应用概率统计　第十六卷
第三期　2000年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 16 No. 3 Aug. 2000

回归函数的投影寻踪逼近的L_p收敛性*

田　铮　　肖华勇
(西北工业大学, 西安, 710072)

摘　要

投影寻踪是用来处理高维数据得一类新型统计方法. 由于不知道 $\mathsf{E}(r_m(x)|\alpha_m^Tx)$ 的具体形式, 给投影寻踪回归的应用带来一定的困难, 为此, 作者曾证明岭函数为多项式形式的投影寻踪回归的 L_2 收敛性 [3], 本文在文献 [3] 的基础上进一步证明了回归函数投影寻踪逼近的 L_p 收敛性.

关键词: 回归函数, 投影寻踪逼近, L_p收敛性.
学科分类号: O211.7.

§1. 引　言

设 (X,Y) 是随机变量, 其中 X 是 k 维随机变量, Y 是一维随机变量, 称

$$f(x)=\mathsf{E}(Y|X=x)$$

为回归函数. 回归函数的投影寻踪逼近就是用一系列岭函数的和逼近回归函数, 即

$$f(x)=\sum_{j=1}^{m}g_j(\alpha_j^Tx),$$

其中 $\alpha_j\in R^k$, $\alpha_j^T\alpha_j=1$, $j=1,2,\cdots,m$, 称 $g_j(\alpha_j^Tx)$, $j=1,2,\cdots,m$ 为岭函数. 为考察其收敛性, 需引入一个有界测度, 如概率测度 P, 则回归函数的投影寻踪逼近的 L_p 收敛是指 $m\to\infty$, 有

$$\int[f(x)-g_j(\alpha_j^Tx)]^p d\mathsf{P}(x)\to 0,$$

其中 $\alpha_j,g_j(t)$ 可以和 m 有关.

具体实现回归函数的投影寻踪逼近时, 需要给出 α_j 和 $g_j(\alpha_j^Tx)$ 的选取方法. Friedman and Stuetzle(2) 给出一种逐步选取方法, 具体步骤如下:

在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 及 $g_1(\cdot),g_2(\cdot),\cdots,g_{m-1}(\cdot)$ 给定后, 寻找 $\alpha_m,g_m(\cdot)$ 使

$$r_m(x)=f(x)-\sum_{j=1}^{m-1}g_j(\alpha_j^Tx)$$

的模 $\int r_m^2(x)d\mathsf{P}$ 在 $j=m-1$ 到 $j=m$ 时减少得最多, 易得

$$g_m(\alpha_m^Tx)=\mathsf{E}(r_m(x)|\alpha_m^Tx),$$

*本文得到航空科学基金资助.
本文1995年7月17日收到. 2000年1月21日收到第二次修改稿.

且应选 α_m, 使 $\mathsf{E}g_m^2(\alpha_m^T x)$ 达到最大者.

在实际应用中, 由于不知道 $\mathsf{E}(r_m(x)|\alpha_m^T x)$ 的具体形式, 给投影寻踪回归的应用带来一定的困难. 为此, 作者与其合作者曾首次提出岭函数为多项式形式的投影寻踪回归方法, 并证明了岭函数为多项式形式的投影寻踪回归的 L_2 收敛性, 实际应用表明这是一类行之有效的非参数回归方法.

本文在 [3] 的基础上进一步证明回归函数投影寻踪逼近的 L_p 收敛性.

§2. 回归函数的投影寻踪逼近的 L_p 收敛性

为方便起见, 这里给出 $\mathcal{L}$-系的定义.

定义 设 L 是定义在 Ω 上的一族函数, 满足条件: 若 $f \in L$, 则 $f^+, f^- \in L$, 称函数族 L 为 $\mathcal{L}$-系, 如果它满足条件:

1) $1 \in L$ (1 表示恒等于 1 的函数);

2) L 中有限个函数的线性组合如果有意义, 则仍属于 L;

3) 如 $f_n \in L$, $0 \le f_n \uparrow f$, f 有界或属于 $\mathcal{L}$, 则 $f \in L$.

考虑二元总体 $(B_k, \mathcal{B}_k, \mathsf{P})$, 其中 B_k 为 R^k 上的 k 维有界闭集, $\mathcal{B}_k$ 为 B_k 上的 Borel 域, P 为 $\mathcal{B}_k$ 中的有界测度. 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ 是定义在 B_k 上的可测函数, 满足 $\int_{B_k} |f_i(x)|^p d\mathsf{P}(x) < \infty$, $i = 1, 2, \cdots$, $p \ge 1$, 设 F 是由 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ 张成的线性空间, F 在 $L^p(B_k)$ 中稠密. 关于回归函数的投影寻踪逼近的收敛性有如下结论:

定理 1 设 $f(x)$ 是 $\mathcal{B}_k$ 上可测实函数, 且 $\int_{B_k} |f(x)|^p d\mathsf{P}(x) < \infty$, 其中 $p \ge 1$, 则总存在 β_j 与 $g_j(\alpha_j^T x)$ 使下式成立,

$$\int_{B_k} \left| f(x) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j(\alpha_j^T x) \right|^p d\mathsf{P}(x) < 0, \qquad m \to \infty, \tag{2.1}$$

其中 $g_j(\alpha_j^T x) \in F$, β_j 为实常数, α_j 为 k 维实向量.

考虑在 $C[B_k]$ 空间上回归函数的投影寻踪逼近的收敛性, $C[B_k]$ 表示 B_k 上连续函数的全体组成的空间, 其上的一致范数定义为 $\|f(x)\| = \sup\limits_{x \in B_k} |f(x)|$, 设 F 是由基底 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ 张成的线性空间, $f_i \in C[B_k]$, $i = 1, 2, \cdots, n, \cdots$, F 在 $C[R_k]$ 中稠密, 关于回归函数的投影寻踪逼近的收敛性有如下结论:

定理 2 设 $f(x) \in C[B_k]$, 则总存在 β_j, α_j 及 $g_j(\alpha_j^T x)$, 使得下式成立,

$$\left\| f(x) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j(\alpha_j^T x) \right\| \to 0, \qquad m \to \infty, \tag{2.2}$$

其中 $g_j(\alpha_j^T x) \in F$, β_j 为实常数, α_j 为 k 维实向量.

§3. 定理的证明

为证明定理 1 和定理 2, 首先给出如下引理.

引理 $L^p(B_k, \mathcal{B}_k, \mathsf{P})$ 中满足 (2.1) 式的函数的全体组成的函数族为 $\mathcal{L}$-系.

引理的证明类似于 [3] 中引理的证明, 这里不再赘述.

定理1的证明： 设:

$$A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k):x_{11}\le x_1\le x_{12},\cdots,x_{k1}\le x_k\le x_{k2}\}\subset B_k, \tag{3.1}$$

首先证明示性函数 $I_A(x)\in L$.

设 $f(x)$ 为 A 上的有界实值连续函数, 由函数论知识可知, R^k 上的有界闭子集 A 上的有界连续函数可用一个 k 元多项式一致逼近, 即对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $g(x)$, 使得对于任意 $x\in A$,

$$|f(x)-g(x)|<\left(\frac{\varepsilon}{\mathsf{P}(A)}\right)^{1/p}, \tag{3.2}$$

则成立

$$\int_{B_k}|f(x)-g(x)|^p d\mathsf{P}(x)<\frac{\varepsilon}{\mathsf{P}(B_k)}\cdot\mathsf{P}(B_k)=\varepsilon, \tag{3.3}$$

其中 $\mathsf{P}(A)$ 为 A 的测度.

注意到多项式可表示为有限个多项式形式的岭函数, 即

$$g(x)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j g_j(\alpha_j^T x), \tag{3.4}$$

其中 $g_j(\cdot)$ 为多项式. 故 $f(x)$ 可用多项式形式的岭函数逼近, 即存在 $\mathcal{B}_k,\alpha_k$ 及多项式 $W_k(\cdot)$, 使得下式成立

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{B}_k W_k(\alpha_k^T x), \tag{3.5}$$

而 $W_j(\cdot)\in L^p(R^k)$, 且 F 在 $L^p(R^k)$ 中稠密, 则存在实数 u_{kj} 及一元多项式 $g_{kj}(t)\in F$, 使得

$$W_k(t)=\sum_{j=1}^{\infty}u_{kj}g_{kj}(t) \tag{3.6}$$

成立, 将 (3.6) 式代入 (3.5) 式, 得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{B}_k u_{kj}g_{kj}(\alpha_{kj}^T x), \tag{3.7}$$

从而 $f(x)\in L$.

令

$$h_{ni}(t)=\begin{cases}0 & t\le x_{i1};\\ 2^n(t-x_{i1}) & x_{i1}<t\le x_{i1}+\dfrac{1}{2^n};\\ 1 & x_{i1}+\dfrac{1}{2^n}<t\le x_{i2}-\dfrac{1}{2^n};\\ 2^n(x_{i2}-t) & x_{i2}-\dfrac{1}{2^n}<t\le x_{i2};\\ 0 & t>x_{i2},\end{cases} \tag{3.8}$$

则显然 $h_{ni}(t)$, $i=1,2,\cdots,k$ 为有界连续函数.

易知

$$0\le h_{ni}(t)\uparrow I_{\{t:x_{i1}\le t\le x_{i2}\}}(t)\le 1, \tag{3.9}$$

令

$$f_n(x) = h_{n1}(x_1) \cdots h_{nk}(x_k) = \prod_{i=1}^{k} h_{ni}(x_i), \tag{3.10}$$

则有

$$0 \le f_n(x) \uparrow I_A(x) \le 1, \qquad n \to \infty, \tag{3.11}$$

由于 $f_n(x) \in L$, 且 L 为 $\mathcal{L}$-系, 则由 $\mathcal{L}$-系性质知, 示性函数 $I_A(x) \in L$.

令 δ 是由形如上面集合 A 的全体组成的集类, 则 δ 是一个 π-系, 而由 δ 生成的最小 σ 代数 $\sigma(\delta)$ 是 k 维 Borel 域 $\mathcal{B}_k$, 又 δ 中任意示性函数 $I_A(x) \in L$, 则由函数形式的单调类定理, 对一切 $f(x) \in L^p(B_k, \mathcal{B}_k, \mathrm{P})$, 都有 $f(x) \in L$. 由此定理 1 得证. □

定理 2 的证明和定理 1 的证明类似, 这里也不再赘述.

§4. 结束语

从本质上讲, 回归函数投影寻踪逼近是属于非参数回归方法, 对包括 PP 方法在内的各类统计非参数方法的研究是目前研究的热点之一. 由本文所给出的结论表明回归函数投影寻踪逼近具有良好的性质, 同时实际应用也表明回归函数投影寻踪逼近是一类行之有效的非参数回归方法 [3][4].

参考文献

[1] Huber, P.J., Projection pursuit, *Ann. Statist.*, **13**(1985), 437–557.
[2] Friedman, J.H., Stuetzle, W., Projectionpursuit regression, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **76**(1981), 817–823.
[3] 田铮, 戎海武, PPR的收敛性和全向攻击导弹数据处理, 应用概率统计, **9(3)**(1993), 319–325.
[4] Tian Zheng, The study of computer-intensive method: non-parametric regression and non-linear time series models, University of Dortmund Germany, 1994.

The L_p Convergence for Projection Pursuit Regression

TIAN ZHENG　　XIAO HUAYONG

(*Northwestern Polytechnical University, xi'an, 710072*)

Projection Pursuit (PP) is a new statistical method which can be used to handle with high-dimensional data. However, no specific forms of the ridge function for projection pursuit regression (PPR) have been proposed, so it is difficult to employ the PPR to solve practical problems. The authors have proposed polynomials as ridge function and proved the L_2 convergence for PPR [3]. Furthermore, we prove the L_p convergence of projection pursuit approximation for regression function in this paper.