应用概率统计 第二十三卷
第三期 2007 年 8 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 23 No. 3 Aug. 2007

根据子样本的过程能力指数及其置信区间的估计

张维铭 宗云南 刘建斌
(浙江理工大学数学科学系，杭州， 310018)

摘 要

自 1980 年以来，分析过程能力的统计方法有显著的进展，已在实践中得到大量应用．过程能力指数是衡量生产过程中的产品尺寸适合规格限和接近目标值的能力．最普遍使用的能力指数是 c_p 和 c_{pk}，这些指数曾被广泛地应用于日本、美国和英国的各工业公司和企业．本文对这些指数提出根据子样本估计标准差、能力指数及其置信区间的简单近似方法．

关 键 词： 标准差，过程能力指数，置信区间．
学 科 分 类 号： O213.1.

§1. 前 言

过程能力指数是过程分布的参数和规格限的函数．以 USL 和 LSL 分别表示产品尺寸的规格上限和下限， $M=(\mathrm{USL}+\mathrm{LSL})/2$ 表示规格限的中值 (目标值). 普遍使用的是两类指数：

$$c_p=\frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6\sigma},\qquad c_{pk}=\min\Big(\frac{\mathrm{USL}-\mu}{3\sigma},\frac{\mu-\mathrm{LSL}}{3\sigma}\Big).$$

c_p 仅依赖于 σ，只要 6σ 比规格限范围小得多，即使过程平均值 μ 远离目标值 M，c_p 的估计值仍可能是相当大的，即过程具有很高的能力．c_{pk} 是过程平均值与其最接近的规格限的距离度量．当 $\mu=M$ 时， $c_{pk}=c_p$，当 $\mu\neq M$ 时，若 $M<\mu<\mathrm{USL}$，则 $c_{pk}=(\mathrm{USL}-\mu)/(3\sigma)$；若 $\mathrm{LSL}<\mu<M$，则 $c_{pk}=(\mu-\mathrm{LSL})/(3\sigma)$. 过程合格品率随着 c_p 和 c_{pk} 的增大而增大．

过程平均值和标准差 (μ,σ) 是表述过程能力的基础．对接近规格限的 0.1% 不合格品，近似地要求 $\mu+3\sigma\le\mathrm{USL}$，$\mu-3\sigma\ge\mathrm{LSL}$ 和 $6\sigma\le\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}$. μ 和 σ 必须从稳定的生产过程获得样本数据来估计．考虑 m 个子样本，每个容量为 n，以 $\overline{X}_i$ 、 R_i 和 S_i 表示第 i 个子样本的平均值、极差和标准差，则 μ 和 σ 的估计如下：

$$\widehat{\mu}=\overline{\overline{X}}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\overline{X}_i,\qquad \widehat{\sigma}=\overline{R}/d_2,\qquad \widehat{\sigma}=\overline{S}/\varepsilon_{n-1},\tag{1}$$

$$S^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{\overline{X}})^2/(mn-1)=\frac{1}{mn-1}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}^2-mn\overline{\overline{X}}^2\Big).\tag{2}$$

这里

$$\overline{R}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}R_i,\qquad \overline{S}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}S_i.$$

本文 2004 年 9 月 9 日收到， 2005 年 10 月 13 日收到修改稿.

更偏爱的 σ 的无偏估计量是组合标准差估计 $\widehat{\sigma}_p=S_p/\varepsilon_{m(n-1)}$, 这里

$$S_p^2=\frac{1}{m(n-1)}\sum_{i=1}^m(n-1)S_i^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m S_i^2,\qquad \varepsilon_k=\sqrt{\frac{2}{k}}\frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)},\tag{3}$$

其中 S_p^2 称为组合方差. 可以证明: $\mathsf{E}(\overline{S})=\sigma\varepsilon_{n-1}$, $\mathsf{E}(S_p)=\sigma\varepsilon_{m(n-1)}$, $\mathsf{Var}\,(\widehat{\sigma}_p)\le\mathsf{Var}\,(\widehat{\sigma})$.

§2. $\overline{R}$ 、 $\overline{S}$ 和 S_p 的性质

过程能力指数 c_p 的估计等价于 σ 的估计. 设质量特征 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 设 m 个独立随机样本 $(X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{in})$, $i=1,2,\cdots,m$, 每个子样本来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布. 从这些样本信息, 得到

$$\overline{X}_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_{ij},\qquad (n-1)S_i^2=\sum_{j=1}^n(X_{ij}-\overline{X}_i)^2.$$

利用子样本时, 以 (1) 、 (2) 和 (3) 式估计 σ. 统计量 $(\nu\overline{R}^2)/(c^2\sigma^2)$ 近似地服从具有自由度 ν 的 χ^2 分布 [1], c 和 ν 由下式确定: $c=\sqrt{d_2^2+b_2^2/m}$.

ν 的第一近似式为 $$\nu_1=\frac{1}{-2+2\sqrt{1+(2b_2^2)/(md_2^2)}},$$

第二近似式为 $$\nu_2=\frac{1}{-2+2\sqrt{1+(2b_2^2)/(md_2^2)+1/(8\nu_1^3)}}.$$

这里 $\mathsf{E}(\overline{R}/\sigma)=d_2$, $D(\overline{R}/\sigma)=b_2^2/m$ [1]. 文献 [2] 中表 7 对 $n=2(1)12$, $m=1(1)5(5)30$ 给出 ν 和 c 的数值表. 其中一部分, 如表 1 所示 (见文献 [1] 表 7.1). 文献 [3] 中曾经论证, 当 $n=5$ 时, 即使 m 值很小, 函数 $(\nu\overline{R}^2)/(c^2\sigma^2)$ 也是一个极好的近似 χ^2 分布.

统计量 $(\overline{S}-\sqrt{n-1}\varepsilon_{n-1})/\sqrt{(n-1)(1-\varepsilon_{n-1}^2)/m}$ 渐近地服从正态 $N(0,1)$ 分布 [4], 因此 $\widehat{\sigma}=\overline{S}/\varepsilon_{n-1}$ 亦渐近正态分布 [1]:

$$\widehat{\sigma}\approx N\Big(\sigma,\frac{\sigma^2}{m}\cdot\frac{1-\varepsilon_{n-1}^2}{\varepsilon_{n-1}^2}\Big).\tag{4}$$

这里 $\mathsf{E}(\widehat{\sigma})=\sigma$, $\mathsf{Var}\,(\widehat{\sigma})=\mathsf{Var}\,(S)/(m\varepsilon_{n-1}^2)=\sigma^2(1-\varepsilon_{n-1}^2)/(m\varepsilon_{n-1}^2)$. 统计量 $m(n-1)S_p^2/\sigma^2$ 服从自由度为 $m(n-1)$ 的 χ^2 分布 [4].

表 1 $(\nu\overline{R}^2)/(c^2\sigma^2)$ 的 χ^2 近似分布中 c 和 ν 的数值 $(n=5)$

m	ν	c	m	ν	c
5	18.354	2.358	9	32.852	2.344
6	21.988	2.353	10	36.474	2.342
7	25.615	2.349	15	54.590	2.337
8	29.240	2.346	20	72.705	2.334

§3.　过程能力指数的性质

对实际工作者来说，$\overline{\overline{X}}$ 、$\widehat{\sigma}$ (或 $\overline{X}$ 、 S) 和规格限能提供过程或机器能力的适当信息，可以得到 μ 和 σ 的置信区间和产品尺寸是否符合规格限．过程能力指数 c_p 的估计量为

$$\widehat{c}_p = (\mathrm{USL} - \mathrm{LSL})/(6\widehat{\sigma}), \tag{5}$$

这里 $\widehat{\sigma} = S$ 、 $\overline{R}/d_2$ 、 $\overline{S}/\varepsilon_{n-1}$ 、 $S_p/\varepsilon_{m(n-1)}$. 当 $\widehat{c}_p$ 小于 1 时，精密度较低，位于 1 和 1.33 之间时，精密度适中，超过 1.33 时，精密度较高．

上述指数没有考虑分布的位置, 假定产品尺寸集中于目标值, 这类指数表明的是潜在能力．要度量实际能力的大小，必须包括变量的位置．c_{pk} 的估计量为

$$\widehat{c}_{pk} = \min\Big(\frac{\mathrm{USL} - \overline{\overline{X}}}{3\widehat{\sigma}}, \frac{\overline{\overline{X}} - \mathrm{LSL}}{3\widehat{\sigma}}\Big). \tag{6}$$

若过程平均值位于规格限以外，必须引起注意．

§4.　两边指数的置信区间

首先考虑最简单的情况，设 c_p 是由 n 个单位的样本估计的，于是 $\widehat{c}_p = (\mathrm{USL} - \mathrm{LSL})/(6S)$. 设 c_0 是满足 $\mathsf{P}(c_p \geq c_0) = 1 - \alpha$ 的统计量，则 c_0 是 c_p 的置信度为 $100(1-\alpha/2)\%$ 的置信下限，又是置信度为 $100\alpha/2\%$ 的置信上限．置信下限特别有用．由 $c_p/\widehat{c}_p = S/\sigma$ 知，统计量 $(n-1)(c_p/\widehat{c}_p)^2 = (n-1)S^2/\sigma^2$ 服从自由度为 $(n-1)$ 的 χ^2 分布，以 $\chi^2(n-1)$ 表示．因此，$\mathsf{P}(c_p > c_0) = \mathsf{P}[\chi^2(n-1) \geq (n-1)c_0^2/\widehat{c}_p^2]$, 于是 c_p 的 $100(1-\alpha)\%$ 的置信区间为

$$\frac{\mathrm{USL} - \mathrm{LSL}}{S}\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}{n-1}} < c_p < \frac{\mathrm{USL} - \mathrm{LSL}}{S}\sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}{n-1}}. \tag{7}$$

这些界限 $\widehat{c}_p\sqrt{\chi^2(n-1)}$ 是简单的，仅利用 χ^2 的上和下两个百分点，其他有关 $\overline{R}$ 和 S_p 的表示式均服从 χ^2 分布，有关 $\overline{S}$ 的表示式渐近地服从正态分布．现在分别推导如下：

1. 将 $\widehat{\sigma} = \overline{R}/d_2$ 代入 (5) 式，得

$$\mathsf{P}(c_p \geq c_0) = \mathsf{P}\Big(\frac{c_p}{\widehat{c}_p} \geq \frac{c_0}{\widehat{c}_p}\Big) = \mathsf{P}\Big(\frac{\nu\overline{R}^2}{c^2\sigma^2} \geq \frac{c_0^2d_2^2\nu}{\widehat{c}_p^2c^2}\Big) = \mathsf{P}\Big(\sqrt{\chi^2(\nu)} \geq \frac{c_0}{\widehat{c}_p}\frac{d_2\sqrt{\nu}}{c}\Big).$$

因此

$$\widehat{c}_pc\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(\nu)}/(d_2\sqrt{\nu}) < c_p < \widehat{c}_pc\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(\nu)}/(d_2\sqrt{\nu}). \tag{8}$$

2. $\overline{S}$ 的精确分布不易处理， $m(n-1)\overline{S}/\sigma$ 不能表示为有用形式．由 (4) 式知， $\overline{S}/\varepsilon_{n-1}$ 渐近于正态分布．因此

$$\frac{c_p}{\widehat{c}_p} = \frac{\overline{S}}{\sigma\varepsilon_{n-1}} = 1 \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2_{n-1}}{m\varepsilon^2_{n-1}}}, \qquad c_p = \widehat{c}_p\Big(1 \pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2_{n-1}}{m\varepsilon^2_{n-1}}}\Big). \tag{9}$$

这里 $u_{\alpha/2}$ 是正态分布 $(100\alpha/2)\%$ 点.

3. 将 $S_p/\varepsilon_{m(n-1)}$ 代入 (5) 式，有

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(c_p \ge c_0) &= \mathsf{P}\Big[\frac{m(n-1)S_p^2}{\sigma^2} \ge \frac{m(n-1)c_0^2}{\widehat{c}_p^2}\Big] \\ &= \mathsf{P}\Big[\sqrt{\chi^2(m(n-1))} \ge \frac{\sqrt{m(n-1)}c_0}{\widehat{c}_p}\varepsilon_{m(n-1)}\Big].\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\widehat{c}_p}{\varepsilon_{m(n-1)}}\sqrt{\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(m(n-1))}{m(n-1)}} \le c_p \le \frac{\widehat{c}_p}{\varepsilon_{m(n-1)}}\sqrt{\frac{\chi^2_{\alpha/2}(m(n-1))}{m(n-1)}}. \tag{10}$$

虽然以上三式比较简单，但在统计过程控制应用中，更简单的正态近似是更偏爱的．因为整个样本容量包括 50 、 100 或更多个单位，故可利用正态分布．费吏曾经证明过 [5], 当自由度 n 无限增大时，随机变量 $\sqrt{2\chi^2}$ 渐近地服从正态分布 $N(\sqrt{2n-1},1)$, 当 $n>30$ 时，可以利用这个极限分布来代替 χ^2 分布，因此利用近似式 $\sqrt{\chi^2}\sim N(\sqrt{n-1},1/2)$ 是适宜的．对指数 $\widehat{c}_p=(\mathrm{USL}-\mathrm{LSL})/(6s)$, $\sqrt{n-1}S/\sigma \approx N(\sqrt{n-1},1/2)$. 于是

$$\frac{(c_0/\widehat{c}_p)\sqrt{n-1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{1/2}} = u_{\alpha/2}, \qquad c_p = \widehat{c}_p\Big(1 \pm \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{2(n-1)}}\Big). \tag{11}$$

对指数 $\widehat{c}_p=(\mathrm{USL}-\mathrm{LSL})/(6\overline{R}/d_2)$ 和 $\widehat{c}_p=(\mathrm{USL}-\mathrm{LSL})/(6S_p/\varepsilon_{m(n-1)})$, 置信区间分别为:

$$c_p = \frac{c\widehat{c}_p}{d_2}\Big(1 \pm \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{2\nu}}\Big), \qquad c_p = \frac{\widehat{c}_p}{\varepsilon_{m(n-1)}}\Big(1 \pm \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{2m(n-1)}}\Big). \tag{12}$$

§5. 单边指数的置信区间

对单边指数，情况复杂一些，利用 L 表示 USL 和 LSL, $(L-\overline{X})/(3S)$ 的分子和分母均有不确定性，$\widehat{c}_{pk}$ 是 $(L-\mu)/(3\sigma)$ 的样本估计，c_{pk} 的 $100(1-\alpha)\%$ 置信下限 c_0 满足 $\mathsf{P}(c_{pk}\ge c_0)=1-\alpha$. 在正态总体下，令 $L=\overline{X}+ks$, 则

$$\mathsf{P}\Big(\frac{\overline{X}+ks-\mu}{3\sigma} \ge c_0\Big) = \mathsf{P}\Big[\frac{\sqrt{n}(\mu-\overline{X}+3c_0\sigma)}{s} \le \sqrt{n}k\Big].$$

式中

$$\frac{\sqrt{n}[(\mu-\overline{X})/\sigma+3c_0]}{s/\sigma} = \frac{3\sqrt{n}(L-\overline{X})}{3s} = 3\sqrt{n}\widehat{c}_{pk}$$

服从非中心 T 分布，其自由度为 $n-1$, 非中心参数为 $3\sqrt{n}c_0$, 记作 $T(n-1,3\sqrt{n}c_0)$, 所以 $\mathsf{P}(c_{pk}\ge c_0)=1-\alpha$ 可以写成

$$\mathsf{P}[T(n-1,3\sqrt{n}c_0) \le 3\sqrt{n}\widehat{c}_{pk}] = 1-\alpha,$$

其中 $\widehat{c}_{pk}$ 是观测值．令 $3\sqrt{n}\widehat{c}_{pk}=t_\alpha$, 上式又可写成

$$\int_{t_\alpha}^{\infty} f(t(n-1,3\sqrt{n}c_0))\mathrm{d}t = \alpha. \tag{13}$$

由此式不能建立 c_0 和 $\widehat{c}_{pk}$ 的明确关系式，只能在数值上求解．给定 n，c_0 和 α 值，按照文献 [7] 的非中心 T 分布百分点的算法，可以求得 t_α 值．例如，设 $\alpha=0.05$，当 $n=20$，$c_0=1.2$ 时，$t_\alpha=3\sqrt{n}\widehat{c}_{pk}=22.3847$，因此 $\widehat{c}_{pk}=1.67$；当 $n=30$，$c_0=1.5$ 时，$t_\alpha=31.79925$，$\widehat{c}_{pk}$ 的最小值为 1.94. 当 $\widehat{c}_{pk}$ 不少于其最小值时，至少以概率 0.95 保证过程是有能力的 (亦即 $c_{pk}\ge c_0$)．反之，当给定 n 和 $\widehat{c}_{pk}$ 时，得到 c_{pk} 的 95% 置信下限 c_0，例如，给定 $n=20$，$\widehat{c}_{pk}=1.67$，则 $c_0=1.2$. (13) 式对 $(\mathrm{USL}-\overline{X})/(3S)$ 和 $(\overline{X}-\mathrm{LSL})/(3S)$ 是同一形式，因此 $\widehat{c}_{pk}=(\mathrm{USL}-\overline{X})/(3S)$ 的最小值亦可应用于 $(\overline{X}-\mathrm{LSL})/(3S)$．方程 (13) 的解是单侧规格限的精确解，它可作为两侧规格限的 c_{pk} 的近似解．文献 [6] 在 $(\mathrm{USL}-\overline{X})/(3S)$ 和 $(\mathrm{LSL}-\overline{X})/(3s)$ 相同的假定下，利用双变量非中心 T 分布作出了 c_{pk} 的置信下限，所得结果比较保守 (下限值较小)．文献 [8] 利用泰勒级数得到 c_{pk} 的置信区间的较好近似式．它可看作 (13) 式的正态近似解．

由于 $\overline{X}$ 和 S (或 $\overline{\overline{X}}$ 和 $\overline{R}$，$\overline{S}$，S_p) 相互独立的优点，$L-\overline{X}$ 和 S 是独立的，由此 $\widehat{c}_{pk}$ 变成两独立变量之比，对于比 $a=b/c$，这里 c 的变异系数是小的 (小于 0.1)，因此 a 的变异系数的适当的近似式可用泰勒级数展开式的第一项获得：

$$\mathrm{CV}(a)=\sqrt{[\mathrm{CV}(b)]^2+[\mathrm{CV}(c)]^2}$$

(参见文献 [9])．现在 $b=L-\overline{X}$，$c=S$，记作 $\widehat{I}_k=(L-\overline{X})/S$，我们有

$$[\mathrm{CV}(L-\overline{X})]^2=\frac{\mathsf{Var}\,(L-\overline{X})}{[\mathsf{E}(L-\overline{X})]^2}=\frac{\mathsf{Var}\,(\overline{X})}{(L-\overline{X})^2}=\frac{\sigma^2/n}{(L-\overline{X})^2}\approx\frac{S^2}{(L-\overline{X})^2},$$

这里 E 是期望值．类似地

$$[\mathrm{CV}(S)]^2=\frac{\mathsf{Var}\,(S)}{[\mathsf{E}(S)]^2}\approx\frac{\sigma^2/(2f)}{\sigma^2}=\frac{1}{2f},$$

这里 $f=n-1$ 或 $mn-1$. 因此

$$[\mathrm{CV}(\widehat{I}_k)]^2=[\mathrm{CV}(L-\overline{X})]^2+[\mathrm{CV}(S)]^2=\frac{S^2}{n(L-\overline{X})^2}+\frac{1}{2f},$$

其中 $\mathrm{CV}(\widehat{I}_k)$ 是 $\widehat{I}_k$ 的变异系数，所以 I_k 的置信区间的正态近似最简单形式为 $\widehat{I}_k[1\pm u_{\alpha/2}\mathrm{CV}(\widehat{I}_k)]$. 由此得到指数 $(\mathrm{USL}-\overline{\overline{X}})/(3S)$ 或 $(\overline{\overline{X}}-\mathrm{LSL})/(3S)$ 的变异系数为

$$\mathrm{CV}(\widehat{c}_{pk})=\sqrt{\frac{1}{9mn\widehat{c}_{pk}^2}+\frac{1}{2(mn-1)}}. \tag{14}$$

由于

$$[\mathrm{CV}(L-\overline{\overline{X}})]^2\approx\frac{(\overline{S}/\varepsilon_{n-1})^2}{mn(L-\overline{\overline{X}})^2},\qquad [CV(\overline{S}/\varepsilon_{n-1})]^2=\frac{\mathsf{Var}\,(\overline{S}/\varepsilon_{n-1})}{[\mathsf{E}(\overline{S}/\varepsilon_{n-1})]^2}=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2(1-\varepsilon_{n-1}^2)}{m\varepsilon_{n-1}^2},$$

于是 $(\mathrm{USL}-\overline{\overline{X}})/(3\overline{S}/\varepsilon_{n-1})$ 或 $(\overline{\overline{X}}-\mathrm{LSL})/(3\overline{S}/\varepsilon_{n-1})$ 的变异系数为

$$\mathrm{CV}(\widehat{c}_{pk})=\sqrt{\frac{1}{9mn\widehat{c}_{pk}^2}+\frac{1-\varepsilon_{n-1}^2}{m\varepsilon_{n-1}^2}}. \tag{15}$$

同样得到 $(\mathrm{USL}-\overline{\overline{X}})/(3S_p/\varepsilon_{m(n-1)})$ 或 $(\overline{\overline{X}}-\mathrm{LSL})/(3S_p/\varepsilon_{m(n-1)})$ 的变异系数为

$$\mathrm{CV}(\widehat{c}_{pk})=\sqrt{\frac{1}{9mn\widehat{c}_{pk}^2}+\frac{1-\varepsilon_{m(n-1)}^2}{m\varepsilon_{m(n-1)}^2}}. \tag{16}$$

由于

$$[\mathrm{CV}(L-\overline{\overline{X}})]^2=\frac{\sigma^2/mn}{(L-\overline{\overline{X}})^2}\approx\frac{(\overline{R}/d_2)^2}{mn(L-\overline{\overline{X}})^2},\qquad [\mathrm{CV}(\overline{R}/d_2)]^2=\frac{\mathsf{Var}\,(\overline{R}/d_2)}{[\mathsf{E}(\overline{R}/d_2)]^2}=\frac{b_2^2}{md_2},$$

故 $(\mathrm{USL}-\overline{\overline{X}})/(3\overline{R}/d_2)$ 或 $(\overline{\overline{X}}-\mathrm{LSL})/(3\overline{R}/d_2)$ 的变异系数为

$$\mathrm{CV}(\widehat{c}_{pk})=\sqrt{\frac{1}{9mn\widehat{c}_{pk}^2}+\frac{1}{m(d_2/b_2)^2}}. \tag{17}$$

c_{pk} 的置信区间的正态近似式为

$$\widehat{c}_{pk}[1\pm u_{\alpha/2}\mathrm{CV}(\widehat{c}_{pk})]. \tag{18}$$

在质量工程中，非中心 t 分布表不是普遍使用的，而且计算麻烦．故简单的近似方法是十分必要的．近似式对 $\widehat{c}_{pk}$ 的精确性容易验证．当 $\alpha=0.05$, $n=20$, $c_0=1.2$ 时，将 (14) 式代入 (18) 式，得到 c_{pk} 的 95% 正态近似置信区间下限为

$$\widehat{c}_{pk}-1.6449\sqrt{\frac{1}{9\times 20}+\frac{\widehat{c}_{pk}^2}{2\times 19}}.$$

令此式等于 1.2, 解得 $\widehat{c}_{pk}=1.66$; 当 $n=30$, $c_0=1.5$ 时，得 $\widehat{c}_{pk}=1.93$. 与上述由非中心 T 分布算得的结果非常接近．文献 [1] 指明，当 $n\ge 30$ 时，以正态分布代替非中心 T 分布能得到良好的近似结果．估计过程能力指数的样本容量一般取 50 、 100 或更大，故获得指数的置信区间是可靠的．

§6. 过程能力指数的应用

某机床生产的罗拉外径近似地服从正态 $N(15.87,0.006^2)$, 它的规格限为 15.84–15.88 毫米. 从机床上每隔一小时抽测 5 个零件为一个子样本，共取 12 个子样本，如表 2 所示．为了计算简化，数据前均省略了 15.8, 并乘以 1000. 生产过程处于控制状态，通过完全数据组计算 $\overline{X}$ 和 S, 通过 12 组数据计算 $\overline{\overline{X}}$ 、 $\overline{R}$ 、 $\overline{S}$ 和 S_p, 计算步骤由表 2 给出．由表 2 算得,

$$\overline{X}=\overline{\overline{X}}=840.8/12=70.0667,$$
$$\overline{R}=127/12=10.5833,\qquad \overline{S}=49.5841/12=4.1320,$$
$$S_p=\sqrt{212.2488/12}=4.2056,\qquad S=\sqrt{1271.45/59}=4.6422.$$

由此可用四种方法按 (11) 、 (12) 和 (9) 式计算能力指数 $\widehat{c}_p$ 及 95% 置信区间，按 (14) 、 (17) 、 (15) 和 (16) 式计算 $\widehat{c}_{pk}$ 及 95% 置信区间 $(u_{\alpha/2}=1.96)$. 所得结果如表 3 所示，表中还列出变异系数．

表 2　罗拉外径的平均值、标准差和极差的计算

样本号	罗拉外径					$\overline{X}_i$	R_i	$\sum_{j=1}^{5}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2$	S_i	S_i^2	$\sum_{j=1}^{5}X_{ij}^2$
1	70	67	65	68	75	69.0	10	58	3.8079	14.5001	23863
2	78	75	75	72	65	73.0	13	98	4.9497	24.4995	26743
3	70	70	68	70	62	68.0	8	48	3.4641	12.0000	23168
4	68	73	78	65	71	71.0	13	98	4.9497	24.4995	25303
5	70	78	74	75	75	74.4	8	33	2.8723	8.2501	27710
6	78	66	74	68	70	71.2	12	93	4.8218	23.2498	25440
7	72	66	68	62	64	66.4	10	59	3.8406	14.7502	22104
8	64	64	71	75	70	68.8	11	91	4.7697	22.7500	23758
9	75	67	69	72	72	71.0	8	38	3.0822	9.5000	25243
10	69	71	72	78	72	72.4	9	45	3.3541	11.2500	26254
11	63	58	64	67	72	64.8	14	107	5.1720	26.7496	21102
12	67	71	66	77	73	70.8	11	81	4.5000	20.2500	25144
合计						840.8	127	849	49.5841	212.2488	295832

表 3　过程能力指数、变异系数和置信区间

方法	$S\,(=4.6422)$	$\overline{R}\,(=10.5833)$	$\overline{S}\,(=4.1320)$	$S_p\,(=4.2056)$
c_p	1.44	1.47	1.52	1.58
CV	0.0921	0.1069	0.1048	0.1021
95% 置信区间	1.18–1.70	1.17–1.78	1.20–1.83	1.27–1.90
c_{pk}	0.713	0.728	0.753	0.783
CV	0.1101	0.1225	0.1193	0.0624
95% 置信区间	0.559–0.867	0.553–0.902	0.577–0.929	0.687–0.879

在本例中，$\widehat{c}_p=1.47$, c_p 的 97.5% 的置信下限为 1.17. 决定过程是否有能力，需要根据估计量 $\widehat{c}_p$ 作出判决．考虑假设 $H_0: c_p\le c_0$ (过程无能力), $H_1: c_p>c_0$ (过程有能力), 因此判决规则是：对给定 c_0, α, m, n, 若 $\widehat{c}_p>c_{\alpha/2}$, 假设 H_0 被拒绝，认为过程是有能力的；若 $\widehat{c}_p\le c_{\alpha/2}$, 过程无能力．本例中，要求 $c_0=1.2$, 令 (12) 式中第一式的下限等于 1.2, 解得 $\widehat{c}_p=c_{\alpha/2}=1.51$. 今 $1.47<1.51$, 过程能力是不满足要求的．c_0 增大，相应的 $\widehat{c}_p$ 也增大，本例置信下限 $1.17<1.20$, 也可断定过程不满足要求．若规定 $c_0=1.0$, 则 $1.17>c_0$ 是满足要求的．本例，$\widehat{c}_{pk}=0.73$, 置信下限为 0.553, 规定 $c_0=1.0$, 由 (18) 式，解得 $c_{\alpha/2}=1.28$. 今 $0.73<1.28$ 或 $0.553<1.0$, 过程能力严重不足．

§7.　结　　论

过程标准差通常是利用子样本内的变差间接地估计，最常用的方法是 $\widehat{\sigma}=\overline{R}/d_2$, 估计量 $\widehat{\sigma}=\overline{S}/c_2$ 较少广泛使用．统计学者喜爱的方法是样本方差的平均值的平方根 S_p, 它比 $\overline{R}$ 和 $\overline{S}$

更有效. 对于较大的子样本容量, 根据估计 $\overline{S}$ 或 S_p 比使用 $\overline{R}$ 更精确; 对于小的子样本, 估计 S_p 也优于 $\overline{R}$ 和 $\overline{S}$, 把数据合并入一个大样本中能获得估计的更大精确性, 但是 $\overline{R}$ 计算简单, 是英国最早 (1955) 制定的标准 (BS2564) 能力指数.

过程能力指数是一个无量纲的量, 通常以 $c_p = c_{pk} = 1.33$ 作为最小值的基点, 使不合格品率几乎不可能发生. c_{pk} 常和 c_p 同时使用, 若 c_{pk} 太低则须计算 c_p, 以决定方差是否过大; 若 c_{pk} 接近于 c_p, 则过程平均值没有发生偏离. 利用 c_{pk} 能决定过程平均值是否接近规格限.

过程能力指数是提供生产过程信息的综合指标, 它能监督和改进生产过程, 预防不合格品的出现, 为公司内部或生产者和消费者双方提供共同的语言. 必须指出, 能力指数是过程变异的定量表示. 异常变异因素的存在, 不可能对将来过程作出预测. 利用统计控制图能表明生产过程是否处于控制状态. 因此过程能力指数必须与过程控制图同时使用.

参 考 文 献

[1] 张维铭, 统计质量控制理论与应用, 浙江大学出版社, 1992.
[2] 山内二胡, 统计数值表, 日本规格协会, 1972.
[3] Resnikoff, G.J., *The Distribution of the Average-Range for Subgroups of Five*, Stanford University, 1954.
[4] Kirmani, S.N.U.A., Estimation of σ and the process capability index based on subsamples, *Communication Statistics — Theory and Methods*, **20(1)**(1991), 275–291.
[5] M· 费吏著, 王福保译, 概率论及数理统计, 上海科技出版社, 1962.
[6] Chou, Y., Owen, D.B., Borrego, S.A., Lower confidence limits on process capability indices, *Journal of Quality Technology*, **22(3)**(1990), 223–229.
[7] 张维铭, 计量验收方案的一种制定方法, 数学的实践与认识, **3(2)**(1973), 15–20.
[8] Bissell, A.F., How Reliable is your capability index? *Applied Statistics*, **39(3)**(1990), 331–340.
[9] Stuart, A. and Ord, J.K., *Kendall's Advanced Theory of Statistics*, 5$^{\text{th}}$ edn, Vol. I, 325, London: Griffin, 1987.

Estimation of Process Capability Indices and Their Confidence Intervals Based on Subsamples

Zhang Weiming Zong Yunnan Liu Jianbin
(*College of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, 310018*)

The paper provides estimators of process capability indices and their confidence intervals based on m subsamples, each of size n, discuss their properties, presents the approximate sampling distributions and confidence intervals for some indices.