应用概率统计　第二十三卷
第一期　2007 年 2 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 23 No. 1 Feb. 2007

马氏环境中马氏链的中心极限定理 *

郭　明　乐
(安徽师范大学数学计算机科学学院，芜湖，　241000)

摘　　要

讨论了具有离散参数的马氏环境中马氏链的中心极限定理，并给出了加在链和过程样本函数上的充分条件．同时深入研究了 R_θ - 链，得到马氏环境中马氏链的中心极限定理成立的三个充分条件．

关 键 词:　随机环境，马氏环境中马氏链，中心极限定理.
学 科 分 类 号:　O211.4.

§1.　定义与记号

20 世纪 80 年代初 R. Cogburn 等人开始研究随机环境中马氏链的一般理论，取得了一系列深刻的结果 [1–3]．Orey[4] 在 R. Cogburn 等人的研究基础上对随机环境中马氏链进行了深入的研究，并提出了一系列开问题，引起了众多概率论学者的广泛关注，使得随机环境中的马氏链一般理论的研究成为国际上又一新的研究方向．国内学者对这一领域进行了深入的研究．王汉兴 [5] 研究了具有离散参数的马氏环境中马氏链的 Poisson 极限律，方大凡 [6] 研究了具有离散参数的马氏环境中马氏链的 Shannon-McMillan-Breiman 定理．李应求 [7] 研究了双无限随机环境中马氏链的瞬时性与不变函数．本文主要研究了具有离散参数的马氏环境中马氏链的中心极限定理，给出了加在链和过程样本函数上的充分条件．同时深入研究了 R_θ - 链，得到马氏环境中马氏链的中心极限定理成立的三个充分条件．

除特别说明外，本文沿用文献 [1–3] 中的记号和术语．设 N_+ 表示非负整数集，$(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ 是一概率空间，$(X,\mathcal{A})$ 和 $(\Theta,\mathcal{B})$ 均为任意的可测空间，$\vec{\xi}=\{\xi_n:n=0,1,2,\cdots\}$ 和 $\vec{X}=\{X_n:n=0,1,2,\cdots\}$ 分别是 $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ 上取值于 Θ 和 X 的随机序列，$\{\mathsf{P}(\theta):\theta\in\Theta\}$ 是 $(X,\mathcal{A})$ 上的一族转移函数，且假设对任意 $A\in\mathcal{A}$, $\mathsf{P}(\cdot;\cdot,A)$ 关于 $\mathcal{B}\times\mathcal{A}$ 可测的．$K(\cdot,\cdot)$ 是 $(\Theta,\mathcal{B})$ 上的转移函数，且假设对任意 $B\in\mathcal{B}$, $K(\cdot,B)$ 关于 $\mathcal{B}$ 可测的．对任意序列 $\vec{\eta}=\{\eta_n:n=0,1,2,\cdots\}$, 记 $\vec{\eta}_k^{\,r}=\{\eta_n:k\le n\le r\}$, $0\le k\le r\le\infty$.

定义 1　如果对任意 $A\in\mathcal{A}$, $n\in N_+$, 有

$$\mathsf{P}(X_0\in A|\vec{\xi}\,)=\mathsf{P}(X_0\in A|\xi_0);\qquad \mathsf{P}(X_{n+1}\in A|\vec{X}_0^{\,n},\vec{\xi}\,)=\mathsf{P}(\xi_n;X_n,A). \tag{1}$$

则称 $\vec{X}$ 为随机环境 $\vec{\xi}$ 中马氏链，称 $\vec{\xi}$ 为随机环境序列．若 $\vec{\xi}$ 是一马氏序列，则称 $\vec{X}$ 为马氏环境 $\vec{\xi}$ 中马氏链．

* 安徽省高等学校青年教师科研资助计划 (2005jq1044).

本文 2003 年 11 月 12 日收到，　2005 年 9 月 27 日收到修改稿.

引理 1[3] 设 $\vec{\xi}$ 是一步转移概率为 $K(\theta,B)$ 的马氏链，若 $\vec{X}$ 为随机环境 $\vec{\xi}$ 中马氏链，则双链 $\{(X_n,\xi_n):n\ge 0\}$ 是一步转移概率为 $Q(x,\theta;A\times B)=K(\theta,B)\mathsf{P}(\theta;x,A)$ 的马氏链.

下面称 $\{(X_n,\xi_n):n\ge 0\}$ 为马氏双链. 本文恒假定 $\vec{\xi}$ 是马氏序列， X 与 Θ 均是可列的，并存在 $(x',\theta')\in X\times\Theta$, 使得 $\mathsf{P}(X_n=x',\xi_n=\theta'\ \text{ i.o.})=1$. $\{f_n(x,\theta),n\ge 0\}$ 是 $X\times\Theta$ 上的 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 可测函数列.

对每个 $k\ge 0$, 令

$$\begin{cases}\tau_0\equiv 0, \qquad \tau_{k+1}=\inf\{n>\tau_k:X_n=x',\xi_n=\theta'\}, \qquad \sigma_k=\tau_{k+1}-\tau_k,\\ \Omega_{\tau_k}=\{\tau_k<\infty\}, \qquad \mathcal{F}_n=\sigma((X_i,\xi_i):0\le i\le n),\\ \mathcal{F}_{\tau_k}=\{A\subset\Omega_{\tau_k}:\forall n\ge 0, A\cap\{\tau_k\le n\}\in\mathcal{F}_n\},\\ \mathcal{F}^{\tau_k}=\sigma((X_{\tau_k+n},\xi_{\tau_k+n}):n\ge 0).\end{cases}$$

由 τ_k 的定义，易知 τ_k 是关于 σ- 代数 $\mathcal{F}_n$ 的停时，且有

$$\begin{aligned}&(X_{\tau_k},\xi_{\tau_k})=(x',\theta') \qquad \text{a.s.},\\ &0\le k\le\tau_k<\tau_{k+1}<\infty, \qquad \lim_{k\to\infty}\tau_k=\infty, \qquad \text{a.s.},\\ &\Omega_{\tau_k}=\Omega \qquad \text{a.s.},\\ &\mathcal{F}_{\tau_n}\subset\mathcal{F}_{\tau_{n+1}}, \qquad \forall n\ge 1.\end{aligned}$$

再令

$$\begin{cases}l(n)=k, \qquad \text{当 } \tau_k<n\le\tau_{k+1},\\ Y_k=\sum\limits_{i=\tau_k}^{\tau_{k+1}-1}f_i(X_i,\xi_i), \qquad U_k=\sum\limits_{i=\tau_k}^{\tau_{k+1}-1}|f_i(X_i,\xi_i)|,\\ Y'_k=\sum\limits_{i=\tau_{l(k)}}^{k-1}f_i(X_i,\xi_i).\end{cases}$$

显然对 $\forall n\ge 1$, 有

$$\sum_{k=0}^{n-1}f_k(X_k,\xi_k)=\sum_{k=0}^{l(n)-1}Y_k+Y'_n.$$

引理 2[8] (i) $\{Y_k:k\ge 0\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ 上独立的随机变量列.

(ii) 若 $\mathsf{E}Y_k$ 有限， $\forall k\ge 0$, 则

$$\int_{\{l(n)<k\}}Y_k\mathrm{d}\mathsf{P}=(\mathsf{E}Y_k)\mathsf{P}(l(n)<k). \tag{2}$$

(iii) 对任意实数 a,b, $\{aY_k+b\sigma_k:k\ge 0\}$ 和 $\{aU_k+b\sigma_k:k\ge 0\}$ 都是 $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ 上相互独立随机变量列.

引理 3[9] 设 $(\xi_{nk},\mathcal{H}_k^n)_{k\ge 1}$ 是鞅差序列 (即： $\mathcal{H}_0^n=\{\emptyset,\Omega\}$, $\mathcal{H}_k^n\subset\mathcal{H}_{k+1}^n$, ξ_{nk} 是关于 σ 代数 $\mathcal{H}_{k-1}^n$ 可测， $\mathsf{E}(\xi_{nk}|\mathcal{H}_{k-1}^n)=0$, a.s., $k\ge 1$), $n\ge 1$; $\mathsf{E}\xi_{nk}^2\le\infty$, 存在取值于 $\{0,1,2,\cdots\}$ 上的随

机变量列 $(\gamma_n)_{n\geq 1}$，γ_n 是关于 σ 代数 $(\mathcal{H}_k^n)_{k\geq 0}$ 的马尔科夫时，使得

$$(\mathsf{P})\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\gamma_n}\mathsf{E}(\xi_{nk}^2 I_{(|\xi_{nk}|>\delta)}|\mathcal{H}_{k-1}^n)=0,\qquad \forall\,\delta\in(0,1],$$

$$(\mathsf{P})\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\gamma_n}\mathsf{E}(\xi_{nk}^2|\mathcal{H}_{k-1}^n)=\sigma_1^2.$$

则 $\sum\limits_{k=1}^{\gamma_n}\xi_{nk}\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}N(0,\sigma_1^2)$. 这里 $(\mathsf{P})\lim$ 表示依概率收敛，$\Longrightarrow$ 表示按分布收敛.

§2. 主要结果及证明

为获得主要结果，我们引入下述四个条件:

条件 A1 存在 $\sigma>0$, $[l(n)-n\sigma]/\sqrt{n}\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}N(0,1)$;

条件 A2 $(1/n)\sum\limits_{k=1}^{n}\mathsf{E}(Y_k-EY_k)^2\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\nu^2$, 其中 ν 为常数;

条件 A3 $Y_n'/\sqrt{n}\overset{\mathsf{P}}{\longrightarrow}0$, $(n\to\infty)$;

条件 A4 $\sup\limits_n\mathsf{P}(n-\tau_{l(n)}>t)\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$.

引理 4[10] 若马氏双链 $\{(X_n,\xi_n):n\geq 0\}$ 是不可约、正常返的，且 $\mathsf{E}(\tau_1)^2<\infty$, 则条件 A1 、条件 A2 、条件 A3 、条件 A4 都成立.

引理 5 若条件 A1 成立，且 $\sup\limits_k\mathsf{E}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)^2<\infty$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\sum_{k=1}^{l(n)-1}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)-\sum_{k=1}^{[n\sigma]}(Y_k-EY_k)\Big)\overset{\mathsf{P}}{\longrightarrow}0,\qquad (n\to\infty).\tag{3}$$

证明: $\forall\,\delta>0$, 由条件 A1 知 $\exists\,c>0$, 使得

$$\mathsf{P}(n\sigma-c\sqrt{n}\leq l(n)\leq n\sigma+c\sqrt{n})\geq 1-\delta,$$

记 $n'=[n\sigma-c\sqrt{n}]$, $n''=[n\sigma+c\sqrt{n}]$, 这里 $[\cdot]$ 表示取整，显然

$$\frac{n''-n'}{n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.\tag{4}$$

当 $\omega\in\{\omega:n\sigma-c\sqrt{n}\leq l(n)\leq n\sigma+c\sqrt{n}\}$, 有

$$\Big|\sum_{k=1}^{l(n)-1}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)-\sum_{k=1}^{[n\sigma]}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\Big|\leq 2\max_{n'\leq i\leq n''}\Big|\sum_{k=n'}^{i}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\Big|.$$

由 Kolmogorov 不等式知 $\forall\,\epsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{k=1}^{l(n)-1}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)-\sum_{k=1}^{[n\sigma]}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\Big|>\epsilon\Big)\\
\leq\ &\delta+\mathsf{P}\Big(\frac{2}{\sqrt{n}}\max_{n'\leq i\leq n''}\Big|\sum_{k=n'}^{i}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\Big|>\epsilon\Big)\\
\leq\ &\delta+\frac{4}{n\epsilon^2}\mathsf{E}\Big(\sum_{k=n'}^{n''}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)^2\Big)\\
\leq\ &\delta+\frac{4(n''-n'+1)\sup_k\mathsf{E}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)^2}{n\epsilon^2}.
\end{aligned}\tag{5}$$

由 δ 的任意性及 (4), (5) 知 (3) 成立. #

引理 6 若条件 A2 成立, 且 $\{Y_k^2\}_{k\geq 0}$ 一致可积, 则

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}N(0,\nu^2). \tag{6}$$

证明: 记 $\xi_{nk}=(Y_k-\mathsf{E}Y_k)/\sqrt{n}$, $\mathcal{H}_k^n=\sigma(\xi_{n0},\xi_{n1},\cdots,\xi_{nk})$, $k=0,1,\cdots,n-1$. $\forall\,\delta>0$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{E}(\xi_{nk}^2 I_{(|\xi_{nk}|>\delta)}) &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{E}\Big(\frac{(Y_k-\mathsf{E}Y_k)^2}{n}I_{(|(Y_k-\mathsf{E}Y_k)/\sqrt{n}|>\delta)}\Big)\\ &\leq \sup_k \mathsf{E}((Y_k-\mathsf{E}Y_k)^2 I_{(|Y_k-\mathsf{E}Y_k|>\sqrt{n}\delta)}).\end{aligned}$$

于是由 c_r 不等式及 $\{Y_k^2\}_{k\geq 0}$ 一致可积, 易知 $\{(Y_k-\mathsf{E}Y_k)^2\}_{k\geq 0}$ 是一致可积的. 从而

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{E}(\xi_{nk}^2 I_{(|\xi_{nk}|>\delta)})\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

继而由 $\{Y_k\}_{k\geq 0}$ 的独立性及条件 A2 知引理 3 的条件成立, 故

$$\sum_{k=0}^{n-1}\xi_{nk}\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}N(0,\nu^2),$$

即 (6) 成立. #

定理 1 若条件 A1, A2, A3 成立, 且 $\{Y_k^2\}_{k\geq 0}$ 一致可积, 则有下述中心极限定理:

$$\frac{1}{\sqrt{n\sigma}}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}f_k(X_k,\xi_k)-\sum_{k=1}^{l(n)-1}\mathsf{E}Y_k\Big)\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}N(0,\nu^2). \tag{7}$$

证明: 由引理 5 和引理 6 知

$$\frac{1}{\sqrt{n\sigma}}\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}N(0,\nu^2). \tag{8}$$

注意到

$$\sum_{k=0}^{n-1}f_k(X_k,\xi_k)-\sum_{k=0}^{l(n)-1}\mathsf{E}Y_k=\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k-\mathsf{E}Y_k)+Y_n'.$$

从而由条件 A3 及 (8) 知 (7) 成立. #

以下假设 $\vec{\xi}$ 是时齐的马氏链, $f_k\equiv f$, $\forall\,k\geq 0$.

令 $t_0\equiv 0$, $t_{k+1}=\inf\{n>t_k:\xi_n=\theta'\}$, 由 [4] 知 $\{X_{t_n}:n\geq 0\}$ 是时齐的马氏链, 称其为 $R_{\theta'}$ - 链. 再令

$$\begin{aligned}&\tau_0'\equiv 0, \qquad \tau_{n+1}'=\inf\{k>\tau_n':X_{t_k}=x'\}, \qquad \sigma_n'=\tau_{n+1}'-\tau_n',\\ &l'(n)=k, \qquad 当\ \tau_k'<n\leq\tau_{k+1}',\\ &\sigma'=(\mathsf{E}\tau_1')^{-1}.\end{aligned}$$

引理 7[10]　设 $R_{\theta'}$ - 链是不可约、正常返的，且 $\mathsf{E}(\tau_1')^2<\infty$, 则存在 $\sigma'>0$, 有

$$\sup_n \mathsf{P}(n-\tau'_{l'(n)}>t)\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}0;$$
$$\mathsf{E}l'(n)=n\sigma'+o(1);$$
$$\frac{l'(n)-n\sigma'}{\sqrt{n}}\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}N(0,1).$$

由马氏链 $\{\xi_n:n\geq 0\}$ 的时齐性知马氏双链 $\{(X_n,\xi_n):n\geq 0\}$ 也是时齐的．由此知 $\{Y_k\}_{k\geq 0}$ i.i.d., $\{U_k\}_{k\geq 0}$ i.i.d., $\{\sigma_k\}_{k\geq 0}$ i.i.d.. 记

$$M=\frac{\mathsf{E}Y_0}{\mathsf{E}\sigma_0},\qquad \rho^2=\mathsf{E}(Y_0-M\sigma_0)^2,\qquad B=\sigma'\rho^2.$$

定理 2　设 $R_{\theta'}$ - 链是不可约、正常返的，若 $0<\rho^2<\infty$, 有下述中心极限定理：

$$\frac{1}{\sqrt{Bn}}\Big(\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k,\xi_k)-Mn\Big)\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}N(0,1).\tag{9}$$

证明：　由 τ_n, τ_n', $l(n)$, $l'(n)$ 的定义知 $\tau_n=\tau_n'$, $l(n)=l'(n)$. 从而由引理 7 知条件 A1, A4 成立．故由引理 5 及 Lindeberge 中心极限定理可知

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\sum_{k=1}^{l(n)-1}(Y_k-M\sigma_k)-\sum_{k=1}^{[n\sigma']}(Y_k-M\sigma_k)\Big)\overset{\mathsf{P}}{\longrightarrow}0,\qquad (n\to\infty),\tag{10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}\rho}\sum_{k=0}^{n-1}(Y_k-M\sigma_k)\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}N(0,1).\tag{11}$$

对 $\forall\epsilon>0$, $t>0$, 有

$$\mathsf{P}\Big(\Big|\frac{Y_n'}{\sqrt{n}}\Big|>\epsilon\Big)\leq\mathsf{P}\Big(\max_{0\leq s\leq t}\Big|\sum_{\tau_{l(n)}}^{\tau_{l(n)}+s}f(X_k,\xi_k)\Big|>\sqrt{n}\epsilon\Big)+\mathsf{P}(n-\tau_{l(n)}>t).$$

由于 $\Big\{\max_{0\leq s\leq t}\Big|\sum_{\tau_{l(n)}}^{\tau_{l(n)}+s}f(X_k,\xi_k)\Big|\Big\}_{n\geq 0}$ 是平稳的，先令 $n\to\infty$, 再令 $t\to\infty$, 由条件 A4 知

$$\frac{Y_n'}{\sqrt{n}}\overset{\mathsf{P}}{\longrightarrow}0,\qquad (n\to\infty).\tag{12}$$

注意到 $\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k,\xi_k)-M\tau_{l(n)}=\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k-M\sigma_k)+Y_n'$, 我们有

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k,\xi_k)-Mn=\sum_{k=0}^{l(n)-1}(Y_k-M\sigma_k)+Y_n'-M(n-\tau_{l(n)}).$$

从而由 (10), (11), (12) 及条件 A4 知 (9) 成立．　　#

引理 8[10]　若 $\{\eta_n:n\geq 0\}$ i.i.d., 且 $\mathsf{E}\eta_0<\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty}(1/n)\mathsf{E}\Big(\max_{1\leq k\leq n}|\eta_k|\Big)=0$.

引理 9　设 $R_{\theta'}$ - 链是不可约、正常返的，若 $\mathsf{E}(\tau_1')^2<\infty$, $\mathsf{E}U_0^2<\infty$, 则

$$\mathsf{E}S_n=Mn+o(n^{1/2}).\tag{13}$$

其中 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(X_k,\xi_k)$.

证明: 注意到

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\Big(\sum_{k=0}^{l(n)-1}Y_k\Big) &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{j-1}\int_{\{l(n)=j\}}Y_k\mathrm{dP}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int Y_k\mathrm{dP}-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\{l(n)<k\}}Y_k\mathrm{dP}-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\{l(n)=k\}}Y_k\mathrm{dP}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\mathsf{E}Y_k-\sum_{k=1}^{n-1}(\mathsf{E}Y_k)\mathsf{P}(l(n)<k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\{l(n)=k\}}Y_k\mathrm{dP}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(\mathsf{E}Y_k)\mathsf{P}(l(n)\ge k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\{l(n)=k\}}Y_k\mathrm{dP}\\
&= (\mathsf{E}Y_0)\mathsf{E}l(n)+\mathsf{E}Y_0-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\{l(n)=k\}}Y_k\mathrm{dP}. \qquad (14)
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
|\mathsf{E}S_n-\mathsf{E}(Y_0)\mathsf{E}(l(n))| &= \Big|\mathsf{E}S_n+\mathsf{E}Y_0-\mathsf{E}\Big(\sum_{k=0}^{l(n)-1}Y_k\Big)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\{l(n)=k\}}Y_k\mathrm{dP}\Big|\\
&\le \mathsf{E}|Y_n'|+\mathsf{E}\Big(\max_{0\le k\le n}|Y_k|\Big)+\mathsf{E}|Y_0|\\
&\le \mathsf{E}U_{l(n)}+\mathsf{E}\Big(\max_{0\le k\le n}|Y_k|\Big)+\mathsf{E}|Y_0|\\
&\le \mathsf{E}\Big(\max_{0\le k\le n}U_k\Big)+\mathsf{E}\Big(\max_{0\le k\le n}|Y_k|\Big)+\mathsf{E}|Y_0|. \qquad (15)
\end{aligned}$$

注意到 $\{U_n:n\ge 0\}$ i.i.d., 从而 $\{U_n^2:n\ge 0\}$ i.i.d., 由 $\mathsf{E}U_0^2<\infty$ 及 Schwarz's 不等式及引理 8 知

$$\mathsf{E}\Big(\max_{0\le k\le n}|Y_k|\Big)\le \mathsf{E}\Big(\max_{0\le k\le n}U_k\Big)\le\Big(\mathsf{E}\Big(\max_{0\le k\le n}U_k^2\Big)\Big)^{1/2}=o(n^{1/2}).$$

故由引理 7 及 (15) 知 (13) 成立. #

定理 3 设 $R_{\theta'}$ - 链是不可约、正常返的, 若 $0<\rho^2<\infty$, $\mathsf{E}U_0^2<\infty$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{Bn}}(S_n-\mathsf{E}S_n)\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}N(0,1). \qquad (16)$$

证明: 由定理 2, 引理 9 知

$$\frac{1}{\sqrt{Bn}}(S_n-Mn)\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}N(0,1);\qquad \frac{\mathsf{E}S_n-Mn}{\sqrt{Bn}}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

由此易见 (16) 成立. #

致谢 衷心感谢导师丁万鼎教授的悉心指导!

参 考 文 献

[1] Cogburn, R., The ergodic theory of Markov chains in random environments, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete.*, **66(2)**(1984), 109–128.

[2] Cogburn, R., On the central limit theorem for Markov chains in random environments, *Ann. Prob.*, **19(2)**(1991), 587–604.
[3] Cogburn, R., Markov chains in random environments: the case of Markovian environment, *Ann. Prob.*, **8(5)**(1980), 908–916.
[4] Orey, S., Markov Chains with stochastically stationary transition probabilities, *Ann. Prob.*, **19(3)** (1991), 907–928.
[5] 王汉兴，戴永隆，马氏环境中马氏链的 Poisson 极限律， 数学学报, **40(2)**(1997), 265–270.
[6] 方大凡, 马氏环境中马氏链的 Shannon-McMillan-Breiman 定理， 应用概率统计, **16(3)**(2000), 295–298.
[7] 李应求，双无限随机环境中马氏链的瞬时性与不变函数， 数学年刊, **24A(4)**(2003), 515–520.
[8] 郭明乐，马氏环境中马氏链的强大数定律， 应用数学, **16(4)**(2003), 143–148.
[9] Liptser, R.S. and Shiryayev, A.N., *Theorem of Martingales*, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1989.
[10] Chung, K.L., *Markov Chains with Stationary Transition Probability*, Springer, Berlin, 1960.

The Central Limit Theorem for Markov Chains in Markovian Environments

Guo Mingle
(*College of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu, 241000*)

In this paper, a central limit theorem for function of countable Markov chains in Markovian environments is investigated. Moreover, some sufficient conditions on the jointly Markov chains and sample function of the jointly Markov chains are given. At last, R_θ-chains are systematically studied, some sufficient contions for the central limit theorem to hold for function of Markov chains in Markovian environments are obtained.

[**更正**] 在本刊第 22 卷第 3 期 233–236 页，刊有文章 “关于绝对矩的几个性质”, 现对此文作如下更正：其一，在 (2.1) 式右边填加系数 “2”; 其二，第 234 页第 13 行的 “将以上四式相加后，再代入 (2.3) 式” 改为 “将以上四式代入 (2.3) 式”; 其三，第 235 页第 8 行右边的被积分函数是

$$\frac{|f(t)|^2-\mathrm{Re}f(t)^2}{|t|^{r+1}},$$

第 10 行的 “$\mathsf{E}|X^r$” 是 “$\mathsf{E}|X|^r$”.