应用概率统计 第六卷
第一期 1990 年 2 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 6. No. 1 Feb. 1990

线性平稳过程的协方差和均值估计的大偏差结果

程 兵
(中国科学院应用数学研究所)

摘 要

本文讨论了具有有界输入的线性平稳过程的参数估计的大偏差的上界和下界.

§1. 引 言

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一概率空间, $\{\mathscr{F}_t\}$为$\mathscr{F}$的子σ-域流$(-\infty<t<\infty)$. 设$\{\varepsilon(t)\}$为$\{\mathscr{F}_t\}$-鞅差列, 且为平稳和遍历的, $E\varepsilon(t)=0$和$E[\varepsilon^2(t)|\mathscr{F}_{t-1}]=\sigma^2$ a. s. 考虑线性平稳过程

(1)
$$X(t)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon(t-j)$$

其中, $a_0=1$, $\sum\limits_j|a_j|<\infty$. 则有

(2) 均值 $EX(t)=0$

(3) 协方差 $\gamma_k=EX(t)\cdot X(t+k)$

且对任意的正整数N, 我们考虑样本均值和样本协方差

(4)
$$\hat{W}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}X(t)$$

(5)
$$\hat{r}_N(k)=\hat{r}_N(-k)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}X(t)\cdot X(t+k),\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1.$$

显然易知$\hat{W}_N$为$EX(t)=0$的相容估计, 由[4]知当$E\varepsilon^2(t)=\sigma^2<\infty$时, $\hat{r}_N(k)$为$r(k)$的相容估计.

我们希望知道在大偏差意义下$\hat{W}_N$收敛到零和$\hat{r}_N(k)$收敛到$r(k)$的收敛速度. 在[1]中, D. Dürr 和 W. Loges 考虑了具有有界输入自回归过程:

(*)
$$X_t=\theta x_{t-1}+V_t,\ |\theta|<1,\quad \sup_t\|V_t\|_\infty\leqslant C$$

的参数的最小二乘估计θ_n的大偏差的上界.

显然, 此时(*)中的自回归过程是一特殊的线性平稳过程. 本文将考虑具有有界输入的线性平稳过程的参数估计的大偏差的上界和下界.

本文 1987 年 7 月 31 日收到

§2. 上　　界

引理 2.1　设$\{Y_t\}$为$\{\mathscr{F}_t\}$鞅差，$\sup\limits_t \sup\limits_{\omega\in\Omega}|Y_t(w)|=D<\infty$. 则对任给$\varepsilon>0$有

$$P\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}Y_t\right|>\varepsilon\right)\leqslant P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left|\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}Y_t\right|>\varepsilon\right)$$
$$\leqslant 2\exp\left[-\frac{1}{e^2D^2}\varepsilon^2N\right]$$

其中
$$e=2.7321\cdots$$

证明　见[1]引理 2.1.

假定 I　$\sup\limits_{i,j,t}\sup\limits_{\omega\in\Omega}|\varepsilon(t-i)(\omega)\varepsilon(t-j)(\omega)-\sigma^2\delta_{ij}|=D<\infty$.

这里
$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

定理 2.1　设序列$\{Z_{(t)}\}$满足模型(1)，且满足假定 I; 它的样本自协方差$\hat{r}_N(k)$和自协方差$r(k)$由(3)和(5)给出. 则对任给$\varepsilon>0$，存在正整数$Q=Q(\varepsilon)$，使得当

$$N>[2k(D+\sigma^2)(\sum_{i,j}|a_ia_j|)/\varepsilon]$$

时，有

$$P(|\hat{r}_N(k)-r(k)|>\varepsilon)\leqslant 2Q^2\exp\left[-\frac{\varepsilon^2N}{L}\right]$$

其中，
$$L=64e^2D^2\Big(\sum_{i,j=0}^{Q}|a_i||a_j|\Big)^2.$$

即
$$\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(|\hat{r}_N(k)-r(k)|>\varepsilon)\leqslant-\varepsilon^2/L.$$

证明　$k=0$时，

$$\hat{r}_{N(0)}-r_{(0)}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[X^2(t)-EX^2(t)]$$
$$=\sum_{i,j=0}^{\infty}a_ia_j\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)-\sigma^2\delta_{ij}]$$

由于$\sum\limits_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty$，故对任给$\varepsilon>0$，存在正整数$Q(\varepsilon)$，使得

$$\sum_{j=Q+1}^{\infty}|a_j|<\min\left\{\sqrt{\varepsilon/4D},\ \varepsilon/4D\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|\right\}$$

因此
$$\sum_{i,j=Q+1}^{\infty}\left|a_ia_j\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-1)\varepsilon(t-j)-\sigma^2\delta_{ij}]\right|\leqslant D\Big(\sum_{j=Q+1}^{\infty}|a_j|\Big)^2<\varepsilon/4$$

及
$$\sum_{i=0}^{Q}\sum_{j=Q+1}^{\infty}\left|a_ia_j\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)-\sigma^2\delta_{ij}]\right|$$
$$\leqslant D\sum_{i=0}^{Q}\sum_{j=Q+1}^{\infty}|a_ia_j|\leqslant D\Big(\sum_{i=0}^{Q}|a_i|\Big)\Big(\sum_{j=Q+1}^{\infty}|a_j|\Big)\leqslant\varepsilon/4$$

同理
$$\sum_{i=Q+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{Q}\left|a_ia_j\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)-\sigma^2\delta_{ij}]\right|\leqslant\varepsilon/4$$

因此

$$P(|\hat{r}_N(0)-r(0)|>\varepsilon)\leqslant P\Big(\sum_{i,j=Q+1}^{\infty}\Big|a_ia_j\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)-\sigma^2\delta_{ij}]\Big|$$

$$+\sum_{i,j=1}^{Q}\Big|a_ia_j\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)-\sigma^2\delta_{ij}]\Big|$$

$$+\sum_{i=1}^{Q}\sum_{j=Q+1}^{\infty}\Big|a_ia_j\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)-\sigma^2\delta_{ij}]\Big|$$

$$+\sum_{i=Q+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{Q}\Big|a_ia_j\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)-\sigma^2\delta_{ij}]\Big|>\varepsilon\Big)$$

$$\leqslant P\Big(\sum_{i,j=0}^{Q}\Big|a_ia_j\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)-\sigma^2\delta_{ij}]\Big|>\varepsilon/4\Big)$$

$$\leqslant\sum_{i,j=0}^{Q}P\Big(\frac{1}{N}\Big|\sum_{t=1}^{N}\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)-\sigma^2\delta_{ij}\Big|>\frac{\varepsilon}{4\sum_{i,j=0}^{Q}|a_ia_j|}\Big)$$

令

$$S_N(i,\ j)=\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-i)\varepsilon(t-j)-\sigma^2\delta_{ij}]$$

若将 i, j 固定,则 S_N 为 $\{\mathscr{F}_{N+m}\}$ 鞅列,其中 $m=(-j)\vee(-i)$.

由此,由引理 2.1

$$P(|\hat{r}_{N(0)}-r_{N(0)}|>\varepsilon)\leqslant 2Q^2\exp\Big[-\frac{\varepsilon^2N}{L}\Big]$$

其中

$$L=16e^2D^2\Big(\sum_{i,j=0}^{Q}|a_ia_j|\Big)^2.$$

而对于一般的 $k\geqslant1$,注意到:

$$\frac{1}{N}\Big|\sum_{t=N-k+1}^{N}X(t)X(t+k)\Big|\leqslant\frac{k}{N}(D+\sigma^2)\Big(\sum_{i,j=0}^{\infty}|a_ia_j|\Big)$$

因此,若取 $N>\Big[\frac{2k}{\varepsilon}(D+\sigma^2)\sum_{i,j=0}^{\infty}|a_ia_j|\Big]$,则类似于 $k=0$ 的证明,存在 $Q=Q(\varepsilon)$ 使得

$$P(|\hat{r}_N(k)-\gamma(k)|>\varepsilon)\leqslant P\Big(\frac{1}{N}\Big|\sum_{t=1}^{N}[X(t)X(t+k)-EX(t)X(t+k)]\Big|$$

$$+\frac{1}{N}\Big|\sum_{t=N-k+1}^{N}[X(t)X(t+k)]\Big|<\varepsilon\Big)$$

$$\leqslant P\Big(\frac{1}{N}\Big|\sum_{t=1}^{N}[X(t)X(t+k)-EX(t)X(t+k)]\Big|<\varepsilon/2\Big)$$

$$\leqslant 2Q^2\exp\Big[-\frac{\varepsilon^2N}{L}\Big]$$

其中,

$$L=64e^2D^2\Big[\sum_{i,j=0}^{Q}|a_ia_j|\Big]^2\ .$$

系 设 $\{X(t)\}$ 为阶是 q 的滑动平均过程,且假定 I 成立,那么对于样本自协方差 $\hat{r}_N(k)$和自协方差 $r(k)$,对任给 $\varepsilon>0$,当 $N>2k(D+\sigma^2)\Big(\sum_{i,j=0}^{q+1}|a_i||a_j|\Big)/\varepsilon$ 时,有

$$P(|\hat{r}_N(k)-r(k)|>\varepsilon)\leqslant 2(q+1)^2\exp\Big[-\frac{\varepsilon^2N}{L}\Big]$$

其中

$$L=64e^2D^2\Big(\sum_{i,j=0}^{q+1}|a_ia_j|\Big)^2.$$

即有

$$\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(|\hat{r}_N(k)-r(k)|>\varepsilon)\leqslant-\varepsilon^2/L.$$

§3. 下　　界

本文用一个类似于[2]中所用的极限来求大偏差的下界，但我们给出一个简洁的证明，从而避免了[2]中采用的复杂的凸函数方法．记

$$z_N(k)=\sum_{t=1}^{N-k}X(t)X(t+k),\quad k=0,\ \pm 1,\ \cdots,\ \pm N-1.$$

则
$$\hat{r}_N(k)=\frac{1}{N}z_N(k).$$

设 G 为 R^1 中的开集，考虑 $\frac{1}{N}\log P(\hat{r}_N(k)\in G)$ 的下界问题．

假定 II　设上述假定 I 成立．令

$$C_N^{(k)}(t)=\frac{1}{N}\log E\exp\{tz_N(k)\}$$

(显然，$C_N^{(k)}(t)$ 在整个实轴 R' 上均有定义)．假定 $C^{(k)}(t)=\lim\limits_{N\to\infty}C_N^{(k)}(t)$ 在 R^1 上存在且有限，$C^{(k)}(t)$ 在 R^1 上二阶可导，并且，$\left.\frac{d^2C^{(k)}}{dt^2}\right|_{R^1}>0$，或者 $\left.\frac{d^2C^{(k)}}{dt^2}\right|_{R^1}\equiv 0$.

例：$k=0$ 的情形．$\alpha_0=1$，$\alpha_j=0(j>0)$，$\{\varepsilon(t)$ 为 i.i.d 的均值为 0，方差 $\sigma^2>0$ 的有界 r.v 列，则

$$\begin{aligned}C_N^{(0)}(t)&=\frac{1}{N}\log E\exp\{tz_{N(0)}\}\\&=\frac{1}{N}\log E\exp\left\{t\sum_{s=1}^{N}\varepsilon^2(s)\right\}=\log E\exp\{t\varepsilon^2(1)\}\triangleq C^{(0)}(t)\end{aligned}$$

因此，$C^{(0)}(t)$ 满足假定 II．令

$$I^{(k)}(z)=\sup_{t\in R^1}\{tz-C^{(k)}(t)\},\ z\in R^1$$

$$I^{(k)}(A)=\inf\{I^{(k)}(z);\ z\in A\}.\ \forall A\subset R^1.$$

引理 3.1　设有随机变量列 Y_n 满足条件：

(i) $D(s)=\lim\limits_{N\to\infty}D_N(s)\triangleq\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log E\exp\{sY_N\}$

在实轴 R^1 上存在且有限．

(ii) 函数 D 在 R^1 上二阶可导，且 $\left.\frac{d^2D}{ds^2}\right|_{R^1}>0$，或 $\left.\frac{d^2D}{ds^2}\right|_{R^1}\equiv 0$.

令
$$J(z)=\sup_s\{sz-D(s)\},\ \forall z\in R'.$$

如果 $\frac{dD}{ds}(0)=a$，则函数 J 在 a 处达到唯一的最小值 $\left(\text{唯一性在 }\frac{dD}{ds}\text{ 的值域 }V\left(\frac{dD}{ds}\right)\text{ 中成立}\right)$.

证明　1° 若 $\frac{d^2D}{ds^2}\equiv 0$．由于 $D(0)=0$，$\frac{dD}{ds}(0)=a$，则 $D(s)=as$．从而

$$J(z)=\sup_{s\in R^1}\{sz-as\}=\begin{cases}0, & z=a,\\ \infty, & z\neq a.\end{cases}$$

显然函数 J 在 a 处达到唯一的最小值．

2° 若 $\frac{d^2D}{ds^2}>0$. 因为 $J(z)=\sup\limits_{s\in R^1}\{sz-D(s)\}$, 由[3]定理 12.2

$$D(s)=\sup_{z\in R^1}\{sz-J(z)\}\geqslant sz-J(z)$$

但 $D(0)=0$, 因此 $J(z)\geqslant 0$.

记函数 $\frac{dD}{ds}$ 的值域为 $V\left(\frac{dD}{ds}\right)$. 显然 $a\in V\left(\frac{dD}{ds}\right)$. 现取 $z\in V\left(\frac{dD}{ds}\right)$. 令

$$g(s)\triangleq sz-D(s)$$

$$\frac{dg}{ds}=z-\frac{dD}{ds}(s),\quad \frac{d^2g}{ds^2}=-\frac{d^2D}{ds^2}$$

由于 $\frac{d^2D}{ds^2}>0$, 所以函数 $g(s)=sz-D(s)$ 在 $s(z)$ 处达到最大值. 其中 $s(z)$满足 $\frac{dD}{ds}(s(z))=Z$, 从而$J(z)=s(z)Z-D(s(z))$. 由假设 $\frac{dD}{ds}(0)=a$ 得 $J(a)=D(0)=0$.

一般地 若 J 在 $\bar{z}\in V\left(\frac{dD}{ds}\right)$处达到最小, 则必须有

$$s(\bar{z})\bar{z}-D(s(\bar{z}))=J(\bar{z})=0$$

(因为 $J\geqslant 0$ 和 $J(a)=0$). 而 $D'(s(\bar{z}))=\bar{z}$ 推出

$$s(\bar{z})\cdot\frac{dD}{ds}(s(\bar{z}))-D(s(\bar{z}))=0$$

对于函数 $f(s)=s\frac{dD}{ds}(s)-D(s)$, 从

$$\frac{df}{ds}(s)=s\frac{d^2D}{ds^2}(s)$$

推出$f(s)=0$只有一个唯一的零点 $s=0$. (因为 $f(0)=0$, 而f在 $s=0$ 处达到极小). 而 $f(s(\bar{z}))=0$ 得 $s(\bar{z})=0$, 从而

$$\bar{Z}=\frac{dD}{ds}(s(\bar{z}))=\frac{dD}{ds}(0)=a$$

引理得证.

引理 3.2: 对随机变量 Y_n 的假设同引理 3.1. 设 $K\subset R^1$ 为闭集, 令 $J(K)=\inf\{J(z);z\in K\}$, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\log P\left(\frac{1}{n}Y_n\in K\right)\leqslant -J(K)$$

证明 类似于[2]中引理 V.2 的证明可证.

定理 3.1 设对正整数 k 和序列 $\{s(t)\}$, 假定 II 成立. 设 $V\left(\frac{dC^{(k)}}{dt}\right)$ 为函数 $\frac{dC^{(k)}}{dt}$ 的开值域, 取开集 $G\subset R'$, 且 $G\cap V\left(\frac{dC^{(k)}}{dt}\right)$非空, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(\hat{Y}_n(k)\in G)\geqslant -I^{(k)}\left(G\cap V\left(\frac{dC^{(k)}}{dt}\right)\right)$$

证明 设 $Q_N^{(k)}$ 为随机变量 $\hat{r}_N(k)$的分布函数, 令

$$dQ_{N,t}^{(k)}(x)=\frac{\exp\{Ntx\}}{\exp\{NC_N^{(k)}(t)\}}dQ_N^{(k)}(x)$$

取 $z_0\in V\left(\frac{dC^{(k)}}{dt}\right)\cap G$, 及 $\varepsilon>0$, 使得 $B(z_0,\ \varepsilon)\subset G$, 其中 $B(z_0,\ \varepsilon)=\{x;\ |x-z_0|<\varepsilon\}$, 则

$$Q_N^{(k)}(G)\geqslant Q_N^{(k)}(B(z_0,\ \varepsilon))=\exp\{NC_N^{(k)}(t)\}\int_{(Bz_0,\varepsilon)}\exp\{-Ntx\}dQ_{N,t}^{(k)}(x)$$

对于 $x\in B(z_0,\ \varepsilon)$, $-tx\geqslant -tz_0-\varepsilon|t|$, 故

$$\varliminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log Q_N^{(k)}(G)$$

$$(*)\qquad \geqslant C^{(k)}(t)-tz_0-\varepsilon|t|+\varliminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log Q_{N,t}^{(k)}(B(z_0,\ \varepsilon))$$

对任给$t\in R^1$成立. 现在选取 $t=t(z_0)$, 使得 $\frac{dC^{(k)}}{dt}(t(z_0))=z_0$. 由于

$$Q_{N,t}^{(k)}(R^1)=\int_{R^1}\frac{\exp\{Ntx\}}{\exp\{NC_N^{(k)}(t)\}}dQ_N^{(k)}(x)=1$$

所以设随机变量 $\frac{1}{N}Y_N$ 的分布函数为 $Q_{N,t}^{(k)}$, 因此

$$D_N(s)=\frac{1}{N}\log\widetilde{E}\exp\{sY_N\}$$

$$=\frac{1}{N}\log\int_R\exp\{Nsx\}dQ_{N,t(z_0)}^{(k)}(x)=C_N^{(k)}(s+t(z_0))-C_N^{(k)}(t(z_0))$$

从而
$$D(s)=\lim_{N\to\infty}D_N(s)=C^{(k)}(s+t(z_0))-C^{(k)}(t(z_0))$$

满足引理 3.1 的条件, 且

$$\frac{dD}{ds}(0)=\frac{dC^k}{dt}(t(z_0))=z_0$$

因此, 由引理 3.1, $J(z)\triangleq\sup_s\{sz-D(s)\}$ 在 z_0 处达到唯一的最小值. 下面说明

$$\lim_{N\to\infty}Q_{N,t(z_0)}^{(k)}(B(z_0,\ \varepsilon))=1.$$

令
$$K=R^1\backslash B(z_0,\ \varepsilon)=\{x;\ |x-z_0|\geqslant\varepsilon\}$$

由引理 3.2, 对充分大的 N 有

$$\widetilde{P}\Big(\frac{1}{N}Y_N\in K\Big)\leqslant\exp\Big\{-\frac{N}{2}J(K)\Big\}$$

若 $J(K)=0$, 则存在 $\{x_N\}\subset K$, 使得 $J(x_N)\to 0(N\to\infty)$. 由于对任意实数 α, 集$L_\alpha=\{z,\ J(z)\leqslant\alpha\}$ 为有界闭集. 令 $B(0,\ 1)=\{s;\ |s|<1\}$, 于是对任意 $z\in L_\alpha$

$$|z|=\sup_{s\in B(0,1)}|sz|\leqslant\alpha+\sup_{s\in B(0,1)}|D(s)|<\infty$$

即集 L_α 为有界闭集.

从而存在 $\bar{x}\in R^1$, 使得 $x_N\to\bar{x}$, 而 K 为闭集 所以 $\bar{x}\in K$. 由[3]定理 12.2 知, J 为下半连续得 $J(\bar{x})=0$. 这与 J 在 z_0 处达到唯一的最小值矛盾, 因此 $J(K)>0$, 从而

$$\varlimsup_{N\to\infty}Q_{N,t(z)}^{(k)}(K)=\varlimsup_{N\to\infty}\widetilde{P}\Big(\frac{1}{N}Y_N\in K\Big)=0$$

而
$$Q_{N,t(z)}^{(k)}(B(z_0,\ \varepsilon))=1-Q_{N,t(z)}^{(k)}(K)$$

所以
$$\lim_{N\to\infty}Q_{N,t(z)}^{(k)}(B(z_0,\ \varepsilon))=1$$

而由引理 3.1 的证明过程知

$$t(z_0)z_0-C^{(k)}(t(z_0))=I(z_0),$$

因而由(*)式有

$$\varliminf_{N\to\infty}Q_N^{(k)}(G)\geqslant -I(z_0)-\varepsilon|t|$$

先令 $\varepsilon\searrow 0$, 再取上确界得:

$$\varliminf_{N\to\infty} Q_N^{(k)}(G)\geqslant -I\left(G\cap V\left(\frac{dC^{(k)}}{dt}\right)\right)$$

得证.

§4. 均值的大偏差

设线性序列为

$$X(t)=\sum_{j=0}^{\infty}Q_j\varepsilon(t-j),\quad \alpha_0=1,\quad \sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j|<\infty.$$

$\{\varepsilon(t)\}$ 为 i.i.d. 的有界 r.v.列, $E\varepsilon(t)=a$.

$$\sup_t \sup_{w\in\Omega}|\varepsilon(t)|=M,$$

$$EX(t)=a\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j$$

样本均值为:

$$\hat{W}_N=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}X(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N}\varepsilon(t-j)$$

定理 4.1 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $Q=Q(\varepsilon)$, 使得

$$P(|\hat{W}_N-EX(1)|>\varepsilon)\leqslant 2Q\exp\left[-\frac{\varepsilon^2N}{L}\right]$$

即

$$\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(|\hat{W}_N-EX(1)|>\varepsilon)\leqslant -\varepsilon^2/L$$

其中常数

$$L=4e^2M^2\left[\sum_{j=0}^{Q}|\alpha_j|\right]^2$$

证明 对任给 $\varepsilon>0$, 取定 $Q=Q(\varepsilon)$, 使得

$$\sum_{j=Q+1}^{\infty}|\alpha_j|<\varepsilon/2\cdot M$$

其中 $|\varepsilon(t)-a|<M$, $\forall t$. 由于

$$\begin{aligned}
&P(|\hat{W}_N-EX(1)|>\varepsilon)\\
&=P\left(\left|\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-j)-a]\right|>\varepsilon\right)\\
&\leqslant P\left(\sum_{j=0}^{Q}|\alpha_j|\frac{1}{N}\left|\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-j)-a]\right|+\sum_{j=Q+1}^{\infty}|\alpha_j|\frac{1}{N}\left|\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-j)-a]\right|>\varepsilon\right)\\
&\leqslant P\left(\sum_{j=0}^{Q}|\alpha_j|\left\{\frac{1}{N}\left|\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-j)-a]\right|\right\}>\varepsilon/2\right)\\
&\leqslant QP\left(\frac{1}{N}\left|\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t)-a]\right|>\varepsilon/2\cdot\sum_{=0}^{Q}|\alpha_j|\right)\\
&\leqslant 2Q\exp\left[-\frac{\varepsilon^2N}{L}\right]
\end{aligned}$$

其中 $L=4e^2M^2\left(\sum_{j=0}^{Q}|\alpha_j|\right)^2$. 所以

$$\varlimsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(|\hat{W}_N-EX(1)|)\leqslant -\varepsilon^2/L$$

定理4.2 设常数 $M=\sum_{j=0}^{q}\alpha\neq 0$, $\alpha_j=0(j>q)$, A 为 R^1 中的线性凸集,则

$$P((\hat{W}_N+EX(1))\in A)\geqslant\{P([\varepsilon(1)-a]\in A)\}^{N+q+1}$$

即
$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P([\hat{W}_N-EX(1)]\in A)\geqslant-\log\frac{1}{P([\varepsilon(1)-a]\in A)}$$

证明 $P([\hat{W}_N-EX(1)]\in A)$

$$\begin{aligned}&=P\left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-j)-a]\in A\right)\\&=P\left(\sum_{j=0}^{q}\alpha_j\frac{\alpha_j}{M}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-j)-\alpha]\in M^{-1}A\right)\\&\geqslant P\left(\bigcap_{j=0}^{q}\left\{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[\varepsilon(t-j)-a]\in A\right\}\right)\\&\geqslant P\left(\bigcap_{j=0}^{q}\bigcap_{t=1}^{N}\{[\varepsilon(t-j)-a]\in A\}\right)\\&=P\left(\bigcap_{j=1-q}^{N}\{[\varepsilon(t-j)-a]\in A\}\right)\\&=[P([\varepsilon(1)-a]\in A)]^{N+q+1}\end{aligned}$$

所以
$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P([W_N-EX(1)]\in A)\geqslant-\log\frac{1}{P([\varepsilon(1)-a]\in A)}.$$

参 考 文 献

[1] D. DÜRR, Loges W., Large deviation results and rates in the central limit theorem for parameter estimators for autoregressive processes. *Saukhy* ā **47**(1985) series A. 1—24.

[2] Ellis, R. S., Large deviation for a general class of random vectors. *Ann of Prob.* **12**(1984). 6—12.

[3] Rockfellar, R. T., *Convex Analysis*. Princeton Univ. Press 1970.

[4] 安鸿志,线性平稳序列的自相关分析,交流讲义 .

LARGE DEVIATION RESULTS FOR THE ESTIMATIONS OF COVARIANCE AND MEAN OF LINEAR STATIONARY PROCESSES

Cheng Bing

(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica)

We consider the discrete time linear stationary process:

$$X(t)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon(t-j),\ t=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots$$

Where $\{\varepsilon(t)\}$ is a $\{\mathscr{F}_t\}$-stationary ergodic martingale difference sequences. We assume $a_0=1$, $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty$ and $E[\varepsilon^2(t)\,|\,\mathscr{F}_{t-1}]=\sigma^2>0$ a.s. Let the sample covariance function and the sample mean function of the process $X(t)$ be respectively:

$$\hat{r}_N(k)=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k} X(t)X(t+k)=\hat{r}_N(-k), \quad k=0,\ 1,\ 2, \cdots$$

and $\hat{W}_N=\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N} X(t)$ where N is an arbitrary positive integer. The aim of this paper is to derive large deviation for the sample covariance function and the sample mean functions.