right)\Big/\delta\right| = \sqrt{1+\beta_1^2+\beta_2^2}\left|1 + \beta_1 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s + \beta_2 \sum_{s=0}^{k-2} \varphi_s\right|, \qquad k \ge 2.$$

由此得定理2.

**定理2** 对有正态白噪声可逆MA(2)过程有

(1) $f(T) > 1$;

(2) $\beta_1 > -\beta_2 > 0$且$\beta_1^2 + 4\beta_2 \ge 0$时, $f(T+k) > 1 \quad k = 1, 2, \cdots$.

定理证明参见附录2.

### §2.3 MA($q$)

对于一般的$q$阶可逆滑动平均过程

$$x_t-\mu=\varepsilon_t-\beta_1\varepsilon_{t-1}-\cdots-\beta_q\varepsilon_{t-q},$$

其残差

$$e_t=x_t-\mu+\beta_1\varepsilon_{t-1}+\cdots+\beta_q\varepsilon_{t-q},$$

$$\sigma_a^2=\mathsf{Var}(e_t)=\frac{1}{1+\beta_1^2+\cdots+\beta_q^2}\sigma_x^2.$$

逆转公式

$$\varepsilon_t=\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(x_{t-s}-\mu),$$

其中$\{\varphi_s\}$满足:

$$\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_sB^s=\frac{1}{1-\beta_1B-\cdots-\beta_qB^q},$$

于是

$$e_t=x_t-\mu+\beta_1\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(x_{t-1-s}-\mu)+\cdots+\beta_q\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s(x_{t-q-s}-\mu),$$

所以

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(e_T)&=\delta\sigma_x,\\
\mathsf{E}(e_{T+k})&=\Big(1+\beta_1\sum_{s=0}^{k-1}\varphi_s+\cdots+\beta_k\Big)\delta\sigma_x,\qquad 1\le k<q,\\
\mathsf{E}(e_{T+k})&=\Big(1+\beta_1\sum_{s=0}^{k-1}\varphi_s+\cdots+\beta_q\sum_{s=0}^{k-q}\varphi_s\Big)\delta\sigma_x,\qquad k\ge q.
\end{aligned}$$

相应地

$$\begin{aligned}
f(T)&=\Big|\mathsf{E}\Big(\frac{e_T}{\sigma_a}\Big)\Big/\delta\Big|=\sqrt{1+\beta_1^2+\cdots+\beta_q^2},\\
f(T+k)&=\Big|\mathsf{E}\Big(\frac{e_{T+k}}{\sigma_a}\Big)\Big/\delta\Big|=\sqrt{1+\beta_1^2+\cdots+\beta_q^2}\Big|1+\beta_1\sum_{s=0}^{k-1}\varphi_s+\cdots+\beta_k\Big|,\qquad 1\le k<q,\\
f(T+k)&=\Big|\mathsf{E}\Big(\frac{e_{T+k}}{\sigma_a}\Big)\Big/\delta\Big|=\sqrt{1+\beta_1^2+\cdots+\beta_q^2}\Big|1+\beta_1\sum_{s=0}^{k-1}\varphi_s+\cdots+\beta_q\sum_{s=0}^{k-q}\varphi_s\Big|,\qquad k\ge q.
\end{aligned}$$

显然, $f(T)>1$. 在$t>T$时, $f(t)>1$或$<1$的条件有待进一步的讨论.

**定理3** 对有正态白噪声可逆MA($q$)过程有: $f(T)>1$.

## §3. 平稳可逆ARMA过程

### §3.1 ARMA(1,1)

首先, 我们考察平稳可逆ARMA(1,1)过程

$$x_t-\mu=\alpha(x_{t-1}-\mu)+\varepsilon_t-\beta\varepsilon_{t-1},$$

其残差

$$e_t=x_t-\mu-\alpha(x_{t-1}-\mu)+\beta\varepsilon_{t-1},$$

$$\sigma_a^2=\mathsf{Var}(e_t)=\frac{1-2\alpha\rho_1+\alpha^2}{1+\beta^2}\sigma_x^2.$$

逆转公式

$$\varepsilon_t=\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{s-1}(\beta-\alpha)(x_{t-s}-\mu)+x_t-\mu,$$

这样

$$\begin{aligned}e_t&=x_t-\mu-\alpha(x_{t-1}-\mu)+\beta\Big[\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{s-1}(\beta-\alpha)(x_{t-s-1}-\mu)+x_{t-1}-\mu\Big]\\&=x_t-\mu+\sum_{s=0}^{\infty}\beta^{s}(\beta-\alpha)(x_{t-s-1}-\mu),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}(e_T)=\delta\sigma_x,\\&\mathsf{E}(e_{T+1})=(1+\beta-\alpha)\delta\sigma_x,\\&\mathsf{E}(e_{T+k})=\Big(1+\sum_{s=0}^{k-1}\beta^s(\beta-\alpha)\Big)\delta\sigma_x,\qquad k=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

相应地

$$\begin{aligned}f(T)&=\Big|\mathsf{E}\Big(\frac{e_T}{\sigma_a}\Big)\Big/\delta\Big|=\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-2\alpha\rho_1+\alpha^2}},\\f(T+1)&=\Big|\mathsf{E}\Big(\frac{e_{T+1}}{\sigma_a}\Big)\Big/\delta\Big|=\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-2\alpha\rho_1+\alpha^2}}|1+\beta-\alpha|,\\f(T+k)&=\Big|\mathsf{E}\Big(\frac{e_{T+k}}{\sigma_a}\Big)\Big/\delta\Big|=\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-2\alpha\rho_1+\alpha^2}}\Big|1+\sum_{s=0}^{k-1}\beta^s(\beta-\alpha)\Big|,\qquad k=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

由此得定理4.

**定理4** 对有正态白噪声平稳可逆ARMA(1,1)过程有

(1) $f(T)>1$;

(2) $\beta\geq\alpha>0$时, $f(T+k)>1\ \ k=1,2,\cdots$.

定理证明参见附录3.

## §3.2 ARMA$(p,q)$

对于一般的平稳可逆自回归滑动平均过程

$$x_t-\mu=\alpha_1(x_{t-1}-\mu)+\cdots+\alpha_p(x_{t-p}-\mu)+\varepsilon_t-\beta_1\varepsilon_{t-1}-\cdots-\beta_q\varepsilon_{t-q},$$

其残差

$$e_t=x_t-\mu-\alpha_1(x_{t-1}-\mu)-\cdots-\alpha_p(x_{t-p}-\mu)+\beta_1\varepsilon_{t-1}+\cdots+\beta_q\varepsilon_{t-q},$$

$$\sigma_a^2=\mathsf{Var}\,(e_t)=\frac{\Big(1+\sum_{k=1}^{p}\alpha_k^2\Big)+\Big(-2\alpha_1+2\sum_{k=1}^{p-1}\alpha_k\alpha_{k+1}\Big)\rho_1+\cdots+(-2\alpha)\rho_p}{1+\beta_1^2+\cdots+\beta_q^2}\sigma_x^2.$$

记上式为:

$$\sigma_a^2=\frac{1}{M_{p,q}}\sigma_x^2,$$

其中

$$M_{p,q}=\frac{1+\beta_1^2+\cdots+\beta_q^2}{\Big(1+\sum_{k=1}^{p}\alpha_k^2\Big)+\Big(-2\alpha_1+2\sum_{k=1}^{p-1}\alpha_k\alpha_{k+1}\Big)\rho_1+\cdots+(-2\alpha)\rho_p}$$

逆转公式

$$\varepsilon_t = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s (x_{t-s} - \mu),$$

其中 $\{\varphi_s\}$ 满足:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s B^s = \frac{1 - \alpha_1 B - \cdots - \alpha_p B^p}{1 - \beta_1 B - \cdots - \beta_q B^q},$$

于是

$$e_t = x_t - \mu - \alpha_1 (x_{t-1} - \mu) - \cdots - \alpha_p (x_{t-p} - \mu) + \beta_1 \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s (x_{t-1-s} - \mu) + \cdots + \beta_q \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s (x_{t-q-s} - \mu),$$

所以

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(e_T) &= \delta \sigma_x, \\ \mathrm{E}(e_{T+1}) &= (1 + \beta_1 - \alpha_1) \delta \sigma_x, \\ \mathrm{E}(e_{T+k}) &= \Big(1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_p + \beta_1 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s + \cdots + \beta_q \sum_{s=0}^{k-q} \varphi_s \Big) \delta \sigma_x. \end{aligned}$$

相应地

$$\begin{aligned} f(T) &= \left| \mathrm{E}\Big(\frac{e_T}{\sigma_a}\Big) \Big/ \delta \right| = \sqrt{M_{p,q}}, \\ f(T+1) &= \left| \mathrm{E}\Big(\frac{e_{T+1}}{\sigma_a}\Big) \Big/ \delta \right| = \sqrt{M_{p,q}} |1 + \beta_1 - \alpha_1|, \\ f(T+k) &= \left| \mathrm{E}\Big(\frac{e_{T+k}}{\sigma_a}\Big) \Big/ \delta \right| = \sqrt{M_{p,q}} \left| 1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_p + \beta_1 \sum_{s=0}^{k-1} \varphi_s + \cdots + \beta_q \sum_{s=0}^{k-q} \varphi_s \right|. \end{aligned}$$

显然, $f(T) > 1$. 在 $t > T$ 时, $f(t) > 1$ 或 $< 1$ 的条件有待进一步的讨论.

**定理5** 对有正态白噪声的平稳可逆 ARMA$(p, q)$ 过程有: $f(T) > 1$.

定理证明参见附录4.

**附录1: 证明定理1**

(1) $\beta > 0$ 时, $f(T+k) = \sqrt{1+\beta^2}(1 + \beta + \cdots + \beta^k) > \sqrt{1+\beta^2} > 1 \quad k = 0, 1, \cdots$.

(2) $\beta < 0$ 时

$$\begin{aligned} f(T) &= \sqrt{1+\beta^2} > 1, \\ f(T+2k+1) &= \sqrt{1+\beta^2}(1 + \beta + \cdots + \beta^{2k+1}) \\ &< (1-\beta)(1 + \beta + \cdots + \beta^{2k+1}) \\ &= 1 - \beta^{2k+2} < 1 \qquad k = 0, 1, \cdots. \end{aligned}$$

(3) 考察:

$$\begin{aligned} f(T+2k) =& \sqrt{1+\beta^2}(1 + \beta + \cdots + \beta^{2k}) \\ =& \sqrt{1+\beta^2}(1 - \beta^{2k+1}) \frac{1}{1-\beta}, \qquad k = 1, 2, \cdots, \\ f'_\beta(T+2k) =& [1 + \beta - (2k+1)\beta^{2k} + 2k\beta^{2k+1} \\ & - (2k+2)\beta^{2k+2} + (2k+1)\beta^{2k+3}] \Big( \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}(1-\beta)^2} \Big). \end{aligned}$$

令

$$g(\beta)=1+\beta-(2k+1)\beta^{2k}+2k\beta^{2k+1}-(2k+2)\beta^{2k+2}+(2k+1)\beta^{2k+3}.$$

则

$$\begin{aligned}g'(\beta)=&1-(4k^2+2k)\beta^{2k+1}+(4k^2+2k)\beta^{2k}\\&-(2k+2)^2\beta^{2k+1}+(4k^2+8k+3)\beta^{2k+2}\\>&0,\qquad \beta\leq 0.\end{aligned}$$

所以$g(\beta)$在$\beta\leq 0$时严格单调增．又因为$g(-1)=-8k-4<0$, $g(0)=1>0$, 所以$\exists\beta_0\in(-1,0)$使得$g(\beta_0)=0$.

$$\therefore\ g(\beta)\begin{cases}<0, & -1<\beta<\beta_0;\\ \geq 0, & \beta_0\leq\beta<0.\end{cases}\qquad \text{i.e.}\qquad f'_\beta\begin{cases}<0, & -1<\beta<\beta_0;\\ \geq 0, & \beta_0\leq\beta<0.\end{cases}$$

因此, $f(T+2k)$在$(-1,\beta_0)$上单调减, 在$[\beta_0,0)$上单调增．

又$f(T+2k)|_{\beta=0}=1$, $f(T+2k)|_{\beta=-1}=\sqrt{2}$. 所以$\exists\beta^0_{2k}\in(-1,\beta_0)$使得$f(T+2k)|_{\beta=\beta^0_{2k}}=1$. 则当$\beta^0_{2k}<\beta<0$时, $f(T+2k)<1$; 当$-1>\beta>\beta^0_{2k}$时, $f(T+2k)<1$.

又, 对任意$\beta\in(-1,0)$有:

$$\begin{aligned}f(T+2(k+1))&=\sqrt{1+\beta^2}(1+\beta+\cdots+\beta^{2k+2})\\&=\sqrt{1+\beta^2}(1+\beta+\cdots+\beta^{2k}+\beta^{2k+1}(1+\beta))\\&<\sqrt{1+\beta^2}(1+\beta+\cdots+\beta^{2k})\\&=f(T+2k),\end{aligned}$$

所以, 若$f(T+2k)<1$, 则$f(T+2(k+1))<1$; 若$f(T+2(k+1))>1$, 则$f(T+2k)>1$. 又因为$f(T+2(k+1))|_{\beta=\beta^0_{2k}}<f(T+2k)|_{\beta=\beta^0_{2k}}=1$, 所以$\beta^0_{2k+2}<\beta^0_{2k}$. 由此定理得证．

特别, 经计算得: $f(T+2)|_{\beta=-0.56}<1$, $f(T+2)|_{\beta=-0.57}>1$. 所以当$-0.56\leq\beta<0$时$f(T+2)<1$. 即得推论1. □

**附录2: 证明定理2**

(1) 显然, $f(T)=\sqrt{1+\beta_1^2+\beta_2^2}>1$.

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\infty}\varphi_s B^s&=\frac{1}{1-\beta_1B-\beta_2B^2}=\frac{1}{(1-\lambda_1B)(1-\lambda_2B)}\\&=\sum_{i=0}^{\infty}(\lambda_1B)^i\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_2B)^j=\sum_{s=0}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=s}\lambda_1^i\lambda_2^j\Big)B^s,\end{aligned}$$

所以$\varphi_s=\sum\limits_{i+j=s}\lambda_1^i\lambda_2^j$, 其中$\lambda_1,\lambda_2$是方程$x^2-\beta_1x-\beta_2=0$的根．

又因为

$$\begin{aligned}f(T+k)&=\sqrt{1+\beta_1^2+\beta_2^2}\Big|1+\beta_1\sum_{s=0}^{k-1}\varphi_s+\beta_2\sum_{s=0}^{k-2}\varphi_s\Big|\\&=\sqrt{1+\beta_1^2+\beta_2^2}\Big|1+(\beta_1+\beta_2)\sum_{s=0}^{k-2}\varphi_s+\beta_1\varphi_{k-1}\Big|,\end{aligned}$$

所以只要$\beta_1+\beta_2>0$, $\beta_1>0$, 且$\varphi_s>0$, 就有$f(T+k)>1$.

若$\beta_1^2+4\beta_2\geq 0$, 则方程$x^2-\beta_1x-\beta_2=0$的两根$\lambda_1,\lambda_2$均为实数．进一步若$\beta_1>0$, $\beta_2<0$, 则有$\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, 从而$\varphi_s>0$.

因此, 当$\beta_1 > -\beta_2 > 0$且$\beta_1^2 + 4\beta_2 \geq 0$时, 有$f(T+k) > 1$. $\square$

**附录3: 证明定理4**

(1) $\rho_1 = \dfrac{\alpha(1+\beta^2) - \beta(1+\alpha^2)}{1+\beta^2 - 2\alpha\beta}$, (参见文献[3], $P_{64}$)

$$\begin{aligned}1 - 2\alpha\rho_1 + \alpha^2 &= 1 + \alpha^2 - 2\alpha\frac{\alpha(1+\beta^2) - \beta(1+\alpha^2)}{1+\beta^2-2\alpha\beta}\\ &= 1 - \alpha^2 - 2\alpha\frac{-\beta(1-\alpha^2)}{1+\beta^2-2\alpha\beta}\\ &= (1-\alpha^2)\frac{1+\beta^2}{1+\beta^2-2\alpha\beta},\end{aligned}$$

所以

$$f(T) = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-2\alpha\rho_1+\alpha^2}} = \sqrt{(1+\beta^2)\Big/\Big[(1-\alpha^2)\frac{1+\beta^2}{1+\beta^2-2\alpha\beta}\Big]} = \sqrt{1+\frac{(\alpha-\beta)^2}{1-\alpha^2}} > 1.$$

(2) $f(T+k) = \sqrt{\dfrac{1+\beta^2}{1-2\alpha\rho_1+\alpha^2}}\Big|1+\sum\limits_{s=0}^{k-1}\beta^s(\beta-\alpha)\Big|\cdot\ k = 1, 2, \cdots.$

所以$\beta \geq \alpha > 0$时, $f(T+k) > 1 \quad k = 1, 2, \cdots.$ $\square$

**附录4: 证明定理5**

由传递形式: (参见文献[2], $P_{41}$)

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j} = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j},$$

所以$\sigma_x^2 = \mathrm{Var}(x_t) = \Big(1+\sum\limits_{j=1}^{\infty}\psi_j^2\Big)\sigma_a^2$. 因为$\sum\limits_{j=0}^{\infty}|\psi_j| < \infty$, 所以$\sigma_x^2 > \sigma_a^2$. 从而, $M_{p,q} = \dfrac{\sigma_a^2}{\sigma_x^2} > 1$. 所以$f(T) = \dfrac{1}{\sqrt{M_{p,q}}} > 1$. $\square$

## 参 考 文 献


[1] Zhang, N.F., Detection capability of residual chart for autocorrelated data, *Journal of Applied Statistics*, **24(2)**(1997), 363–380.
[2] 安鸿志, 时间序列分析, 华东师大出版社, 1992.
[3] 杨位钦, 顾岚, 时间序列分析与动态数据建模, 北京理工大学出版社, 1988.


# Detection Capability of Residual X-Chart for Stationary Reversible ARMA Process Data


Jiang Yongkang　　Wang Jinglong

(*Dept. of Statistics, East China Normal University, Shanghai, 200062*)



In the statistical process control environment a primary method to deal with auto-correlated data is the use of a residual chart. The detection capability of the residual X-Chart for the stationary reversible ARMA process will be studied in this paper. Conditions under which the residual X-Chart reduces or increases the detection capability are given.