应用概率统计 第二十四卷
第二期 2008年4月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.24 No.2 Apr. 2008

跳扩散模型下基金平衡管理的最优脉冲控制 *

邓国和
(广西师范大学数学学院, 桂林, 541004)

杨向群
(湖南师范大学数学与计算机科学学院, 长沙, 410081)

摘 要

在基金市值波动服从跳扩散过程, 基金持有的罚金成本为当前基金水平的二次函数及存在交易费的假设下研究了无穷时域的基金平衡管理的最小成本模型. 利用随机最优脉冲控制的拟变分不等式理论建立了判定定理,得到了最优脉冲控制策略的存在性, 同时通过构造方法给出了解的数学结构形式.

关 键 词: 随机最优脉冲控制, 跳扩散模型, 拟变分不等式.

学科分类号: O211.63, O224.

§1. 引　言

近年来随机脉冲控制模型在金融管理, 投资组合以及自然资源有效利用等方面有广泛而重要的应用, 已经被许多学者所关注和吸引(见[1–3]). 这类模型考虑的重点是在标的受控动态系统满足Itô扩散过程的假定条件进行讨论的, Korn教授在文[4]介绍了脉冲控制理论的研究方法和一些金融应用实例. 然而在实际应用中标的受控系统不仅仅只受样本轨道连续的布朗运动因素的影响, 有时会受到一种突发性不确定因素的影响, 促使标的受控系统产生跳跃式的波动, 这种现象的表现通常由Poisson过程来描述. 因此, 近年来由Brown运动和Poisson过程联合驱动的模型(称跳跃扩散模型)的理论与应用研究, 特别是在金融投资管理领域的应用研究已引起广泛重视并取得了一些漂亮的结果.

基金流平衡管理问题不仅涉及到基金流动过程中的许多不确定性因素, 而且要考虑基金管理者在干预操作时的各种成本费用.我们知道基金管理过程中有两种成本费用需要考虑: 一是基金的持有罚金成本费, 另一种是由于基金水平高或低于标准时的机会交易费, 因此基金管理的核心就是确定最优的干预策略使总成本达到最小. 早期基金管理模型在1969年由Eppen和Fama([5])在假定基金水平变化满足Markov链, 持有成本为当前基金水平的比例, 交易费用是交易现金的比例的离散时间情形下讨论过, 后来Richard([6])在基金水平波动是常系数扩散过程和持有成本为一次函数, 交易费用是固定加比例时证明了基金管理脉冲控制策略的存在性并得到了最优控制策略的数学结构形式. 对于持有罚金成本是二次函数的讨论近几年才有研究, 1997, 1998年Buckly和Korn([7][8])在特殊二次函数且要求基金水平非负的情形下讨论了类似问题. 本文研究的不同之处有三点: 1. 基金水平

*国家自然科学基金(40675023, 10571051)和广西师范大学博士基金资助.
本文2004年11月16日收到.

波动满足跳扩散过程; 2. 持有罚金成本是一般的二次函数分段形式; 3. 允许基金水平跌到负数, 有交易成本. 利用随机最优控制理论和方法建立基金管理的Qvi (Quasi variational inequality)方程并得到判定定理(Verification Theorem), 最后证明了最优干预控制策略的存在性并给出最小成本函数和策略的数学结构.

§2. 基金平衡管理模型

给定带有满足通常条件σ-信息流$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$的完备化概率空间$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathsf{P})$, 记$R_+=[0,+\infty)$. 假定在无脉冲干预操作时基金水平波动满足跳跃扩散方程:

$$\mathrm{d}X_t=\alpha(X_t)\mathrm{d}t+\beta(X_t)\mathrm{d}B_t+\int_R h(X_t,y)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y),\qquad X(0)=x. \tag{2.1}$$

其中$X(0)=x$是初始基金水平, $(B_t)_{t\geq 0}$是一维标准布朗运动, $\widetilde{N}([0,t]\times U)=N([0,t]\times U)-t\cdot m(U)$是定义于$R_+\times R$上Poisson随机测度$N([0,t]\times U)$的补偿鞅测度, $m(\mathrm{d}y)$是概率测度. 假定$\alpha(\cdot),\beta(\cdot):R\to R$, $h(\cdot,\cdot):R\times R\to R$为Lipschitz连续函数并且使各种积分有意义以及方程(2.1)存在唯一强解, 这里$\mathcal{F}_t=\sigma(X_s,s\leq t)$.

设基金管理者有权在任意时间$t\geq 0$将基金标准从X_t提升到$X_t+\xi(\xi\geq 0)$, 这时基金管理公司需要支付交易费为$K^++k^+\xi$. 同样将基金标准从X_t下降到$X_t+\xi(\xi<0)$, 管理公司也需要支付交易费为$K^-+k^-|\xi|$. 设持有成本函数$C(X_t)$是当前基金水平X_t的函数, 则随机动态系统的脉冲控制是一关于$\mathcal{F}_t$-适应的停时列$0\leq\tau_1\leq\tau_2\leq\cdots\leq\tau_k\leq\cdots$以及取值于关于$\mathcal{F}_{\tau_i}$-可测的随机变量列$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots$的给定集合, 其中$\tau_i$称为第$i$次干预时间, 相应的干预量(称干预强度)为$\xi_i$.于是在干预$s=\{(\tau_i,\xi_i),i=1,2,\cdots\}$下, 基金流的波动为

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t=\alpha(X_t)\mathrm{d}t+\beta(X_t)\mathrm{d}B_t+\displaystyle\int_R h(X_t,y)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y), & \tau_i\leq t<\tau_{i+1},\ i\geq 0,\\ X_{\tau_i}=X_{\tau_i-}+\xi_i, & \\ X(0)=x. & \end{cases} \tag{2.2}$$

记$\tau_0=0$, $\xi_0=0$, 管理者支付的交易费成本记为

$$B(\xi_i)=\begin{cases}K^++k^+\xi_i, & \xi_i\geq 0;\\ K^-+k^-|\xi_i|, & \xi_i<0,\end{cases} \tag{2.3}$$

其中K^+,k^+,K^-,k^-是正常数. 假设基金持有罚金成本函数$C(x)$定义为:

$$C(x)=\begin{cases}h_1x+h_2x^2, & x\geq 0;\\ -p_1x+p_2x^2, & x<0,\end{cases} \tag{2.4}$$

其中$h_1,h_2,p_1,p_2>0$, 于是在干预s作用下的总成本为

$$J(x;s)=\mathsf{E}\Big\{\int_0^\infty e^{-\delta t}C(X_t)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^\infty e^{-\delta\tau_i}B(\xi_i)I_{(\tau_i<\infty)}|X(0)=x\Big\}, \tag{2.5}$$

其中$\delta > 0$是折现率, I_D为示性函数. 由于基金管理的目标是成本最小, 因此我们仅考虑使$J(x;s)$有限的干预策略, 所以持有罚金成本的期望有限意味着

$$\mathsf{E}\Big(\int_0^\infty e^{-\delta t}X_t^2\mathrm{d}t\Big) < \infty. \tag{2.6}$$

同样, 干预操作的交易成本的期望有限也隐含了

$$\mathsf{E}\Big(\sum_{i=1}^\infty e^{-\delta\tau_i}|\xi_i|I_{(\tau_i<\infty)}\Big) < \infty, \qquad \mathsf{E}\Big(\sum_{i=1}^\infty e^{-\delta\tau_i}I_{(\tau_i<\infty)}\Big) < \infty. \tag{2.7}$$

如果干预策略s还满足: 对任意的$T \in [0,\infty)$,

$$\mathsf{P}\Big(\lim_{i\to\infty}\tau_i \le T\Big) = 0, \tag{2.8}$$

此时称干预策略s是可允许的控制策略, 记为$\mathcal{A}$.

定义值函数为

$$V(x) = \inf_{s\in\mathcal{A}} J(x;s). \tag{2.9}$$

我们知道随机最优控制理论研究中的值函数对应的HJB方程在解决问题过程起非常重要作用. 本文, 我们将应用动态规划原理推导出脉冲控制中对应方程, 该方程在脉冲控制问题中称为拟变分不等方程(简记Qvi), 且已被多数学者解决此类问题中使用([1–9]). 在基金管理中值函数$V(x)$的变化有两种情形:

(i) 如果在时间区间$[t, t+h)$内无任何干预活动发生, 则由动态规划原理知

$$f(x) \le \mathsf{E}\Big\{\int_t^{t+h} e^{-\delta(u-t)}C(X_u)\mathrm{d}u + e^{-\delta h}f(X_{t+h-})|X(t)=x\Big\}. \tag{2.10}$$

若$f \in C^2(R)$且对任意$x \in R$, $\beta(x)f'(x)$, $\int_R[f(x+h(x,y)) - f(x)]m(\mathrm{d}y) \in L^2$, 应用半鞅Itô公式, 令$h \to 0$得

$$-\frac{1}{2}\beta^2(x)f''(x) - \alpha(x)f'(x) + \delta f(x) - \int_R[f(x+h(x,y)) - f(x) - h(x,y)f'(x)]m(\mathrm{d}y) \le C(x), \tag{2.11}$$

其中L^2是平方可积函数空间.

(ii) 如果基金管理者在t时刻进行干预, 由总成本最小的目标得

$$f(x) \le \inf_{\xi\in R}\{B(\xi) + f(x+\xi)\}, \qquad x \in R. \tag{2.12}$$

引入两个算子: $Mf(x) = \inf_{\xi\in R}\{B(\xi) + f(x+\xi)\}$和

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(x) \;\;=\;\; & -\frac{1}{2}\beta^2(x)f''(x) - \alpha(x)f'(x) + \delta f(x) \\ & - \int_R[f(x+h(x,y)) - f(x) - h(x,y)f'(x)]m(\mathrm{d}y),\end{aligned}$$

于是综合(i)(ii)可知$V(x)$满足

$$\mathcal{L}f(x) \le C(x), \qquad x \in R, \tag{2.13}$$
$$f(x) \le Mf(x), \qquad x \in R. \tag{2.14}$$

由于(i)(ii)两种情形不可能同时发生, 因此$V(x)$还满足

$$(\mathcal{L}f(x) - C(x))(f(x) - Mf(x)) = 0. \tag{2.15}$$

定义 2.1 称方程(2.13)(2.14)(2.15)为问题(2.9)的拟变分不等方程式(Qvi).

从Qvi方程可以看出$f(x)$将$(-\infty,+\infty)$分成两个部分, 即连续区域$\mathcal{C}=\{x\in R: f(x)<Mf(x)\}$和执行区域$\mathcal{S}=\{x\in R: f(x)=Mf(x)\}$, 注意到$\mathcal{C}$是开集, 于是从Qvi方程的解可以定义控制策略$(\tau_i,\xi_i)$的数学结构.

定义 2.2 设$f(x): R\to[0,+\infty)$是问题(2.9)的Qvi方程的解, 定义策略$s=\{(\tau_i,\xi_i), i=1,2,\cdots\}$为

$$\begin{cases} (\tau_0,\xi_0)=(0,0), \\ \tau_1=\inf\{t\ge 0: X_t\in\mathcal{S}\}, \\ \xi_1=\arg\min\limits_{\xi\in R}\{f(X_{\tau_1-}+\xi)+B(\xi)\}, \\ \quad \text{并且对} i\ge 2 \\ \tau_i=\inf\{t>\tau_{i-1}: X_t\in\mathcal{S}\}, \\ \xi_i=\arg\min\limits_{\xi\in R}\{f(X_{\tau_i-}+\xi)+B(\xi)\}, \end{cases} \tag{2.16}$$

其中X是对应s的轨线, 称s为联系于$f(x)$的Qvi-控制策略. 显然, $0\le\tau_1\le\tau_2\le\cdots\le\tau_i\le\cdots$为$\mathcal{F}_t$-停时列且$\xi_i$为$\mathcal{F}_{\tau_i}$-可测的.

§3. 主要结果

利用随机分析与最优控制中的理论和方法, 首先给出脉冲控制问题的判定定理, 然后在此基础上构造满足定理的解形式.

定理 3.1 如果存在问题(2.9)对应的Qvi方程的解$v(x)\in C^2(R;R_+)$, 满足$v(x)\ge 0$以及

(C.1) $\mathsf{E}_x\displaystyle\int_0^\infty e^{-2\delta t}(\beta(X_t)v'(X_t))^2\mathrm{d}t<\infty$;

(C.2) $\mathsf{E}_x\displaystyle\int_0^\infty\int_R e^{-2\delta t}[v(X_t+h(X_t,y))-v(X_t)]^2m(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t<\infty$;

(C.3) $\mathsf{E}_x(e^{-\delta T}v(X_{T-}))\to 0,\ T\to\infty$;

(C.4) 类$\{e^{-\delta\tau}v(X_\tau):\tau$为停时$\}$一致可积.

其中E_x表示在初始$X(0)=x$下的条件期望, X_t是对应Qvi-控制策略s的相应过程, 则

$$v(x) \le V(x), \qquad x \in R. \tag{3.1}$$

若函数$v(x)$对应的Qvi-控制策略是可允许的, 则该Qvi-策略一定是最优策略且$v(x)=V(x)$.

证明: 设$v(x)$是满足要求的函数, 任取干预策略$s=\{(\tau_i,\xi_i), i=1,2,\cdots\}\in\mathcal{A}$, 应用半鞅Itô公式, 对任意的$t>0$有

$$\begin{aligned}
& e^{-\delta(t\wedge\tau_{i+1})}v(X_{(t\wedge\tau_{i+1})-}) - e^{-\delta\tau_i}v(X_{(t\wedge\tau_i)}) \\
= & \int_{[(t\wedge\tau_i),(t\wedge\tau_{i+1}))} e^{-\delta s}\beta(X_s)\mathrm{d}B_s + \int_{[(t\wedge\tau_i),(t\wedge\tau_{i+1}))} e^{-\delta s}\Big\{-\delta v(X_s) + \alpha(X_s)v'(X_s) \\
& + \frac{1}{2}\beta^2(X_s)v''(X_s) + \int_R [v(X_s+h(X_s,y)) - v(X_s) - h(X_s,y)v'(X_s)]m(\mathrm{d}y)\Big\}\mathrm{d}s \\
& + \int_{[(t\wedge\tau_i),(t\wedge\tau_{i+1}))} e^{-\delta s}[v(X_s+h(X_s,y)) - v(X_s)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

进一步由(2.13)有

$$\begin{aligned}
& e^{-\delta(t\wedge\tau_i)}v(X_{t\wedge\tau_i}) - e^{-\delta(t\wedge\tau_{i+1})}v(X_{t\wedge\tau_{i+1}-}) \\
= & \int_{[(t\wedge\tau_i),(t\wedge\tau_{i+1}))} e^{-\delta s}\{\beta(X_s)\mathrm{d}B_s + [v(X_s+h(X_s,y)) - v(X_s)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\} \\
& + \int_{[t\wedge\tau_i,t\wedge\tau_{i+1})} e^{-\delta s}\mathcal{L}v(X_s)\mathrm{d}s \\
\le & \int_{[(t\wedge\tau_i),(t\wedge\tau_{i+1}))} e^{-\delta s}\{\beta(X_s)\mathrm{d}B_s + [v(X_s+h(X_s,y)) - v(X_s)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\} \\
& + \int_{[t\wedge\tau_i,t\wedge\tau_{i+1})} e^{-\delta s}C(X_s)\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

对上式从$i=0$到$i=n$求和, 并注意到$\tau_0=0$, $X_{\tau_0}=x$以及(2.2)(2.14)得

$$\begin{aligned}
& v(x) - e^{-\delta(t\wedge\tau_{n+1})}v(X_{t\wedge\tau_{n+1}-}) \\
\le & \sum_{i=1}^n \Big\{e^{-\delta(t\wedge\tau_i)}[v(X_{\tau_i-}) - v(X_{\tau_i})] + \int_{[t\wedge\tau_i,t\wedge\tau_{i+1})} e^{-\delta s}C(X_s)\mathrm{d}s \\
& + \int_{[(t\wedge\tau_i),(t\wedge\tau_{i+1}))} e^{-\delta s}(\beta(X_s)\mathrm{d}B_s + [v(X_s+h(X_s,y)) - v(X_s)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y))\Big\} \\
\le & \sum_{i=1}^n \Big\{e^{-\delta\tau_i}[v(X_{\tau_i-}) - v(X_{\tau_i})]I_{(\tau_i\le t)} + \int_{[t\wedge\tau_i,t\wedge\tau_{i+1})} e^{-\delta s}C(X_s)\mathrm{d}s \\
& + \int_{[(t\wedge\tau_i),(t\wedge\tau_{i+1}))} e^{-\delta s}(\beta(X_s)\mathrm{d}B_s + [v(X_s+h(X_s,y)) - v(X_s)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y))\Big\} \\
\le & \sum_{i=1}^n \Big\{e^{-\delta\tau_i}B(\xi_i)I_{(\tau_i\le t)} + \int_{[t\wedge\tau_i,t\wedge\tau_{i+1})} e^{-\delta s}C(X_s)\mathrm{d}s \\
& + \int_{[(t\wedge\tau_i),(t\wedge\tau_{i+1}))} e^{-\delta s}\Big(\beta(X_s)\mathrm{d}B_s + [v(X_s+h(X_s,y)) - v(X_s)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\Big)\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

由(2.8)知 $\lim\limits_{n\to\infty}\{v(x)-\mathsf{E}[e^{-\delta(t\wedge\tau_{n+1})}v(X_{t\wedge\tau_{n+1}-})]\}=v(x)-\mathsf{E}[e^{-\delta t}v(X_{t-})]$, 以及条件(C.1)(C.2)得

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\Big\{\int_0^{t\wedge\tau_{n+1}}e^{-\delta s}\beta(X_s)v'(X_s)\mathrm{d}B_s\Big\}=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\Big\{\int_0^{t\wedge\tau_{n+1}}\int_R e^{-\delta s}[v(X_s+h(X_s,y))-v(X_s)]\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\Big\}=0.$$

因此

$$v(x)-\mathsf{E}[e^{-\delta t}v(X_{t-})]\le\mathsf{E}\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\Big[e^{-\delta\tau_i}B(\xi_i)I_{(\tau_i\le t)}+\int_{[t\wedge\tau_i,t\wedge\tau_{i+1})}e^{-\delta s}C(X_s)\mathrm{d}s\Big]\Big\}.\tag{3.5}$$

由(C.3)有 $\lim\limits_{t\to\infty}\{v(x)-\mathsf{E}[e^{-\delta t}v(X_{t-})]\}=v(x)$, 且

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\mathsf{E}\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\Big[e^{-\delta\tau_i}B(\xi_i)I_{(\tau_i\le t)}+\int_{[t\wedge\tau_i,t\wedge\tau_{i+1})}e^{-\delta s}C(X_s)\mathrm{d}s\Big]\Big\}\\ =\;&\mathsf{E}\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\delta\tau_i}B(\xi_i)I_{(\tau_i\le\infty)}+\int_0^{\infty}e^{-\delta s}C(X_s)\mathrm{d}s\Big\}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

由控制收敛定理得

$$v(x)\le\mathsf{E}\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\delta\tau_i}B(\xi_i)I_{(\tau_i\le\infty)}+\int_0^{\infty}e^{-\delta s}C(X_s)\mathrm{d}s\Big\}=J(x;s).\tag{3.7}$$

由 $s=\{(\tau_i,\xi_i),i=1,2,\cdots\}$ 的任意性, 故 $v(x)\le V(x)$.

如果 $v(x)$ 对应的Qvi-控制策略是可允许的, 仿(3.2)-(3.5)有

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty}\mathsf{E}\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\Big[e^{-\delta\tau_i}B(\xi_i)I_{(\tau_i\le t)}+\int_{[t\wedge\tau_i,t\wedge\tau_{i+1})}e^{-\delta s}C(X_s)\mathrm{d}s\Big]\Big\}\\ =\;&E\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\delta\tau_i}B(\xi_i)I_{(\tau_i\le\infty)}+\int_0^{\infty}e^{-\delta s}C(X_s)\mathrm{d}s\Big\}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

由(C.3)及(3.6)得 $v(x)=\mathsf{E}\Big\{\sum\limits_{i=1}^{\infty}e^{-\delta\tau_i}B(\xi_i)I_{(\tau_i\le\infty)}+\int_0^{\infty}e^{-\delta s}C(X_s)\mathrm{d}s\Big\}$, 即

$$v(x)\ge\inf_{s\in\mathcal{A}}\mathsf{E}\Big\{\int_0^{\infty}e^{-\delta t}C(X_t)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\delta\tau_i}B(\xi_i)|X(0)=x\Big\}=V(x).\tag{3.9}$$

结合 $v(x)\le V(x)$ 得证. □

现利用文[3]中"脉冲四参数法"构造满足定理3.1的解的数学结构, 这种方法在脉冲控制理论研究中已被多数学者多次使用([3–9]). 其思想为: 存在一个最优干预策略 s 能被四个参数 $d<D<U<u$ 刻划, 使得基金水平总留在区间 $[d,u]$ 内, 当系统下降到 d 时立即反弹到水平 D, 同样当系统上升到 u 时立即弹回到水平 U 处. 即定义干预时间

$$\tau_i=\inf\{t>\tau_{i-1}:X_t\overline{\in}(d,u)\},\tag{3.10}$$

以及干预强度

$$\xi_i = \begin{cases} D - X_{\tau_i -}, & X_{\tau_i -} \le d, \\ U - X_{\tau_i -}, & X_{\tau_i -} \ge u, \end{cases} \tag{3.11}$$

其中X_t对应s的轨线. 同样地, 自然也希望值函数满足

$$v(x) = \begin{cases} v(D) + K^+ + k^+(D - x), & x \le d, \\ v(U) + K^- + k^-(x - U), & x \ge u. \end{cases} \tag{3.12}$$

由于标的受控系统受Poisson跳过程的影响, 基金水平区间(d, u), 要考虑$X_t + h(X_t, y) \in (d, u)$, 因此需要调整基金水平区间. 由于基金持有罚金成本是基金水平$|X_t|$的增函数, 基金水平区间选择由$(d \vee d + h(d, y), u)$, $(h(x, y) > 0)$或$(d, u + h(u, y) \wedge u)$, $(h(x, y) < 0)$调整. 同样地, 基金反弹水平D, U也作类似的改变. 为方便讨论, 这里仍采用同样的记号来表示有Poisson跳过程的基金水平参数. 如果函数$v(x) \in C^2(R)$, 对任意的$x \in (d, u)$时,

$$\frac{1}{2}\beta^2(x)v''(x) + \alpha(x)v'(x) + \int_R [v(x + h(x, y)) - v(x) - h(x, y)v'(x)]m(\mathrm{d}y) - \delta v(x) + C(x) = 0, \tag{3.13}$$

显然可以写出这个二阶常微分方程的解. 由$v'(x)$的连续性知

$$v'(d) = -k^+, v'(u) = k^-, \tag{3.14}$$

以及由(3.11)及$g(\xi) = \{K^+ + k^+\xi + v(d + \xi) : \xi \ge 0\}$取最小值时$v'(d + \xi) = -k^+$, 即$v'(D) = -k^+$. 同理可得$v'(U) = k^-$, 也就是$v(x)$满足

$$v'(D) = -k^+, \qquad v'(U) = k^-. \tag{3.15}$$

因此问题(2.9)的解由(3.10)-(3.14)的四个参数来确定.

下面就方程(2.1)的系数$\alpha(x) = \alpha$, $\beta(x) = \beta$, $h(x, y) = \gamma(y) > 0$来给出具体解的数学结构. 记$\mathcal{C} = (d, u)$, $\mathcal{S}$是$\mathcal{C}$的余集.

定理 3.2　如果存在四个参数$d < D < U < u$是(3.12)(3.14)(3.15)的解且满足$d < 0$, $u > 0$, 以及连续函数$h(x)$使得对任意的$x \in [d, u]$满足(3.13), 定义$v(\cdot) : R \to R_+$如下

$$v(x) = \begin{cases} h(D) + K^+ + k^+(D - x), & x \le d; \\ h(x), & x \in (d, u); \\ h(U) + K^- + k^-(x - U), & x \ge u, \end{cases} \tag{3.16}$$

则$v(x) = V(x)$且其对应的策略(3.10)(3.11)是最优的.

证明：　根据定理3.1, 我们只须验证(3.16)定义的$v(x)$满足定义2.1即可. 由(3.13)及$h(x)$的连续性可知, 对任意的$x \in (d, \mu)$得

$$\frac{1}{2}\beta^2 h''(x) + \alpha h'(x) + \int_R [h(x + \gamma(y)) - h(x) - \gamma(y)h'(x)]m(\mathrm{d}y) - \delta h(x) + C(x) = 0, \tag{3.17}$$

存在解为

$$h(x)=\begin{cases}A_1e^{\lambda_1x}+A_2e^{\lambda_2x}+\dfrac{h_2}{\delta}x^2+\Big(\dfrac{h_1}{\delta}+\dfrac{2\alpha h_2}{\delta^2}\Big)x\\ \quad+\Big[\dfrac{\beta^2h_2\delta+\alpha h_1\delta+2\alpha^2h_2}{\delta^3}+\dfrac{h_2}{\delta^2}\displaystyle\int_R\gamma^2(y)m(\mathrm{d}y)\Big], \qquad 0\le x<u;\\ \Big[A_1+\dfrac{(p_1+h_1)\lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)\delta}+\dfrac{2(p_2-h_2)(\delta-\alpha\lambda_2)}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)\delta^2}\Big]e^{\lambda_1x}+\dfrac{p_2}{\delta}x^2\\ \quad+\Big(\dfrac{-p_1}{\delta}+\dfrac{2\alpha p_2}{\delta^2}\Big)x+\Big[A_2-\dfrac{(p_1+h_1)\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)\delta}+\dfrac{2(p_2-h_2)(\delta-\alpha\lambda_1)}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)\delta^2}\Big]e^{\lambda_2x}\\ \quad+\Big[\dfrac{\beta^2p_2\delta-\alpha p_1\delta+2\alpha^2p_2}{\delta^3}+\dfrac{p_2}{\delta^2}\displaystyle\int_R\gamma^2(y)m(\mathrm{d}y)\Big], \qquad d<x\le 0,\end{cases} \tag{3.18}$$

其中A_1,A_2是任意常数, λ_1,λ_2是下列方程的两个根

$$\frac{1}{2}\beta^2\lambda^2+\alpha\lambda+\int_R[e^{\lambda\gamma(y)}-1-\gamma(y)\lambda]m(\mathrm{d}y)-\delta=0. \tag{3.19}$$

显然, 由于$v'(d)=v'(D)=-k^+<0$, $v'(u)=v'(U)=k^->0$可知方程$v''(x)=0$在区间(d,u)只存在两个根x_1,x_2且$x_1\in(d,D)$, $x_2\in(U,u)$并且$v(x)$在(d,x_1)和(x_2,u)内是凸的, 在(x_1,x_2)是凹的, 所以$v'(x)$在x_1点取得最小值, 在x_2点取得最大值, 由方程(3.17)再求一次微分及应用(3.14)(3.15)条件知$x_1<0$, $x_2>0$, 由此进一步得

$$p_1-\delta k^+-2p_2d>0, \qquad h_1-\delta k^-+2h_2u>0. \tag{3.20}$$

又由(3.12)知对任意的$x\in\mathcal{S}$有

$$v(x)=\begin{cases}v(u)+k^-(x-\mu), & x\ge u,\\ v(d)+k^+(d-x), & x\le d.\end{cases} \tag{3.21}$$

于是对任意$x\in R$, $v(x)$满足

$$v(x)\le\inf_{\xi\in R}[B(\xi)+v(x+\xi)]. \tag{3.22}$$

特别当$x\in(-\infty,d]$时, (3.22)式等号成立的条件为$\xi=D-x$, 同样当$x\in[\mu,+\infty)$时, (3.22)式等号成立的条件为$\xi=U-x$, 因此$v(x)$满足(2.14).

由(3.17)可知, 当$x\in(d,u)$时, $v(x)$满足$\mathcal{L}v(x)=C(x)$, 显然(2.15)容易验证, 因而只须验证$x\in\mathcal{S}$时, $\mathcal{L}v(x)<C(x)$即可. 由(3.21)(3.20)及$v''(x)$的连续性得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\beta^2v''(x)+\alpha v'(x)+\int_R[v(x+\gamma(y))-v(x)-\gamma(y)v'(x)]m(\mathrm{d}y)-\delta v(x)+C(x)\\ =&\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\beta^2v''_+(d)+(d-x)(p_1-\delta k^+-p_2(x+d)), & x\le d;\\ -\dfrac{1}{2}\beta^2v''_-(u)+(x-u)(h_1-\delta k^-+h_2(x+u)), & x\ge u,\end{cases}\end{aligned} \tag{3.23}$$

其中$v''_+(u),v''_-(d)$为$V(x)$分别在点u,d的二阶左右导数且$v''_+(d)\le0$, $v''_-(u)\le0$, 故上式大于零, 即$\mathcal{L}v(x)<C(x)$成立. 因此$v(x)$是Qvi方程的解. □

参 考 文 献

[1] Oksendal, B., Stochastic control problems where small intervention costs have big effects, *Applied Mathematics and Optimization*, **40**(1999), 355–375.

[2] Benkherouf, L., Boumenir, A. and Aggoun, L., A diffusion inventory model for deteriorating items, *Applied Mathematics and Computation*, **138**(2003), 21–39.

[3] Candenillas, A. and Zapatero, F., Classical and impulse stochastic control of the exchange rate using interest rates and reserves, *Mathematical Finance*, **10**(2000), 141–156.

[4] Korn, R., Some applications of impulse control in mathematical finance, *Math. Meth. Oper. Res.*, **50**(1999), 493–518.

[5] Eppen, G.D. and Fama, E.F., Cash balance and simple dynamic portfolio problems with proportional cost, *International Economic Review*, **10**(1969), 119–133.

[6] Constantinides, G. and Richards, S., Existence of optimal simple policies for discounted cost inventory and cash management in continuous time, *Operations Research*, **26**(1978), 620–636.

[7] Buckley, I.R.C. and Korn, R., Optimal cash management for equity index tracking in the presence of fixed and proportional transaction costs, *Berichte zur Stochastik und Verwandte Gebiete*, **3**(1997), 1–21.

[8] Buckley, I.R.C. and Korn, R., Optimal index tracking under transaction costs and impulse control, *International J. of Theoretical and Applied Finance*, **1**(1998), 315–330.

[9] Oksendal, B., Uboe, J. and Tusheng Zhang, Non-robustness of some impulse control problems w.r.t. intervention costs, *Stochastic Analysis and Applications*, **20**(2002), 999–1026.

Optimal Impulse Control for Cash Balance Management in Jump-Diffusion Model

Deng Guohe

(*School of Mathematics Science, Guangxi Normal University, Guilin, 541004*)

Yang Xiangqun

(*College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha, 410081*)

This paper is concerned with studying a problem that minimizes the total expected discounted cost over an infinite horizon for a cash management, where the cash fund follows jump-diffusion processes, holding-costs are assumed to be a general quadratic function of the cash level and there exist fixed and proportional transaction costs. Thanks to the variational inequality method in stochastic impulse control theory, we obtain the verification theorem, prove that the optimal control exists, and also gain its mathematical structures.

Keywords: Stochastic optimal impulse control, jump-diffusion model, quasi-variational inequality.

AMS Subject Classification: 93E20, 60G40, 49K45.