一类SUR模型参数两步估计的有限样本结果

刘 金 山
(五邑大学数理系, 广东江门, 529020)

摘 要

对于$m(\geq 3)$ SUR模型(1), 其设计矩阵满足条件(4), 本文得到了回归系数$\beta_i(i=1,\cdots,m)$的两步Aitken估计的精确协方差表达式, 从而获得了两步估计优于LS估计的有限样本性质. 特别是, 当$m=3$时本文结果可以与 Revankar(1974)给出的一类两方程SUR模型结果相比较.

关键词: SUR模型, 两步Aitken估计, 有限样本方差.

学科分类号: O212.1

§1. 引 言

考虑经济等领域中经常遇到的SUR(Seemingly Unrelated Regression)模型:

$$\begin{aligned} &y_i = X_i\beta_i + \varepsilon_i, \qquad i=1,\cdots,m. \\ &\mathsf{E}(\varepsilon_i)=0, \qquad \mathsf{Cov}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\sigma_{ij}I_n, \end{aligned} \tag{1}$$

其中y_i是$n\times 1$随机向量, X_i是$n\times p_i$, 列满秩设计矩阵, β_i是$p_i\times 1$未知回归系数, ε_i是$n\times 1$随机误差向量, $\Sigma=(\sigma_{ij})$是$m\times m$正定阵. 当Σ未知时, 对参数β_i的估计或推断问题是对这种模型研究的焦点. Zellner(1962, 1963)首先考虑了在Σ已知时的$\beta=(\beta'_1,\cdots,\beta'_m)'$的最佳线性无偏估计$(BLUE)\widehat{\beta}$中, 用$\Sigma$的限定估计(restricted estimate)或非限定估计(unrestricted estimate) $S=(S_{ij})$代替$\Sigma=(\sigma_{ij})$后得到的两步Aitken估计, 或称为Zellner估计

$$\widetilde{\beta}=(X'(S^{-1}\otimes I)X)^{-1}X'(S^{-1}\otimes I)y, \tag{2}$$

其中$y=(y'_1,\cdots,y'_m)'$, $X=\mathrm{diag}(X_1,\cdots,X_m)$, 符号$\otimes$表示矩阵的Kronecker乘积. 若取

$$s_{ij}=\frac{y'_i\widetilde{N}y_j}{n-r} \qquad i,j=1,\cdots,m. \tag{3}$$

则$S=(s_{ij})$就是Σ的非限定估计, 这里 $\widetilde{N}=I-X_0(X'_0X_0)^+X'_0$, $X_0=(X_1,\cdots,X_m)$, $r=$秩(X_0), A^+表示矩阵A的Moore—Penrose逆. 本文中我们总取S为由(3)定义. 当$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m$的分布关于原点对称时, Aitken估计$\widetilde{\beta}$是$\beta$的无偏估计[2]. 由于它不含未知参数, 是一种可行估计, 因此多年来一直很受人们的重视. 有不少文献对它的性质, 特别是有限样本性质进行了研究. 在

本文1997年11月17日收到.

误差分布为正态的假设下, Zellner[2]和Revankar[3]分别对于满足 $X_1'X_2=0$和$X_1=(X_2,L)$的两方程系统(即在模型(1)中$m=2$)得到了β_i的两步估计$\widetilde{\beta}_i(i=1,2)$的精确协方差阵, 从而获得了它们的有限样本性质. 林春土[4]把他们的结果推广到满足$P_1P_2=P_2P_1$的两方程系统, 这里$P_i=X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'$是向$X_i$的列空间$\mu\{X_i\}$的正交投影阵. [5]和[6]又分别把[2]和[3]的结果推广到满足 $X_i'X_j=0(i\neq j,i,j=1,\cdots,m)$和$P_1P_2=P_2=\cdots=P_m$的 $m(m\geq 2)$方程系统. [7]把[3]和[6]的结果进一步推广到满足 $\mu\{X_i\}\subset\mu\{X_j\}(i\geq j)$的一类“供求” 经济模型. [8],[9]等文献获得了另几类m方程系统的结果. 本文则考虑满足下列条件的一类$m(m\geq 3)$ SUR系统.

$$P_1=\cdots=P_k,\quad P_{k+1}=\cdots=P_s,\quad P_{s+1}=\cdots=P_m,\quad P_1=P_s+P_m, \tag{4}$$

其中$1\leq k<s<m$, $P_i=X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'$, $(i=1,\cdots m)$.

§2. 一些引理

引理1 在条件(4)之下有

$$P_1P_s=P_s,\quad P_1P_m=P_m,\qquad 且\quad P_sP_m=0 \tag{5}$$

证明 由于$P_1=P_s+P_m$, 且$P_s\geq 0$(非负定), $P_m\geq 0$可知$P_1\geq P_s\geq 0$, $P_1\geq P_m\geq 0$. 由[10]的引理7.2.1可知, $\mu\{P_s\}\subset\mu\{P_1\}$, $\mu\{P_m\}\subset\mu\{P_1\}$, 这等价于 $P_1P_s=P_s$, $P_1P_m=P_m$. 又由于P_1是对称幂等阵可知

$$P_1=P_s+P_m={P_1}^2=P_s+P_sP_m+P_mP_s+P_m,\qquad P_mP_s+P_sP_m=0.$$

上式左右乘P_s得: $2P_sP_mP_s=2P_sP_mP_mP_s=2(P_sP_m)(P_sP_m)'=0$. 由此即得$P_sP_m=0$,证毕.

引理2 对于SUR模型(1), 设${\beta_i}^*$是β_i的线性无偏估计, 则${\beta_i}^*$是BLUE的充要条件是

$$\mathrm{Cov}({\beta_i}^*,y_j)N_j=0,\qquad 对\quad j=1,\cdots,m\quad 成立, \tag{6}$$

其中$N_j=I-P_j$.

证明见[8]中定理1.

引理3 设随机矩阵A服从Wishart分布$W_f(g,V)$, V正定且 $g>f+1$则A^{-1}服从逆Wishart分布$W_f^{-1}(g+f+1,V^{-1})$, 且 A^{-1}的期望为

$$\mathrm{E}(A^{-1})=\frac{1}{g-(f+1)}V^{-1}. \tag{7}$$

引理4 设$A\sim W_f(g,V)$, A和V分别分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},\qquad V=\begin{pmatrix}V_{11}&V_{12}\\V_{21}&V_{22}\end{pmatrix},$$

其中A_{ii}和V_{ii}是同阶方阵, 则在A_{22}给定条件下, A_{12}的条件分布为

$$A_{12}\mid A_{22}\sim N(V_{12}V_{22}^{-1}A_{22},\ A_{22}\otimes V_{11.2}), \tag{8}$$

其中$V_{11.2}=V_{11}-V_{12}V_{22}^{-1}V_{21}$.

引理3, 引理4的证明可参见文献[11], [12]等.

引理5 设A为随机矩阵, $\mathrm{E}(A)=M$, $\mathrm{Cov}(A)=T\otimes Z$, U为非随机矩阵, 则

$$\mathrm{E}(A'UA)=M'UM+T'\mathrm{Tr}(UZ), \tag{9}$$

其中$\mathrm{Tr}(\bullet)$表示矩阵的迹.

证明 设x_i是A的第i列, μ_i是M的第i列, 则有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(x_i'Ux_j)&=\mathrm{E}\{(x_i-\mu_i)'U(x_j-\mu_j)\}+\mu_i'U\mu_j=\mathrm{E}\{\mathrm{Tr}[U(x_j-\mu_j)(x_i-\mu_i)']\}+\mu_i'U\mu_j\\&=\mathrm{Tr}[U\mathrm{E}(x_j-\mu_j)(x_i-\mu_i)']+\mu_i'U\mu_j=\mathrm{Tr}[U(t_{ji}Z)]+\mu_i'U\mu_j=t_{ji}\mathrm{Tr}(UZ)+\mu_i'U\mu_j,\end{aligned}$$

其中t_{ij}是T的元素, 由此可知(9)式成立.

引理6 在引理4的假设下, 记f_1为A_{11}的阶数, 则有

$$\mathrm{E}(A_{12}A_{22}^{-1})=V_{12}V_{22}^{-1},\qquad \mathrm{E}(A_{21}A_{11}^{-1})=V_{21}V_{11}^{-1}, \tag{10}$$

$$\mathrm{E}(A_{12}A_{22}^{-1}V_{22}A_{22}^{-1}A_{21})=V_{12}V_{22}^{-1}V_{21}+\frac{f-f_1}{g-(f-f_1+1)}V_{11.2}, \tag{11}$$

$$\mathrm{E}(A_{21}A_{11}^{-1}V_{11}A_{11}^{-1}A_{12})=V_{21}V_{11}^{-1}V_{12}+\frac{f_1}{g-(f_1+1)}V_{22.1}, \tag{12}$$

其中$V_{11.2}$如在(8)中, $V_{22.1}=V_{22}-V_{21}V_{11}^{-1}V_{12}$.

证明 由引理4可知, 在A_{22}给定条件下

$$A_{12}A_{22}^{-1}\mid A_{22}\sim N(V_{12}V_{22}^{-1},A_{22}^{-1}\otimes V_{11.2}),$$

$$\therefore\quad \mathrm{E}(A_{12}A_{22}^{-1})=\mathrm{E}[\mathrm{E}(A_{12}A_{22}^{-1}\mid A_{22})]=V_{12}V_{22}^{-1}$$

同理知$\mathrm{E}(A_{21}A_{11}^{-1})=V_{21}V_{11}^{-1}$. (10)式得证. 又根据引理5知

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(A_{12}A_{22}^{-1}V_{22}A_{22}^{-1}A_{21})&=\mathrm{E}\{\mathrm{E}(A_{12}A_{22}^{-1}V_{22}A_{22}^{-1}A_{21}|A_{22})\}\\&=\mathrm{E}\{V_{12}V_{22}^{-1}V_{22}V_{22}^{-1}V_{21}+V_{11.2}\mathrm{Tr}(V_{22}A_{22}^{-1})\}\\&=V_{12}V_{22}^{-1}V_{21}+V_{11.2}\mathrm{Tr}[V_{22}\mathrm{E}(A_{22}^{-1})].\end{aligned} \tag{13}$$

由Wishart分布的性质知: $A_{22}\sim W_{f-f_1}(g,V_{22})$ 于是由引理3得

$$\mathrm{E}(A_{22}^{-1})=\frac{1}{g-(f-f_1+1)}V_{22}^{-1}. \tag{14}$$

(14)代入(13)并注意到V_{22}是$f-f_1$阶方阵就得到(11)式. 同理可得(12)式.

§3. 主要结果

为推导本文的主要结果, 我们需要把矩阵Σ和它的非限定估计S作同样分块如下:

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}&\Sigma_{13}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}&\Sigma_{23}\\\Sigma_{31}&\Sigma_{32}&\Sigma_{33}\end{bmatrix},\qquad S=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{13}\\S_{21}&S_{22}&S_{23}\\S_{31}&S_{32}&S_{33}\end{bmatrix}$$

其中Σ_{11}是k阶正定阵, Σ_{22}是$s-k$阶正定阵, Σ_{33}是$m-s$阶正定阵.

定理1 对于SUR模型(1), 在条件(4)下, 回归系数β_i的BLUE为

$$\widehat{\beta}_i=b_i-\sum_{t=k+1}^{s}r_{it}^{(12)}(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_m y_t-\sum_{t=s+1}^{m}r_{it}^{(13)}(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_s y_t,\qquad i=1,\cdots,k,\tag{16}$$

其中$b_i=(X_i'X_i)^{-1}X_i'y_i$是$\beta_i$的LS估计, $(r_{ik+1}^{(12)},\cdots,r_{is}^{(12)})=(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1})_{(i)}$, $(r_{is+1}^{(13)},\cdots,r_{im}^{(13)})=(\Sigma_{13}\Sigma_{33}^{-1})_{(i)}$, 这里$A_{(i)}$表示矩阵A中含有$\sigma_{ij}$(即与$\Sigma$的第i行对应)的那一行(下同).

$$\widehat{\beta}_i=b_i-\sum_{t=s+1}^{m}r_{it}^{(23)}(X_i'X_i)^{-1}X_i'y_t,\qquad i=k+1,\cdots,s,\tag{17}$$

$$\widehat{\beta}_i=b_i-\sum_{t=k+1}^{s}r_{it}^{(32)}(X_i'X_i)^{-1}X_i'y_t,\qquad i=s+1,\cdots,m,\tag{18}$$

其中$(r_{is+1}^{(23)},\cdots,r_{im}^{(23)})=(\Sigma_{23}\Sigma_{33}^{-1})_{(i)}$, $(r_{ik+1}^{(32)},\cdots,r_{is}^{(32)})=(\Sigma_{32}\Sigma_{22}^{-1})_{(i)}$.

证明 由于在条件(4)之下引理1的结论(5)成立, 故下面总假定条件(4)和(5)都成立.

当$i=1,\cdots,k$时, $\widehat{\beta}_i$由(16)式表示, 显然它是$y=(y_1',\cdots,y_m')'$的线性函数, 期望值为

$$\mathrm{E}(\widehat{\beta}_i)=\beta_i-\sum_{t=k+1}^{s}r_{it}^{(12)}(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_mX_t\beta_t-\sum_{t=s+1}^{m}r_{it}^{(13)}(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_sX_t\beta_t.$$

由条件(4),(5)可知, 当$t=k+1,\cdots,s$时, $P_mX_t=P_mP_tX_t=P_mP_sX_t=0$; 当$t=s+1,\cdots,m$时$P_sX_t=P_sP_tX_t=P_sP_mX_t=0$. 故有 $\mathrm{E}(\widehat{\beta}_i)=\beta_i$, $\widehat{\beta}_i$是β_i的无偏估计. 又对于 $j=1,\cdots,m$, 由(16)式易算得

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\widehat{\beta}_i,y_j)N_j=&\sigma_{ij}(X_i'Xi)^{-1}X_i'N_j-\sum_{t=k+1}^{s}\sigma_{tj}r_{it}^{(12)}(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_mN_j\\&-\sum_{t=s+1}^{m}\sigma_{tj}r_{it}^{(13)}(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_sN_j.\end{aligned}\tag{19}$$

由条件(4),(5)可知, 当$1\le j\le k$时, $N_j=N_i=N_1$, 即有 $X_i'N_j=X_i'N_i=0$, 且这时$P_mN_j=P_mN_1=P_m(I-P_1)=0$, $P_sN_j=P_sN_1=P_s(I-P_1)=0$.于是由(19)可知, 当$1\le j\le k$时, $\mathrm{Cov}(\widehat{\beta}_i,y_j)N_j=0$.当$k+1\le j\le s$时, $N_j=N_s, P_sN_j=0$, 而$X_i'N_j=X_i'N_s=X_i'P_1N_s=X_i'(P_s+P_m)N_s=X_i'P_mN_s=X_i'P_mN_j$.这时(19)化为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\widehat{\beta}_i,y_j)N_j&=\sigma_{ij}(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_mN_j-\sum_{t=k+1}^{s}\sigma_{tj}r_{it}^{(12)}(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_mN_j\\&=(\sigma_{ij}-\sum_{t=k+1}^{s}\sigma_{tj}r_{it}^{(12)})(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_mN_j.\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{t=k+1}^{s}\sigma_{tj}r_{it}^{(12)}=(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1})_{(i)}(\Sigma_{22})'_{(j)}=(\Sigma_{12})_{(ij)}=\sigma_{ij},$$

这里$A_{(ij)}$表示矩阵A的(i,j)元素. 因此可知, 当$k+1\le j\le s$时, 也有$\mathrm{Cov}(\widehat{\beta}_i,y_i)N_j=0$.类似地可以证明, 当$s+1\le j\le m$时, $\mathrm{Cov}(\widehat{\beta}_i,y_j)N_j=0$.因此根据引理2, 对于$i=1,\cdots,k$, 由(16)式表示的$\widehat{\beta}_i$是$\beta_i$的BLUE.

当$i=k+1,\cdots,s$时，$\widehat{\beta}_i$由(17)式表示．则有

$$\mathrm{E}(\widehat{\beta}_i)=\beta_i-\sum_{t=s+1}^{m}r_{it}^{(23)}(X_i'X_i)^{-1}X_i'\beta_t,$$

由于这时总有$P_i=P_s$,而当$t=s+1,\cdots,m$时，$P_t=P_m, X_i'X_t=X_i'P_sP_mX_t=0$,即$\mathrm{E}(\widehat{\beta}_i)=\beta_i,\widehat{\beta}_i$是$\beta_i$的线性无偏估计．又由(17)式得

$$\mathrm{Cov}(\widehat{\beta}_i,y_j)N_j=\Big(s_{ij}-\sum_{t=s+1}^{m}\sigma_{tj}r_{it}^{(23)}\Big)(X_i'X_i)^{-1}X_i'N_j \tag{20}$$

由于$P_i=P_s$，当$1\le j\le k$时，$N_j=N_1, X_i'N_j=X_i'P_sN_1=X_i'P_s(I-P_1)=0$.当$k+1\le j\le s$时，$N_j=N_s, X_i'N_j=X_i'P_sN_s=0$. 故当$1\le j\le s$时, $\mathrm{Cov}(\widehat{\beta}_i,y_i)N_j=0$. 当$s+1\le j\le m$时, 由于

$$\sum_{t=s+1}^{m}\sigma_{tj}r_{it}^{(23)}=(\Sigma_{23}\Sigma_{33}^{-1})_{(i)}(\Sigma_{33})'_{(j)}=(\Sigma_{23}\Sigma_{33}^{-1}\Sigma_{33})_{(ij)}=\sigma_{ij},$$

因此由(20)可知也有$\mathrm{Cov}(\widehat{\beta}_i,y_j)N_j=0$.于是由引理2可知, 对$i=k+1,\cdots,s$，由(17)式表示的$\widehat{\beta}_i$是$\beta_i$的BLUE．由于(18)式与(17)完全类似, 因此同理可以证明, 当$i=s+1,\cdots,m$时, 由(18)式表示的$\widehat{\beta}_i$是β_i的BLUE. 证毕．

设$\widetilde{\beta}_i$是β_i的两步Aitken估计, 则由定理1可知, 在条件 (4)下，$\widetilde{\beta}_i$可以由(16)—(18)式中用Σ的估计S代替Σ而得到．在下面定理中, 我们用$r_{it}^{(fg)}$表示$r_{it}^{(fg)}$的非限定估计, 即

$$(r_{ik+1}^{(12)},\cdots,r_{is}^{(12)})=(S_{12}S_{22}^{-1})_{(i)},\qquad (r_{is+1}^{(13)},\cdots,r_{im}^{(13)})=(S_{13}S_{33}^{-1})_{(i)}$$
$$(r_{ik+1}^{(32)},\cdots,r_{is}^{(32)})=(S_{32}S_{22}^{-1})_{(i)},\qquad (r_{is+1}^{(23)},\cdots,r_{im}^{(23)})=(S_{23}S_{33}^{-1})_{(i)}$$

定理2　在SUR模型(1)中, 设$\varepsilon_i,\cdots,\varepsilon_m$的联合分布为正态, $\widetilde{\beta}_i$是由(16)—(18)式中用非限定估计S代替Σ后得到的两步估计．则当$X_i'X_m=0, X_j'X_s=0\ \ (i=k+1,\cdots,s,\ j=s+1,\cdots,m)$成立时, 我们有

1° $\mathrm{E}(\widetilde{\beta}_i)=\beta_i,\quad i=1,\cdots,m.$

2° 当 $1\le i\le k$ 时,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\widetilde{\beta}_i)&=\mathrm{Cov}(b_i)\\&-\Big[(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})_{(ii)}-\frac{s-k}{n-r-(s-k+1)}(\Sigma_{11.2})_{(ii)}\Big](X_i'X_i)^{-1}X_i'P_mX_i(X_i'X_i)^{-1}\\&-\Big[(\Sigma_{13}\Sigma_{33}^{-1}\Sigma_{31})_{(ii)}-\frac{m-s}{n-r-(m-s+1)}(\Sigma_{11.3})_{(ii)}\Big](X_i'X_i)^{-1}X_i'P_sX_i(X_i'X_i)^{-1}\end{aligned} \tag{21}$$

3° 当 $k+1\le i\le s$ 时

$$\mathrm{Cov}(\widetilde{\beta}_i)=\mathrm{Cov}(b_i)-\Big[(\Sigma_{23}\Sigma_{33}^{-1}\Sigma_{32})_{(ii)}-\frac{m-s}{n-r-(m-s+1)}(\Sigma_{22.3})_{(ii)}\Big](X_i'X_i)^{-1} \tag{22}$$

4° 当 $s+1\le i\le m$ 时

$$\mathrm{Cov}(\widetilde{\beta}_i)=\mathrm{Cov}(b_i)-\Big[(\Sigma_{32}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{23})_{(ii)}-\frac{s-k}{n-r-(s-k+1)}(\Sigma_{33.2})_{(ii)}\Big](X_i'X_i)^{-1} \tag{23}$$

在(21)—(23)式中, $\mathrm{Cov}(b_i)=\sigma_{ii}(X_i'X_i)^{-1}$, $\Sigma_{ii.j}=\Sigma_{ii}-\Sigma_{ij}\Sigma_{jj}^{-1}\Sigma_{ji}$, $A_{(ii)}$表示矩阵A的与σ_{ii}对应的对角元素. 例如, 对$s+1\le i\le m$, 当$i=s+1$时, $A_{(ii)}$是A的第一个对角元素, 当$i=m$时, $A_{(ii)}$是A的最后一个对角元素. 其它类似.

证明　由s_{ij}的定义(3)和$X_i'\widetilde{N}=X_i'P_j\widetilde{N}=0$可知, $S=(s_{ij})$与所有的$X_i'y_j$, $X_i'P_jy_t$皆独立. 据此独立性可知, 在条件 $X_i'X_m=0$, $X_j'X_s=0$ $(i=k+1,\cdots,s,\ j=s+1,\cdots,m)$下, $\mathrm{E}(\widetilde{\beta}_i)=\beta_i$ $(i=1,\cdots,m)$. 即1°成立. 又根据上述独立性, 由(16)式知, 当$1\le i\le k$时有

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\widetilde{\beta}_i)=\mathrm{Cov}(b_i)&-2\sum_{t=k+1}^{s}\sigma_{it}\mathrm{E}(r_{it}^{(12)})(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_mX_i(X_i'X_i)^{-1}\\&+\sum_{t,j=k+1}^{s}\sigma_{tj}\mathrm{E}(r_{it}^{(12)}r_{ij}^{(12)})(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_mX_i(X_i'X_i)^{-1}\\&-2\sum_{t=s+1}^{m}\sigma_{it}\mathrm{E}(r_{it}^{(13)})(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_sX_i(X_i'X_i)^{-1}\\&+\sum_{t,j=s+1}^{m}\sigma_{tj}\mathrm{E}(r_{it}^{(13)}r_{ij}^{(13)})(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_sX_i(X_i'X_i)^{-1}\\=\mathrm{Cov}(b_i)&-2\mathrm{E}(S_{12}S_{22}^{-1}\Sigma_{22})_{(ii)}(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_mX_i(X_i'X_i)^{-1}\\&+\mathrm{E}(S_{12}S_{22}^{-1}\Sigma_{22}S_{22}^{-1}S_{21})_{(ii)}(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_mX_i(X_i'X_i)^{-1}\\&-2\mathrm{E}(S_{13}S_{33}^{-1}\Sigma_{33})_{(ii)}(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_sX_i(X_i'X_i)^{-1}\\&+\mathrm{E}(S_{13}S_{33}^{-1}\Sigma_{33}S_{33}^{-1}S_{31})_{(ii)}(X_i'X_i)^{-1}X_i'P_sX_i(X_i'X_i)^{-1}\end{aligned}\tag{24}$$

由于 $(n-r)S\sim W_m(n-r,\Sigma)$, 可知

$$(n-r)\begin{pmatrix}S_{11}&S_{12}\\S_{21}&S_{22}\end{pmatrix}\sim W_s\left(n-r,\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}\right)\tag{25}$$

于是由引理6可得

$$\mathrm{E}(S_{12}S_{22}^{-1})=\mathrm{E}[(n-r)S_{12}((n-r)S_{22})^{-1}]=\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\tag{26}$$

$$\mathrm{E}(S_{12}S_{22}^{-1}\Sigma_{22}S_{22}^{-1}S_{12})=\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}+\frac{s-k}{n-r-(s-k+1)}\Sigma_{11.2}\tag{27}$$

同理有

$$\mathrm{E}(S_{13}S_{33}^{-1})=\Sigma_{13}\Sigma_{33}^{-1}\tag{28}$$

$$\mathrm{E}(S_{13}S_{33}^{-1}\Sigma_{33}S_{33}^{-1}S_{13})=\Sigma_{13}\Sigma_{33}^{-1}\Sigma_{31}+\frac{m-s}{n-r-(m-s+1)}\Sigma_{11.3}\tag{29}$$

将(26)—(29)代入(24)整理后即得(21)式. 类似地可以证得(22), (23)式. 证毕.

若记$P_{iji}=\Sigma_{ij}\Sigma_{jj}^{-1}\Sigma_{ji}$, 则由定理2的 (21)—(23)式可知, 对$i=1,\cdots,k$, 当$(n-r-1)(P_{121})_{(ii)}\ge(s-k)\sigma_{ii}$且$(n-r-1)(P_{131})_{(ii)}\ge(m-s)\sigma_{ii}$时, $\mathrm{Cov}(\widetilde{\beta}_i)\le\mathrm{Cov}(b_i)$. 对$i=k+1,\cdots,s$, 当$(n-r-1)(P_{232})_{(ii)}\ge(m-s)\sigma_{ii}$时, $\mathrm{Cov}(\widetilde{\beta}_i)\le\mathrm{Cov}(b_i)$. 对$i=s+1,\cdots,m$, 当$(n-r-1)(P_{323})_{(ii)}\ge(s-k)\sigma_{ii}$时, $\mathrm{Cov}(\widetilde{\beta}_i)\le\mathrm{Cov}(b_i)$. 即当$P_{iji}\ne0$且$n$较大时, 两步估计$\widetilde{\beta}_i$总能优于LS估计$b_i$.

特别是, 当$m=3$时, 我们有以下推论.

推论 在SUR模型(1)中, 若$m=3$且$X_2'X_3=0$,则β_i的两步估计为

$$\widetilde{\beta_1}=b_1-\frac{s_{12}}{s_{22}}(X_1'X_1)^{-1}X_1'P_3y_2-\frac{s_{13}}{s_{33}}(X_1'X_1)^{-1}X_1'P_2y_3,$$
$$\widetilde{\beta_2}=b_2-\frac{s_{23}}{s_{33}}(X_2'X_2)^{-1}X_2'y_3,$$
$$\widetilde{\beta_3}=b_3-\frac{s_{23}}{s_{22}}(X_3'X_3)^{-1}X_3'y_3.$$

它们的协方差阵分别为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\widetilde{\beta_1})=\mathrm{Cov}(b_1)&-\sigma_{11}(\rho_{12}^2-\frac{1-\rho_{12}^2}{n-r-2})(X_1'X_1)^{-1}X_1'P_3X_1(X_1'X_1)^{-1}\\&-\sigma_{11}(\rho_{13}^2-\frac{1-\rho_{13}^2}{n-r-2})(X_1'X_1)^{-1}X_1'P_2X_1(X_1'X_1)^{-1},\end{aligned}$$
$$\mathrm{Cov}(\widetilde{\beta_2})=\mathrm{Cov}(b_2)-\sigma_{22}(\rho_{23}^2-\frac{1-\rho_{23}^2}{n-r-2})(X_2'X_2)^{-1}$$
$$\mathrm{Cov}(\widetilde{\beta_3})=\mathrm{Cov}(b_3)-\sigma_{33}(\rho_{23}^2-\frac{1-\rho_{23}^2}{n-r-2})(X_3'X_3)^{-1}$$

其中$\rho_{ij}^2=\sigma_{ij}^2/\sigma_{ii}\sigma_{jj}$, $\mathrm{Cov}(b_i)=\sigma_{ii}(X_i'X_i)^{-1}$.

由以上推论可知, 若ρ_{12}^2和ρ_{13}^2不等于零, 当样本量n足够大使$(n-r-1)\rho_{1i}^2\geq 1$ $(i=1,2)$成立时, $\mathrm{Cov}(\widetilde{\beta_1})\leq\mathrm{Cov}(b_1)$, $\widetilde{\beta_1}$优于b_1.而当$(n-r-1)\rho_{23}^2>1$时, $\mathrm{Cov}(\widetilde{\beta_2})\leq\mathrm{Cov}(b_2)$和$\mathrm{Cov}(\widetilde{\beta_3})\leq\mathrm{Cov}(b_3)$同时成立, 即这时$\widetilde{\beta_2}$和$\widetilde{\beta_3}$分别优于LS估计$b_2$和$b_3$. 这一结果与Revankar(1974)的结果相比有所加强. 因为在他的结果中, $\widetilde{\beta_2}=b_2$,联合方程没有给β_2的LS估计带来改进.

注1 定理2的条件$X_i'X_m=0$, $X_j'X_s=0$ $(i=k+1,\cdots,s,\ j=s+1,\cdots,m)$比条件(4)弱. 在定理2中将此条件换为条件(4)时定理 2的结果(21)--(23)式仍然成立.

注2 若我们用Σ的非限定估计S代替(16)—(18)式中的Σ, 则我们就构造了一种两步估计(不是Aitken估计), 它们在定理 2的条件下是β_i的无偏估计, 其精确协方差可以由(21)—(23)式得到. 因此它们可在有限样本下优于LS估计.

本文是作者在华东师大访问时完成的, 他对王静龙教授的指导表示感谢.

参 考 文 献

[1] Zellner, A., *An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias*, J. Amer. Statist. Assoc., 57(1962), 348-368.

[2] Zellner, A., *Estimators of seemingly unrelated regressions: Some exact finite sample results*, J.Amer., Statist. Assoc., 58(1963), 977-992.

[3] Revankar, N. S., *Some finite sample results in the context of two seemingly unrelated regressions*, J. Amer., Statist. Assoc., 69(1974), 187-190.

[4] 林春士, 一类半相依回归系统的两步估计, 科学通报, 14(1984), 840-842.

[5] Kakaota, Y., *The exact finite sample distribution of joint least squares estimators for seemingly unrelated regression equations*, Economic Studies Quarterly, 25(1974), 36-44.

[6] 林春士, M个相依回归方程系数的两步估计, 科学通报, 15(1984), 957.

[7] 刘金山, 一类相依回归系统的两步估计的有限样本性质, 系统科学与数学, 3(1990), 256—264.

[8] 陆安南, 佘书明, SUR模型回归系数的估计, 应用数学, 1(1991), 83-88.

[9] 刘金山, 徐丕鉴, SUR回归系统系数估计的一些推广结果, 应用数学, 3(1994), 330-336.

[10] 王松桂, 贾忠贞, 矩阵论中的不等式, 安徽教育出版社, 合肥, 1994

[11] 张尧庭, 方开泰, 多元统计分析引论, 科学出版社, 北京, 1982.

[12] Robb, J. M., *Aspects of multivariate statistical theory*, John Wiley & Sons, New York, 1982

Some Exact Finite Results of Zellner's Estimators in m Seemingly Unrelated Regressions

LIU JINSHAN

(*Wuyi University, Jiangmen Guangdong*)

For $m(\geq 3)$ seemingly unrelated regression equations : $y_i = X_i\beta_i + \varepsilon_i$, $(i = 1, \cdots, m)$, with $P_1 = \cdots = P_k$, $P_{k+1} = \cdots = P_s$, $P_{s+1} = \cdots = P_m$ and $P_1 = P_s + P_m$, where $P_i = X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'$, the exact finite sample covariance matrix of Zellner's two-step Aitken estimator $\widetilde{\beta}_i$ of $\beta_i(i = 1, \cdots, m)$, based on the unrestricted estimate S of $\Sigma = (\sigma_{ij})$ are obtained.When $m = 3$, all the three $\widetilde{\beta}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ are shown to be more efficient then the OLS estimators of β_i, for moderate departures of $\rho_{ij}^2 = \sigma_{ij}^2/\sigma_{ii}\sigma_{jj}$from zero, and the efficiencies are shown to be increased with the sample size n. These results can be compared with those obtained by Revankar(1974) for a system of 2SUR with $X_1 = (X_2, L)$.