应用概率统计　第二十二卷　　Chinese Journal of Applied Probability
第二期　2006 年 5 月　　and Statistics Vol. 22 No. 2 May 2006

信噪比的分解及其在稳健设计中的应用

傅珏生　朱红银　汪仁官
(苏州大学数学科学学院，苏州，　215006)

摘　要

本文讨论了信噪比的分解及其在稳健设计中的应用，引用 PerMIA 的概念给出了田口的信噪比和社会平均二次损失联系．最后将 97 年中国大学生数学建模的赛题作为算例，其参数设计的优化过程更为简洁．

关 键 词：信噪比，稳健设计，　PerMIA.
学 科 分 类 号：O213.2.

§1.　引　言

关于参数的最优化设计，田口玄一 [1][2] 提出了三次设计．他认为：“只要产品指标偏离目标值就会造成损失”，若指标 y 的目标值为 y_0，应以 $L(y)=k(y-y_0)^2$ 作为质量损失函数，以 $Q=k\mathsf{E}(y-y_0)^2$ 作为社会平均损失，参数设计应使得损失 Q 最小，并提出了两步法．设指标 y 的均值和方差分别为 $\mu(x),\sigma^2(x)$，x 为参数的设计值 (向量)．田口先以信噪比 $\mu^2(x)/\sigma^2(x)$ 为指标进行参数的稳健设计，再以性能 y 或灵敏度为指标进行灵敏度设计，以内外表 (正交表) 直接法求解．

田口的信噪比 (SN 比) 来源于信号传输中的信噪比，在望目特性问题中，田口把指标均值的平方 $(\mathsf{E}y)^2=\mu^2(x)$ 看作信号的功率，噪声的功率就是 y 的方差 $\sigma^2(x)$，于是信噪比定义为 $\mu^2(x)/\sigma^2(x)$，美国的 AT&T Bell 实验室的研究人员 [3] 对田口的信噪比及两步法在数学上作出了解释和推广．损失 Q 可表示为

$$
\begin{aligned}
Q &= k\mathsf{E}(y-y_0)^2=k[\mathsf{E}(y-\mathsf{E}y)^2+(\mathsf{E}y-y_0)^2]\\
&= k[\sigma^2(x)+(\mu(x)-y_0)^2]=k\Big[\frac{\sigma^2(x)}{g(\mu(x))}g(\mu(x))+(\mu(x)-y_0)^2\Big],
\end{aligned}\tag{1}
$$

这里 $g(\cdot)$ 为一待定的函数．

定义　设 $x=(x_1,x_2)$，对偏差平方和 $\mathrm{MSE}=\mathsf{E}(y-y_0)^2$，如果存在一非负函数 $g(\cdot)$，使 $\sigma^2(x)/g(\mu(x))$ 与 x_2 无关，且对任意固定的 x_1，$\mu(x)=\mu(x_1,x_2)$ 可全程调 (即指在 x_2 的取值范围内，　$\mu(x)$ 可取值域范围内的任意值)，则称 $\sigma^2(x)/g(\mu(x))$ 为一个 PerMIA (Performance Measure Independent of Adjustment)，同时称 x_2 为调节因子．

对 PerMIA，若取 $g(z)=z^2$，第一步，先选 x_1^*，$x=(x_1^*,x_2)$，使得 PerMIA 达最小 (即 SN 最大)，而 PerMIA 与 x_2 无关；第二步，再调节 x_2 为 x_2^*，使得损失 Q 达最小，此即田口提供的两步法．从而即可看出，　PerMIA 将田口两步法中的最大化信噪比和他提出的最小化社会平均损

本文 2003 年 10 月 27 日收到，　2005 年 9 月 13 日收到修改稿.

失联系了起来．本文提出了一种利用 PerMIA 这个概念，借助于调节因子进行稳健设计方法．在一定意义下给出了可以利用这种方法的充要条件，使得在应用中更为方便，便于推广．

§2. 主要结论

关于田口的信噪比，我们有如下定理：

引理 1 设随机变量 ξ, 其 $\mathsf{E}(\xi)=x$, $\mathsf{Var}\,(\xi)=x^2\sigma^2$, 而 y 是 ξ 的函数，即 $y=f(\xi)$, 则在近似意义下，y 的噪信比为常数的充要条件为 $y=c\xi^{\alpha}$, 这里 α 和 c 均为实数．

证明： 充分性：将 y 在 x 处 Taylor 展开并略去二阶及高阶项，在近似意义下，有

$$y=cx^{\alpha}+c\alpha x^{\alpha-1}(\xi-x),\qquad \mathsf{E}y=cx^{\alpha}=\mu_y(x),$$
$$\sigma_y^2(x)=\mathsf{Var}\,(y)=c^2\alpha^2x^{2(\alpha-1)}\mathsf{Var}\,(\xi)=c^2\alpha^2x^{2\alpha}\sigma^2,$$

则噪信比为

$$\frac{\sigma_y^2(x)}{\mu_y^2(x)}=\frac{c^2\alpha^2x^{2\alpha}\sigma^2}{c^2x^{2\alpha}}=\alpha^2\sigma^2.$$

必要性：记 y 的噪信比为 α_0 将 y 在 x 处 Taylor 展开并略去二阶及高阶项，近似有

$$y=f(\xi)=f(x)+f'(x)(\xi-x),\qquad \sigma_y^2(x)=[f'(x)]^2\mathsf{Var}\,(\xi)=[f'(x)x\sigma]^2,$$
$$\mu_y(x)=f(x),$$
$$\frac{\sigma_y^2(x)}{\mu_y^2(x)}=\frac{[f'(x)x\sigma]^2}{[f(x)]^2}=\alpha_0,\qquad \frac{f'(x)x}{f(x)}=\alpha,\qquad \text{其中 } \alpha=\sqrt{\frac{\alpha_0}{\sigma^2}}.$$

解此微分方程得 $f(x)=cx^{\alpha}$, 这里 c 是常数，所以 $y=f(\xi)=c\xi^{\alpha}$. #

由引理 1 可知，若元件的特性指标的信噪比为常数，产品的性能输出为元件的特性指标的幂函数，则产品的性能输出的信噪比也为常数．

引理 2[5] 设 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$, y 的目标值为 y_0, $x_1,\cdots,x_n$ 为相互独立的随机变量，其期望和均方差分别为 x_{i0} 和 σ_i, (绝对) 容差记为 $r_i=3\sigma_i$, 相对容差记为 $t_i=r_i/x_{i0}$, 记 $x_0=(x_{10},\cdots,x_{n0})$, $t=(t_1,\cdots,t_n)$, 则 y 的噪信比为

$$\frac{\sigma_y^2}{\mu_y^2}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{d_ix_{i0}}{f(x_0)}\Big)^2t_i^2,\qquad \text{其中 } d_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x_0}. \tag{2}$$

y 的目标损失函数为

$$Q=k(f(x_0)-y_0)^2+\frac{k}{9}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{d_ix_{i0}t_i}{f(x_0)}\Big)^2f^2(x_0). \tag{3}$$

证明： 因 $x_1,\cdots,x_n$ 为相互独立的随机变量，显然 y 也是随机变量，将 y 在 x_0 处 Taylor 展开并略去二阶及高阶项，有

$$y=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}d_i(x_i-x_{i0}),$$

则 $\mathsf{E}(y)=f(x_0)$,

$$\sigma_y^2=\sum_{i=1}^{n}d_i^2\sigma_i^2=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}(d_ix_{i0}t_i)^2,$$

y 的噪信比为

$$\frac{\sigma_y^2}{\mu_y^2}=\frac{1}{9}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(d_ix_{i0}t_i)^2}{f^2(x_0)}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{d_ix_{i0}}{f(x_0)}\Big)^2t_i^2,$$

损失函数由 (1) 式得

$$Q=k(f(x_0)-y_0)^2+\frac{k}{9}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{d_ix_{i0}t_i}{f(x_0)}\Big)^2f^2(x_0).\qquad\#$$

引理 3　设 $x_1,\cdots,x_n$ 为相互独立的随机变量，且 $y=f(x_1,\cdots,x_n)=f_1(x^{(1)})f_2(x^{(2)})$, $x^{(1)}=(x_1,\cdots,x_m)$, $x^{(2)}=(x_{m+1},\cdots,x_n)$, 则 y 的噪信比为

$$\frac{\sigma_y^2}{\mu_y^2(x)}=\frac{\sigma_{f_1}^2(x^{(1)})}{\mu_{f_1}^2(x^{(1)})}+\frac{\sigma_{f_2}^2(x^{(2)})}{\mu_{f_2}^2(x^{(2)})}.$$

证明：因 $x_1,\cdots,x_n$ 为相互独立的随机变量，显然 y 也是随机变量，设 x_i $(i=1,\cdots,n)$ 的期望和均方差分别为 x_{i0} 和 σ_i, 记 $x_0=(x_{10},\cdots,x_{n0})$, 将 y 在 x_0 处 Taylor 展开并略去二阶及高阶项，近似有

$$y=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}d_i(x_i-x_{i0}),$$

其中

$$d_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x_0}=\begin{cases}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}f_2(x^{(2)})\Big|_{x_0}, & i=1,\cdots,m;\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}f_1(x^{(1)})\Big|_{x_0}, & i=m+1,\cdots,n,\end{cases}$$

则 $\mathsf{E}(y)=f(x_0)$, $\sigma_y^2=\sum\limits_{i=1}^{n}d_i^2\sigma_i^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_y^2}{\mu_y^2(x)}&=\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{d_i\sigma_i}{f(x)}\Big)^2=\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{(\partial f/\partial x_i)\sigma_i}{f(x)}\Big)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{(\partial f_1/\partial x_i)\sigma_i}{f_1(x^{(1)})}\Big)^2+\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{(\partial f_2/\partial x_i)\sigma_i}{f_2(x^{(2)})}\Big)^2=\mathrm{I}+\mathrm{II}.\end{aligned}$$

即

$$f_1(x^{(1)})\text{ 的噪信比为 }\frac{\sigma_{f_1}^2(x^{(1)})}{\mu_{f_1}^2(x^{(1)})}=\mathrm{I},\qquad f_2(x^{(2)})\text{ 的噪信比为 }\frac{\sigma_{f_2}^2(x^{(2)})}{\mu_{f_2}^2(x^{(2)})}=\mathrm{II}.\qquad\#$$

由以上引理可得如下定理：

定理 1　条件同引理 2, $y=f(x)$ 可分离变量，即

$$f=f_1(x^{(1)})f_2(x^{(2)}),$$

$x^{(1)}=(x_1,\cdots,x_m)$, $x^{(2)}=(x_{m+1},\cdots,x_n)$, 且 $f_1(x^{(1)})$ 为 x_i $(i=1,\cdots,m)$ 的幂函数的乘积，即 $f_1(x^{(1)})=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_m^{\alpha_m}$, x_i $(i=1,\cdots,m)$ 的信噪比为常数，则 y 的噪信比即为 PerMIA, x_i $(i=1,\cdots,m)$ 即为调节因子.

证明: 由引理 2 和引理 3, y 的噪信比

$$\frac{\sigma_y^2(x)}{\mu_y^2(x)}=\frac{\sigma_{f_1}^2(x^{(1)})}{\mu_{f_1}^2(x^{(1)})}+\frac{\sigma_{f_2}^2(x^{(2)})}{\mu_{f_2}^2(x^{(2)})}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{m}t_i^2\Big(\frac{(\partial f_1/\partial x_i)x_i}{f_1(x^{(1)})}\Big)^2+\frac{1}{9}\sum_{i=m+1}^{n}t_i^2\Big(\frac{(\partial f_2/\partial x_i)x_i}{f_2(x^{(2)})}\Big)^2,$$

再注意到 x_i 的信噪比为常数时 t_i 为常数 $(i=1,\cdots,m)$, 故由引理 1 和引理 3,

$$\frac{\sigma_{f_1}^2(x^{(1)})}{\mu_{f_1}^2(x^{(1)})}\ \text{为常数},\qquad \frac{\sigma_y^2(x)}{\mu_f^2(x)}\ \text{与}\ x^{(1)}\ \text{无关},$$

故 $x^{(1)}$ 即为调节因子. 显然, 此时 y 的噪信比即为 PerMIA. #

推论 1 条件同引理 2, 且 $y=f(x_1,\cdots,x_n)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$, 则 y 的噪信比为

$$\frac{\sigma_y^2(x)}{\mu_f^2(x)}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}t_i^2\alpha_i^2.$$

证明: 这只要注意 $x_1^{\alpha_1}$ 的噪信比为

$$\frac{1}{9}t_1^2\Big(\frac{d_1x_1}{f}\Big)^2=\frac{1}{9}t_1^2\Big(\frac{\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}g(x_2,\cdots,x_n)x_1}{x_1^{\alpha}g(x_2,\cdots,x_n)}\Big)^2=\frac{1}{9}(t_1\alpha_1)^2$$

即可. #

§3. 应 用

例 1 97' 数学建模竞赛题 [4] 零件的参数设计

一件产品有若干个零件组装而成, 标志产品性能的某个参数取决于这些零件. 零件参数包括标定值和容差两部分. 进行成批生产时, 标定值表示一批零件该参数的平均值, 容差则给出了参数偏离其标定值的容许范围. 若零件参数视为随机变量, 则标定值代表期望, 在生产部门无特殊要求时, 容差通常规定为均方差的 3 倍.

进行零件参数设计, 就是要确定其标定值和容差, 这时要考虑两方面因素:

1. 当各零件组装成产品时, 如果产品参数偏离与现设定的目标值, 就会造成质量损失, 偏离越大, 损失越大.

2. 零件容差的大小决定了其制造成本, 容差设计得越小, 成本越高.

3. 试通过如下的具体问题给出一般的零件参数设计方法.

4. 粒子分离器某参数 (记作 y) 有七个零件的参数 (记作 $x_1,x_2,\cdots,x_7$) 决定, 经验公式为

$$y=174.42\Big(\frac{x_1}{x_5}\Big)\cdot\Big(\frac{x_3}{x_2-x_1}\Big)^{0.85}\sqrt{\frac{1-2.62[1-0.36(x_4/x_2)^{-0.56}]^{1.5}(x_4/x_2)^{1.16}}{x_6x_7}}.$$

y 的目标值 (记作 y_0) 为 1.50. 当 y 偏离 $y_0\pm0.1$ 时, 产品为次品, 质量损失为 1000 (元), 当 y 偏离 $y_0\pm0.3$ 时, 产品为废品, 损失为 9000 (元).

零件参数的标定值有一定的容许变化范围: 容差分为 A 、 B 、 C 三个等级, 用与标定值的相对值表示, A 等为 $\pm1\%$, B 等为 $\pm5\%$, C 等为 $\pm10\%$, 7 个零件参数标定值的容许范围, 及不同容差等级零件的成本 (元) 如下表 (符号 / 表示无此等级零件):

	标定值容许范围	C 等	B 等	A 等
x_1	[0.075, 0.125]	/	25	/
x_2	[0.225, 0.375]	20	50	/
x_3	[0.075, 0.125]	20	50	200
x_4	[0.075, 0.125]	50	100	500
x_5	[1.125, 1.875]	50	/	/
x_6	[12, 20]	10	25	100
x_7	[0.5625, 0.935]	/	25	100

现进行成批生产，每批产量 1000 个．在原设计中， 7 个零件参数的标定值为： $x_1=0.1$, $x_2=0.3$, $x_3=0.1$, $x_4=0.1$, $x_5=1.5$, $x_6=16$, $x_7=0.75$; 容差均取最便宜的等级．请你综合考虑 y 偏离 y_0 造成的损失和零件成本，重新设计零件参数 (包括标定值和容差), 并与原设计比较，总费用降低了多少．

(一) 问题分析

本问题是一个有约束条件的最优化问题．

问题的约束条件由零件参数 (包括标定值和容差) 的变化范围确定，我们的目标是求出零件参数的最优设计，使得生产费用最小．问题的目标函数是总费用函数，包括两部分，一是七个零件的总成本，二是由产品性能参数 (y) 偏离目标值 (y_0) 而造成的总损失．

由于零件的容差等级和标定植结合在一起决定总费用，而七个零件的容差等级的选取共有 108 种，使问题变复杂，故分两步来解决问题．第一步，先固定容差等级，选择零件的标定值使损失最小；第二步，在所有 108 种容差等级选取方法中选取使得总费用最小的容差等级．而在第一步，采用田口提出的两步法观点，第一步：确定影响 SN 比的变量 (x_1,x_2,x_4), 使 SN 比最大，即使 PerMIA 最小．第二步：调节调节因子 (x_3,x_5,x_6,x_7) 使损失 $\mathsf{E}(L(y))$ 达到最小．

(二) 目标函数

由引理 2, 目标损失函数为

$$Q_0=10^5(f(x_0)-y_0)^2+\frac{10^5}{9}\sum_{i=1}^{7}(d_ix_{i0}t_i)^2+\sum_{i=1}^{7}c_i(t_i).$$

其中 t_i 为第 i 种零件的容差等级， $c_i(t_i)$ 为第 i 种零件在容差等级为 t_i 时的成本．

(三) 求解

第一步：对固定的 t_i, 损失为

$$\mathsf{E}(L(y))=k\frac{\sigma^2(x)}{f^2(x)}f^2(x)+k(f(x)-y_0)^2,$$

这里的 $\sigma^2(x)/f^2(x)$ 如 (2) 式等号右端．

根据田口思想，应先使信噪比最大，即使 PerMIA 最小，亦即先求 $\min\limits_x[\sigma^2(x)/f^2(x)]$, 而

$$\begin{aligned} y &= f(x)\\ &= 174.42x_3^{0.85}x_5^{-1}(x_6x_7)^{-0.5}\cdot x_1(x_2-x_1)^{-0.85}\left\{1-2.62\left[1-0.36\left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{-0.56}\right]^{1.5}\left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{1.16}\right\}^{0.5}\\ &= f_1(x^{(1)})\cdot f_2(x^{(2)}), \end{aligned}$$

其中 (x_3, x_5, x_6, x_7) 构成 $x^{(1)}$, (x_1, x_2, x_4) 构成 $x^{(2)}$, 因 $f_1(x^{(1)})$ 中都是幂函数形式，且可分离变量，由推论 1, $f_1(x^{(1)})$ 的噪信比为 $(1/9)\sum t_i^2\alpha_i^2\ \ (i=3,5,6,7)$, 当 t_i 给定时，它为常数，其中 $\alpha_3=0.85$, $\alpha_5=-1$, $\alpha_6=\alpha_7=-0.5$, 因此求

$$\begin{aligned}\min_x \frac{\sigma^2(x)}{f^2(x)} &= \frac{1}{9}\sum t_i^2\alpha_i^2+\min_{x^{(2)}}\frac{\sigma^2(x^{(2)})}{f^2(x^{(2)})}\\ &= \frac{1}{9}\sum t_i^2\alpha_i^2+\min_{x^{(2)}}\frac{1}{9}\Big[\Big(t_1\frac{d_1x_1}{f}\Big)^2+\Big(t_2\frac{d_2x_2}{f}\Big)^2+\Big(t_4\frac{d_4x_4}{f}\Big)^2\Big],\end{aligned}$$

对函数 f 求微分可得 d_1x_1/f, d_2x_2/f, d_4x_4/f 的表达式，求 d_2x_2/f 时利用

$$\frac{(\partial f/\partial x)x}{f}=\frac{(\partial f_1/\partial x)x}{f_1}+\frac{(\partial f_2/\partial x)x}{f_2},$$

(其中 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$), 可轻易求得

$$\frac{d_2x_2}{f}=-0.85x_2(x_2-x_1)^{-1}-\frac{d_4x_4}{f}.$$

下面用直接搜索法 (网格法) 对 $\min\limits_{x^{(2)}}[\sigma^2(x^{(2)})/f_2^2(x^{(2)})]$ 求最优解.

此时目标函数已由 7 维降至 3 维，对 x_1, x_2, x_4 分别取步长为 0.005, 0.00125, 0.00125, 分为 $11\times121\times41$ 个网络，在计算机上运行片刻可得 x_1, x_2, x_4 的最优解 x_1^*, x_2^*, x_4^* 和 σ^2/f^2 的值，从而再求损失 $(\sigma^2/f^2)f^2+(f-1.5)^2$ 的极小解 $f=3/[2(1+\sigma^2/f^2)]$, 因为调节因子 x_3, x_5, x_6, x_7 在取值范围内可任意取值，因而在 x_1^*, x_2^*, x_4^* 下可得无数组 $(x_3^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*)$, 任取一组即可.

第二步：遍历 108 种容差，即可得最优解为

$$x^{**}=(0.075,\ 0.375,\ 0.125,\ 0.12,\ 1.2,\ 18.2,\ 0.575263),$$
$$t^{**}=(0.05,\ 0.05,\ 0.05,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.05,\ 0.05).$$

即 $t^{**}=(\mathrm{B},\mathrm{B},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{C},\mathrm{B},\mathrm{B})$.

产品性能 $y=1.49684$, 平均每件产品的总费用为 748.737, 此时， $\mathrm{PerMIA}=2.10994\times10^{-3}$.

(四) 结果评价

竞赛组委会所提供的解为：

$$x=(0.075,\ 0.375,\ 0.125,\ 0.1185,\ 1.1616,\ 19.96,\ 0.5625),\qquad t=(\mathrm{B},\mathrm{B},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{C},\mathrm{B},\mathrm{B}),$$

产品性能 $y=1.49684$, 计算可得 $\mathrm{PerMIA}=2.10994\times10^{-3}$, 平均每件产品的总费用为 748.749. 和本文的解相比，若忽略计算精度的差异，结果一致.

本解法的主要优点在于将一个七维函数降至三维函数，大大提高了在计算机上搜索的可行性，原本要在计算机上对原来的七维函数用网格法进行搜索根本不可行，而降至三维后，在计算机上运行片刻即可得到解. 另外，本题中对变量 x_3, x_5, x_6, x_7 的标定值的选择自由度很大，可以随意搭配，这在实际工程生产中很有意义.

本文提供的解法还适用于许多其它望目特性的设计问题.

例 2 发射物体达到指定的距离 [1][2]

将质量 $M=1\text{kg}$ 的物体进行抛掷，设抛掷的水平距离 y 与作用力 F (N) 、仰角 α (度) 的关系为 $y=(1/g)(F/M)^2\sin 2\alpha$, 重力加速度 $g=9.807$, 设目标距离为 80m, 力的范围为 1–30N, 角度 $\alpha\in(0^\circ,90^\circ)$, 且 α, F 与 M 各有波动 $\Delta F=\pm 0.02F$, $\Delta M=\pm 0.01M$, $\Delta\alpha=\pm 0.05\alpha$, 确定 F 与 α 的搭配，使发射的物体在水平线上达到的距离最稳定地接近 80m.

解　记 $y=(1/g)(F/M)^2\cdot\sin 2\alpha \hat{=} f_1\cdot f_2$, 因为 f_1 是关于 F 与 M 的幂函数形式，只有 α 对 y 的噪信比有影响，故使

$$\frac{\sigma_2^2}{f_2^2}=\frac{4}{9}t_\alpha^2\Big(\frac{\alpha\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\Big)^2$$

达到最小即可.

容易验证：当 $\alpha\in(0^\circ,45^\circ)$ 时， σ_2^2/f_2^2 单调递减；当 $\alpha\in(45^\circ,90^\circ)$ 时， σ_2^2/f_2^2 单调递增. 故 $\alpha=45^\circ$ 时， σ_2^2/f_2^2 达最小值.

$$\frac{\sigma^2}{f^2}=\frac{4}{9}\Big(t_\alpha^2+t_\alpha^2\frac{\alpha^2\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}+t_m^2\Big)=\frac{4}{9}\Big(0.02^2+0.05^2\frac{\alpha^2\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}+0.01^2\Big)\approx 2.22\times 10^{-4},$$

$$\frac{\sigma^2}{f^2}f^2+(f-80)^2=(1+\frac{\sigma^2}{f^2})f^2-160f+6400,$$

当 $F\in(1,30)$ 时，在 $F=28\text{N}$ 达到极小，从而 F 与 α 的最优搭配为 $F=28\text{N}$, $\alpha=45^\circ$.

由本文上述解法可以看出，此题实质上已经不是一个多变量的参数设计问题，从而无须利用正交表，而转化为单变量的极值问题.

参 考 文 献

[1] 中国兵器工业质量管理协会编， 质量工程学, 北京理工大学出版社， 1991.

[2] 中国现场统计研究会三次设计组编著， 发射物体达到指定的距离，可计算性项目的三次设计, 北京大学出版社， 1985.

[3] Leon, R.V., Shoemaker, A.C. and Kacker, R.N., Performance measures independent of adjustment: an explanation and extension of Taguchi's signal-to-noise ratios, *Technometrics*, **29(3)**(1987), 253–285.

[4] 中国数学会， 1997 年全国大学生数学建模竞赛题目， 数学的实践与认识, **28(1)**(1998), 1–2.

[5] 姜启源， “零件的参数设计” 模型和评价， 数学的实践与认识, **28(1)**(1998), 54–57.

The Decomposition of Signal-To–Noise Ratios with Application to the Robust Design

FU JUESHENG　　ZHU HONGYIN　　WANG RENGUAN

(*School of Mathematical Sciences, Soochow University, Suzhou, 215006*)

In this paper, it is discussed the decomposition of signal-to–noise ratios with application to the robust design. The conception of PerMIA, which gives the connection between the G.Taguchi's signal-to-noise ratios and his social average quadratic loss, is quoted. As an example, the problem in the CMCM-97 is analyzed using the approach and it can be concluded that this approach is more convenient in optimization procedure to parameter design.