应用概率统计　第二十五卷
第二期　2009年4月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.25 No.2 Apr. 2009

两两NQD序列线性形式的强稳定性 *

万成高　　陈 芬

(湖北大学数学与计算机科学学院, 武汉, 430062)

摘　要

本文研究了两两NQD序列线性形式的强稳定性, 得到了不同分布两两NQD序列具有线性形式强稳定性的充分条件.

关 键 词: 两两NQD序列, 线性形式, 强稳定性.

学 科 分 类 号: O211.4.

§1.　引　　言

称随机变量X和Y是NQD (Negatively Quadrant Dependend)的, 若对任意$x,y\in R$都有

$$\mathsf{P}(X<x,Y<y)\leq\mathsf{P}(X<x)\mathsf{P}(Y<y).$$

称随机变量序列$\{X_n,n\geq 1\}$是两两NQD序列, 若对任意$i\neq j$, X_i与X_j是NQD的.

两两NQD序列的概念是由著名统计学家Lehmann在1966年提出来的[1], 由定义可以看出, 两两NQD序列是一类相当广泛的随机变量序列, 通常的独立随机变量序列可以认为是两两NQD序列的相当特殊的情形, 因此对两两NQD序列的研究就显得更为困难. Matula对同分布两两NQD序列部分和获得了与独立情形一样的Kolmogorov型强大数律[2]. 吴群英对同分布两两NQD序列部分和获得了与独立情形一样Baum和Katz型完全收敛定理[3]. 对不同分布两两NQD序列的结果不太多, 文献[4]研究了不同分布两两NQD序列的收敛性, 获得了与独立情形一样的大数定律和完全收敛定理. 本文主要研究两两NQD序列线性形式的强稳定性, 得到了不同分布两两NQD序列具有线性形式强稳定性的充分条件. 这种研究不仅仅是受到大数定律研究的推动, 而且在考虑线性模型最小二乘估计的相容性时就要讨论线性形式的强稳定性, 因此对线性形式的强稳定性的研究无疑是非常重要的. 本文约定: 文中出现的C总表示正常数, 它在不同的地方可以代表不同的值. 集合A的示性函数记为I_A.

---

*国家自然科学基金项目(10571139)资助.

本文2007年1月23日收到, 2007年6月20日收到修改稿.

§2. 主要结果及证明

称随机变量序列$\{X_n, n\geq 1\}$是强稳定的, 若存在两个常数列$\{a_n, n\geq 1\}$和$\{b_n, n\geq 1\}$, $a_n\uparrow\infty$ $(n\to\infty)$, 有$a_n^{-1}X_n-b_n\to 0$ a.s.. 称随机变量序列$\{X_n, n\geq 1\}$是尾概率一致有界的, 若存在非负的随机变量X及正常数C, 使对任意的x及$n\geq 1$, 都有$\mathsf{P}(|X_n|>x)\leq C\mathsf{P}(X>x)$成立, 此时记为$\{X_n\}<X$.

引理 2.1[1] 设随机变量X和Y是NQD的, 则

(i) $\mathsf{E}XY\leq \mathsf{E}X\mathsf{E}Y$;

(ii) 对任意$x,y\in R$都有: $\mathsf{P}(X>x, Y>y)\leq \mathsf{P}(X>x)(Y>y)$;

(iii) 如f,g同为非降(或非增)函数, 则$f(X)$与$g(Y)$仍为NQD的.

定理 2.1 设$\{X_n, n\geq 1\}$是随机变量序列, $\{a_n, n\geq 1\}$是正实数列且$a_n\uparrow\infty$ $(n\to\infty)$, 若其满足下列条件:

(i) $\mathsf{E}(X_i^{\pm}X_j^{\pm})\leq \mathsf{E}X_i^{\pm}\mathsf{E}X_j^{\pm}$ $(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots)$;

(ii) $\sup\limits_{n\geq 1} a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{E}|X_i|<\infty$;

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{Var}\,(X_n)/a_n^2<\infty$,

则强大数定律$a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mathsf{E}X_i)\to 0$ a.s.成立.

证明: 记$Y_n=X_n^{+}+\mathsf{E}X_n^{-}$, $Z_n=X_n^{-}+\mathsf{E}X_n^{+}$ $(n\geq 1)$, 则$\{Y_n, n\geq 1\}$, $\{Z_n, n\geq 1\}$是非负随机变量序列. 注意到

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(Y_iY_j)&=\mathsf{E}(X_i^{+}X_j^{+})+\mathsf{E}X_i^{+}\mathsf{E}X_j^{-}+\mathsf{E}X_i^{-}\mathsf{E}X_j^{+}+\mathsf{E}X_i^{-}\mathsf{E}X_j^{-},\\
\mathsf{E}Y_i\mathsf{E}Y_j&=\mathsf{E}X_i^{+}\mathsf{E}X_j^{+}+\mathsf{E}X_i^{+}\mathsf{E}X_j^{-}+\mathsf{E}X_i^{-}\mathsf{E}X_j^{+}+\mathsf{E}X_i^{-}\mathsf{E}X_j^{-};\\
\mathsf{E}(Z_iZ_j)&=\mathsf{E}(X_i^{-}X_j^{-})+\mathsf{E}X_i^{-}\mathsf{E}X_j^{+}+\mathsf{E}X_i^{+}\mathsf{E}X_j^{-}+\mathsf{E}X_i^{+}\mathsf{E}X_j^{+},\\
\mathsf{E}Z_i\mathsf{E}Z_j&=\mathsf{E}X_i^{-}\mathsf{E}X_j^{-}+\mathsf{E}X_i^{-}\mathsf{E}X_j^{+}+\mathsf{E}X_i^{+}\mathsf{E}X_j^{-}+\mathsf{E}X_i^{+}\mathsf{E}X_j^{+}.
\end{aligned}$$

由(i)可以得到

$$\mathsf{E}(Y_iY_j)\leq \mathsf{E}Y_i\mathsf{E}Y_j,\qquad \mathsf{E}(Z_iZ_j)\leq \mathsf{E}Z_i\mathsf{E}Z_j\qquad (i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots).\tag{2.1}$$

因为$X_n-\mathsf{E}X_n=Y_n-Z_n$, $a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{E}Y_i-a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{E}Z_i=a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{E}(X_i-\mathsf{E}X_i)=0$ $(n\geq 1)$, 为证$a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mathsf{E}X_i)\to 0$ a.s.成立, 只需证明$a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mathsf{E}Y_i)\to 0$ a.s.和$a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Z_i-\mathsf{E}Z_i)\to 0$ a.s.即可.

由于$\mathsf{Var}\,(X_n)=\mathsf{Var}\,(X_n^{+})-2(\mathsf{E}(X_n^{+}X_n^{-})-\mathsf{E}X_n^{+}\mathsf{E}X_n^{-})+\mathsf{Var}\,(X_n^{-})=\mathsf{Var}\,(X_n^{+})+2\mathsf{E}X_n^{+}\cdot\mathsf{E}X_n^{-}+\mathsf{Var}\,(X_n^{-})$, 从而$\mathsf{Var}\,(Y_n)=\mathsf{Var}\,(X_n^{+})\leq \mathsf{Var}\,(X_n)$且$\mathsf{E}Y_n=\mathsf{E}|X_n|$ $(n\geq 1)$, 由(ii)有

$$\sup_{n\geq 1} a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}Y_i\leq \sup_{n\geq 1} a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}|X_i|<\infty.\tag{2.2}$$

由(2.1)有

$$\mathsf{Var}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) \le \sum_{i=1}^n \mathsf{Var}\,(Y_i) \le \sum_{i=1}^n \mathsf{Var}\,(X_i),$$

令$\rho_{ij}=\begin{cases}\mathsf{Var}\,(X_i), & i=j;\\ 0, & i\ne j,\end{cases}$ 则有

$$\mathsf{Var}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) \le \sum_{i=1}^n \mathsf{Var}\,(X_i) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \rho_{ij}, \tag{2.3}$$

又由(iii)有

$$\sum_{i=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty \rho_{ij}/(a_{i\vee j})^2 = \sum_{n=1}^\infty \mathsf{Var}\,(X_n)/a_n^2 < \infty, \tag{2.4}$$

由(2.2), (2.3), (2.4)及文献[5]知$a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^n(Y_i-\mathsf{E}Y_i)\to 0$ a.s.. 同理可证$a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^n(Z_i-\mathsf{E}Z_i)\to 0$ a.s.. $\square$

定理2.1是一类两两负相依随机变量序列的Kolmogorov型强大数定律. 特别当$a_n=n$, $\{X_n, n\ge 1\}$是两两独立随机变量序列时, 定理2.1就是文献[6]的定理1. 作为定理2.1的应用, 下面讨论两两NQD序列的强大数定律.

推论 2.1 设$\{X_n, n\ge 1\}$是两两NQD序列, $\{a_n, n\ge 1\}$是正实数列且$a_n\uparrow\infty$ $(n\to\infty)$, 若其满足下列条件:

(i) $\sum\limits_{i=1}^\infty a_i^{-2}\mathsf{E}X_i^2 I_{\{|X_i|\le a_i\}}<\infty$;

(ii) $\sum\limits_{i=1}^\infty \mathsf{P}(|X_i|>a_i)<\infty$;

(iii) $a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^n \mathsf{E}X_i I_{\{|X_i|>a_i\}}\longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$;

(iv) $\sup\limits_{n\ge 1} a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^n \mathsf{E}|X_i| I_{\{|X_i|\le a_i\}}<\infty$,

则强大数定律$a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\mathsf{E}X_i)\to 0$ a.s.成立.

证明: 对任意的$n\ge 1$, 记$Y_n=-a_nI_{\{X_n<-a_n\}}+X_nI_{\{|X_n|\le a_n\}}+a_nI_{\{X_n>a_n\}}$. 由(ii)知

$$\sum_{n=1}^\infty \mathsf{P}(X_n\ne Y_n)=\sum_{n=1}^\infty \mathsf{P}(|X_n|>a_n)<\infty,$$

由Borel-Cantelli引理及条件(iii), 为证$a_n^{-1}\sum\limits_{n=1}^n(X_i-\mathsf{E}X_i)\to 0$ a.s., 只须证明

$$a_n^{-1}\sum_{n=1}^n(Y_i-\mathsf{E}Y_i)\to 0 \qquad \text{a.s.} \tag{2.5}$$

即可.

注意到$\{Y_n, n\ge 1\}$是两两NQD序列, 从而$\{Y_n^{\pm}, n\ge 1\}$也是两两NQD序列, 由引理2.1的(i)知$\{Y_n, n\ge 1\}$满足定理2.1的(i), 又由条件(i)、(iv)易知$\{Y_n, n\ge 1\}$满足定理2.1的(ii)、(iii), 从而(2.5)成立, 推论2.1证毕. □

推论 2.2　设$\{X_n, n\ge 1\}$是两两NQD序列, $\{a_n, n\ge 1\}$是正实数列且$a_n\uparrow\infty$ $(n\to\infty)$. 若其满足下列条件:

(i) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathsf{E}\Big(\dfrac{|X_i|^p}{a_i|X_i|^{p-1}+a_i^p}\Big)<\infty,\quad 1\le p\le 2;$

(ii) $\sup\limits_{n\ge 1}a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{E}|X_i|<\infty,$

则强大数定律$a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mathsf{E}X_i)\to 0$ a.s.成立.

证明:　由推论2.1知, 要证$a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mathsf{E}X_i)\to 0$ a.s.成立, 只需验证$\{X_n, n\ge 1\}$是满足推论2.1的条件, 下面分别验之.

在条件(i)下有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{E}\Big(\frac{|X_i|^2}{a_i^2}I_{\{|X_i|<a_i\}}\Big)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{E}\Big(\frac{|X_i|^p}{a_i^p}I_{\{|X_i|<a_i\}}\Big)\\ \le&\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{E}\Big(\frac{|X_i|}{a_i}\cdot\frac{2|X_i|^{p-1}}{a_i^{p-1}+|X_i|^{p-1}}\Big)I_{\{|X_i|<a_i\}}\le 2\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{E}\Big(\frac{|X_i|^p}{a_i^p+a_i|X_i|^{p-1}}\Big)<\infty;\end{aligned}\tag{2.6}$$

对$p\ge 1$, 若$|X_i|\ge a_i>0$, 则$2|X_i|^p/(a_i^p+a_i|X_i|^{p-1})\ge 1$, 因此有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{P}(|X_i|\ge a_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{E}I_{\{|X_i|\ge a_i\}}\le 2\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{E}\Big(\frac{|X_i|^p}{a_i^p+a_i|X_i|^{p-1}}\Big)<\infty;\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{E}\Big(\frac{X_i}{a_i}I_{\{|X_i|>a_i\}}\Big)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{E}\Big(\frac{|X_i|}{a_i}I_{\{|X_i|>a_i\}}\Big)\\ \le&\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{E}\Big(\frac{|X_i|}{a_i}\cdot\frac{2|X_i|^{p-1}}{a_i^{p-1}+|X_i|^{p-1}}\Big)I_{\{|X_i|>a_i\}}\le 2\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{E}\Big(\frac{|X_i|^p}{a_i^p+a_i|X_i|^{p-1}}\Big)<\infty,\end{aligned}\tag{2.8}$$

由(2.8)式及Kronecker引理知

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}X_iI_{\{|X_i|>a_i\}}\to 0.\tag{2.9}$$

综上(2.6)、(2.7)、(2.9)式可知推论2.1中条件成立, 故$a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mathsf{E}X_i)\to 0$ a.s.成立. □

推论 2.3　设$\{X_n, n\ge 1\}$是两两NQD序列, $\{a_n, n\ge 1\}$是正实数列且$a_n\uparrow\infty$ $(n\to\infty)$. 若

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{E}\Big(\Big|\frac{X_i}{a_i}\Big|^p\Big)<\infty,\quad 1\le p\le 2,\qquad \sup_{n\ge 1}a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{E}|X_i|<\infty,$$

则大数定律$a_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mathsf{E}X_i)\to 0$ a.s.成立.

证明: 由于
$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{E}\Big(\frac{|X_i|^p}{a_i|X_i|^{p-1}+a_i^p}\Big)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mathsf{E}\Big(\Big|\frac{X_i}{a_i}\Big|^p\Big)<\infty,$$
由推论2.2知推论2.3成立. □

若X与Y是NQD的, 则必有$\mathsf{E}(X^{\pm}Y^{\pm})\le \mathsf{E}X^{\pm}\mathsf{E}Y^{\pm}$. 反之未必成立, 反例如下: 设离散型随机变量$(X,Y)$的分布列为: $\mathsf{P}(X=0,Y=0)=\mathsf{P}(X=1,Y=8/9)=0$, $\mathsf{P}(X=1,Y=0)=\mathsf{P}(X=0,Y=1)=1/9$, $\mathsf{P}(X=0,Y=8/9)=5/9$, $\mathsf{P}(X=1,Y=1)=2/9$, 则有$\mathsf{E}(X^{\pm}Y^{\pm})\le\mathsf{E}X^{\pm}\mathsf{E}Y^{\pm}$, 但是$\mathsf{P}(X<1,Y<1)>\mathsf{P}(X<1)\mathsf{P}(Y<1)$, 由此可见$X$与$Y$满足定理2.1的条件(i), 但$X$与$Y$不是NQD的. Jamison[8]等(1965)讨论了独立同分布随机变量序列的线性形式的强稳定性, 下面我们讨论两两NQD序列线性形式的强稳定性.

引理 2.2 设$\{a_n,n\ge1\}$和$\{b_n,n\ge1\}$是任意的两个正实数列, $c_n=b_n/a_n$, $b_n\uparrow\infty$, $\{c_n,n\ge1\}$严格单增, $\{X_n,n\ge1\}$为零均值的随机变量序列且$\{X_n\}\prec X$, 对任意的$x>0$, 定义$N(x)=\mathrm{Card}\{n:c_n\le x\}$, 若$X$满足:

(i) $\mathsf{E}N(X)<\infty$;

(ii) $\displaystyle\int_1^{\infty}\mathsf{E}N(X/s)\mathrm{d}s<\infty$.

记$Y_n=-c_nI_{\{X_n<-c_n\}}+X_nI_{\{|X_n|\le c_n\}}+c_nI_{\{X_n>c_n\}}$, 则$b_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\mathsf{E}Y_i\to0\ (n\to\infty)$.

证明:
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n|\mathsf{E}Y_n|}{b_n}&\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n|\mathsf{E}X_nI_{\{|X_n|\le c_n\}}|}{b_n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n|\mathsf{E}c_nI_{\{|X_n|>c_n\}}|}{b_n}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mathsf{E}X_nI_{\{|X_n|>c_n\}}|}{c_n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\mathsf{P}(|X_n|>c_n)}{c_n}\\
&\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mathsf{E}X_n|I_{\{|X_n|>c_n\}}}{c_n}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|X_n|>c_n)\\
&\le\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-1}\Big(c_n\mathsf{P}(|X_n|>c_n)+\int_{c_n}^{\infty}\mathsf{P}(|X_n|>t)\mathrm{d}t\Big)+\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|X_n|>c_n)\\
&\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^{\infty}\mathsf{P}(|X_n|>t\,c_n)\mathrm{d}t+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(X>c_n)\\
&\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^{\infty}\mathsf{P}(X>t\,c_n)\mathrm{d}t+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(X>c_n).
\end{aligned}$$

由于$N(x)$对x非降, $\{c_n,n\ge1\}$严格单增, 故有
$$\{X>c_n\}\subset\{N(X)>N(c_n)\}=\{N(X)>n-1\},$$
从而有
$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(X>c_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(N(X)>n-1)\le1+\mathsf{E}N(X)<\infty.$$

同理有

$$\Big\{\frac{X}{t}>c_n\Big\}\subset\Big\{N\Big(\frac{X}{t}\Big)>n-1\Big\},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^{\infty}\mathsf{P}(X>tc_n)\mathrm{d}t\le\int_1^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}\Big(N\Big(\frac{X}{t}\Big)>n-1\Big)\mathrm{d}t\le 1+\int_1^{\infty}\mathsf{E}N\Big(\frac{X}{t}\Big)\mathrm{d}t<\infty,$$

因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n|\mathsf{E}Y_n|}{b_n}<\infty,$$

由Kronecker引理知引理2.2的结论成立. □

定理 2.2 设$\{a_n,n\ge1\}$和$\{b_n,n\ge1\}$是任意的两个正实数列, $c_n=b_n/a_n$, $b_n\uparrow\infty$, $\{c_n,n\ge1\}$严格单增, $\{X_n,n\ge1\}$为零均值的两两NQD序列且$\{X_n\}<X$, 对任意的$x>0$, 定义$N(x)=\mathrm{Card}\{n:c_n\le x\}$, 若$X$满足:

(i) $\mathsf{E}N(X)<\infty$;

(ii) $\displaystyle\int_1^{\infty}\mathsf{E}N(X/s)\mathrm{d}s<\infty$;

(iii) $\displaystyle\max_{1\le j\le n}c_j^p\sum_{j=n}^{\infty}c_j^{-p}=O(n)$, 其中$1\le p\le2$;

(iv) $\displaystyle\sup_{n\ge1}b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i\mathsf{E}|X_i|<\infty$,

则$\displaystyle b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\to0$ a.s.成立.

证明: 对任意的$n\ge1$, 记

$$Y_n=-c_nI_{\{X_n<-c_n\}}+X_nI_{\{|X_n|\le c_n\}}+c_nI_{\{X_n>c_n\}},\quad S_n=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i,\quad T_n=\sum_{i=1}^{n}a_iY_i,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(X_n\ne Y_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|X_n|>c_n)\le C\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(X>c_n)\le C(1+\mathsf{E}N(X))<\infty,$$

由Borel-Cantelli引理, 为证定理2.2的结论, 只须证明$\displaystyle b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iY_i\to0$ a.s.即可. 由于

$$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iY_i=b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i(Y_i-\mathsf{E}Y_i)+b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i\mathsf{E}Y_i,$$

由条件(i), (ii)及引理2.2知

$$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i\mathsf{E}Y_i\to0\qquad\text{a.s.}.$$

往证

$$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i(Y_i-\mathsf{E}Y_i)\to0\qquad\text{a.s.},$$

注意到$\{a_n(Y_n-\mathsf{E}Y_n),n\ge 1\}$是两两NQD序列且

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{E}|a_n(Y_n-\mathsf{E}Y_n)|^p}{b_n^p}\\
\le\ & C\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-p}\mathsf{E}|X_n|^pI_{\{|X_n|\le c_n\}}+C\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-p}c_n^p\mathsf{P}(|X_n|>c_n)\\
\le\ & C\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-p}\big(c_n^p\mathsf{P}(X>c_n)+\mathsf{E}X^pI_{\{X\le c_n\}}\big)+C\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(X>c_n)\\
\le\ & C\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-p}\mathsf{E}X^pI_{\{X\le c_n\}}+C(1+\mathsf{E}N(X)).
\end{aligned}\tag{2.10}
$$

记$d_0=0$, $d_n=\max\limits_{1\le j\le n}c_j$, 则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-p}\mathsf{E}X^pI_{\{X\le c_n\}}\le\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{-p}\mathsf{E}X^pI_{\{X\le d_n\}}\\
=\ &\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}c_n^{-p}\mathsf{E}X^pI_{\{d_{j-1}<X\le d_j\}}=\sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{E}X^pI_{\{d_{j-1}<X\le d_j\}}\sum_{n=j}^{\infty}c_n^{-p}\\
\le\ &\sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{P}(d_{j-1}<X\le d_j)d_j^p\sum_{n=j}^{\infty}c_n^{-p}\le C\sum_{j=1}^{\infty}j\mathsf{P}(d_{j-1}<X\le d_j)\\
=\ & C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{j}\mathsf{P}(d_{j-1}<X\le d_j)\le C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\mathsf{P}(d_{j-1}<X\le d_j)\\
=\ & C\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(X>d_{n-1})\le C\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(X>c_n)+1\Big)<\infty.
\end{aligned}\tag{2.11}
$$

由(2.10)及(2.11)式知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{E}|a_n(Y_n-\mathsf{E}Y_n)|^p}{b_n^p}<\infty.$$

由条件(iv)及推论2.3知$b_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(Y_i-\mathsf{E}Y_i)\to 0$ a.s.成立, 至此定理2.2证毕. □

说明 1 若定理2.2中的条件(iv)减弱为: $\sup\limits_{n\ge1}b_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\mathsf{E}|X_i|I_{\{|X_i|\le c_i\}}<\infty$, 则定理2.2的结论仍然成立.

说明 2 定理2.2中的条件(iv)换成: $\sup\limits_{n\ge1}b_n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i<\infty$且$X$可积, 则定理2.2的结论仍然成立. 事实上

$$
\begin{aligned}
&\sup_{n\ge1}b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i\mathsf{E}|X_i|=\sup_{n\ge1}b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i\int_0^{\infty}\mathsf{P}(|X_i|>x)\mathrm{d}x\\
\le\ & C\sup_{n\ge1}b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i\int_0^{\infty}\mathsf{P}(X>x)\mathrm{d}x=C\mathsf{E}X\sup_{n\ge1}b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i<\infty.
\end{aligned}
$$

定理 2.3 设$\{a_n,n\ge1\}$和$\{b_n,n\ge1\}$是任意的两个正实数列, $c_n=b_n/a_n$, $b_n\uparrow\infty$, $\{c_n,n\ge1\}$严格单增, $\{X_n,n\ge1\}$为两两NQD序列且$\{X_n\}\prec X$, 对任意的$x>0$, 定义$N(x)=\mathrm{Card}\{n:c_n\le x\}$, 若$X$满足:

(i) $\mathsf{E}N(X) < \infty$;

(ii) $\int_0^{\infty} t^{p-1}\mathsf{P}(X > t)\int_t^{\infty} N(y)/y^{p+1}\mathrm{d}y\mathrm{d}t < \infty$, 其中$1 \le p \le 2$;

(iii) $\sup_{n\ge 1} b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i\mathsf{E}|X_i| < \infty$,

则存在数列$\{d_n, n \ge 1\}$, 使得$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_iX_i - d_n \to 0$ a.s.成立.

证明: 对任意的$n \ge 1$, Y_n, S_n, T_n的记号同定理2.2. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(X_n \ne Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{P}(|X_n| \ge c_n) < \infty,$$

由Borel-Cantelli引理, 对数列$\{d_n, n\ge 1\}$, 为证$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_iX_i - d_n \to 0$ a.s., 只须证$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_iY_i - d_n \to 0$ a.s.即可. 如果能证明$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i(Y_i - \mathsf{E}Y_i) \to 0$ a.s., 则取$d_n = b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i\mathsf{E}Y_i$.

由于$\{a_n(Y_n - \mathsf{E}Y_n), n \ge 1\}$是两两NQD序列且

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{E}|a_n(Y_n - \mathsf{E}Y_n)|^p}{b_n^p} \le C\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-p}\mathsf{E}|Y_n|^p \\
\le\ & C\sum_{n=1}^{\infty} pc_n^{-p}\int_0^{\infty} t^{p-1}\mathsf{P}(|X_n| > t)\mathrm{d}t + C\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-p}c_n^p\mathsf{P}(|X_n| > c_n) \\
\le\ & Cp\int_0^{\infty} t^{p-1}\mathsf{P}(X > t)\sum_{\{n:c_n>t\}} c_n^{-p}\mathrm{d}t + C(1 + \mathsf{E}N(X)) \\
\le\ & Cp^2\int_0^{\infty} t^{p-1}\mathsf{P}(X > t)\int_t^{\infty} N(y)/y^{p+1}\mathrm{d}y\mathrm{d}t + C(1 + \mathsf{E}N(X)).
\end{aligned}$$

上式最后一个不等式成立基于下列事实:

$$\begin{aligned}
\sum_{\{n:c_n>t\}} c_n^{-p} &= \lim_{s\to\infty}\sum_{\{n:t<c_n<s\}} c_n^{-p} = \lim_{s\to\infty}\int_t^{s} y^{-p}\mathrm{d}N(y) \\
&= \lim_{s\to\infty}\Big(s^{-p}N(s) - t^{-p}N(t) + p\int_{t<y\le s} N(y)/y^{p+1}\mathrm{d}y\Big); \\
s^{-p}N(s) &\le p\int_s^{\infty} N(y)/y^{p+1}\mathrm{d}y \to 0 \qquad (s \to \infty).
\end{aligned}$$

由条件(i), (ii)有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{E}|a_n(Y_n - \mathsf{E}Y_n)|^p}{b_n^p} < \infty.$$

又由条件(iii)及推论2.3知$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i(Y_i - \mathsf{E}Y_i) \to 0$ a.s.成立. □

参 考 文 献

[1] Lehmann, E.L., Some concepts of dependence, *Ann. Math. Statist.*, **37**(1966), 1137–1153.

[2] Matula, P., A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables, *Statist. Probab. Lett.*, **15(3)**(1992), 209–213.

[3] 吴群英, 两两NQD列的收敛性质, 数学学报, **45(3)**(2002), 617–624.

[4] 万成高, 两两NQD列的大数定律和完全收敛性, 应用数学学报, **28(2)**(2005), 253–261.

[5] Chandra, T.K., Uniform integrability in the Cesàro sence and the weak law of large numbers, *Sankhya: the Indian Tournal of Statistics*, **51(Series A)**(1989), 309-317.

[6] Csörgö, S., Tandori, K. & Totik, V., On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables, *Acta. Math. Hungarica*, **42**(1983), 319–330.

[7] 林正炎, 陆传荣等, 概率极限理论基础, 北京: 高等教育出版社, 1999.

[8] Jamison, B., Orey, S. & Prutt, W.E., Convergence of weighted averages of independent random variables, *Z. Wahrch. Verw. Gebiet*, **4**(1965), 40–44.

Strong Stability of Linear Forms with Pairwise NQD Random Sequences

WAN CHENGGAO CHEN FEN

(*Faculty of Mathematics and Computer Science, Hubei University, Wuhan, 430062*)

In this paper, we discuss strong stability of linear forms in pairwise NQD random sequences and get sufficient conditions for strong stability of linear forms with different distributions pairwise NQD random sequences.

Keywords: Pairwise NQD random sequences, linear forms, strong stability.

AMS Subject Classification: 60F99.