应用概率统计 第二十六卷
第一期 2010年2月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.26 No.1 Feb. 2010

威布尔分布下平均寿命置信限的评估方法研究 *

李 学 京

(北京工业大学应用数理学院, 北京, 100124)

摘 要

设备的平均寿命是可靠性研究中的的一个重要指标. 对威布尔分布来说, 由于平均寿命没有明显的枢轴量, 因此给出平均寿命的精确的置信限较为困难. 本文分别利用广义枢轴量、WCF展开以及三阶法三种方法, 得到了设备寿命服从威布尔分布时的平均寿命的(近似)置信下限. 最后对上述三种方法分别进行了模拟比较, 结果显示文中给出的方法对于中小样本情形下得到的平均寿命的置信限是比较精确的.

关键词: 平均寿命置信限, 广义枢轴量, WCF展开, 三阶法.

学科分类号: O213.2.

§1. 引 言

在工程实际中, 设备的平均寿命是非常重要的一个可靠性指标, 因此在实际工作中常常需要对产品的平均寿命进行评估. 例如某工厂生产了一批轴承, 试验了若干个产品, 记录了它们的寿命. 于是就要问: 这批产品的寿命怎么样? 也就是有多大把握正常使用多长时间. 对于最常见的寿命分布—威布尔分布而言, 设备可靠度的枢轴量是很容易得到的, 而其平均寿命却很难找到简单的枢轴量, 因此平均寿命的精确的置信限不容易得到. 此外, 对于航空设备等一些产品, 价格一般比较昂贵或寿命时间较长, 客观上决定了平均寿命的评估经常是中小子样问题. 在此情况下, 传统的方法(如基于极大似然估计量渐近正态性的大样本区间)近似的效果是比较差的, 要想得到中小子样情形下平均寿命的置信限, 必须提高传统的方法的渐进近似的精度.

本文的结构安排如下: 第2节介绍设备服从威布尔分布时的统计模型; 第3节分别利用广义枢轴量、WCF展开以及三阶法等三种方法得出了完全样本情形下平均寿命的(近似)置信限; 第4节介绍了不完全数据转化为完全样本的QF算法([2]); 第5节对三种方法对完全数据和常见的定时、定数删失情形进行了模拟比较, 以验证方法的有效性.

§2. 统计模型

假定某航空设备的寿命变量X服从双参数(形状参数m和刻度参数η)威布尔分布, 其分

*本研究受国家自然科学基金(10771010)、数学天元基金(10926047)、北京市属市管高等学校人才强教计划资助项目以及北京工业大学博士启动基金(X0006013200902)资助.

本文2007年1月23日收到, 2007年10月29日收到修改稿.

布函数为$F_X(x)=1-\exp\{-(x/\eta)^m\}$, 则它的平均寿命为

$$\theta=\eta\Gamma(1+1/m), \tag{2.1}$$

设$X_1,\cdots,X_n$为该设备的一组独立观测样本(i.i.d.), 现欲基于该观测样本估计它的平均寿命θ的置信下限. 做变换

$$\mu=\ln\eta,\quad \sigma=1/m,\quad Y_k=\ln X_k,\qquad (k=1,\cdots,n), \tag{2.2}$$

则$Y_1,\cdots,Y_n$ i.i.d., 且Y的分布函数为

$$F_Y(y)=1-\exp\{-\exp\{(y-\mu)/\sigma\}\},\qquad -\infty<y<+\infty, \tag{2.3}$$

$\sigma>0$, $-\infty<\mu<+\infty$. 称分布函数为(2.3)的分布时刻度参数为σ, 位置参数为μ的极值分布; 当$\mu=0$, $\sigma=1$时称之为标准极值分布.

令

$$\varphi=\mu+\log(\Gamma(1+\sigma)), \tag{2.4}$$

则$\theta=\exp(\varphi)$. 为了方便, 本文中将通过求φ的置信下限得到平均寿命θ的置信下限.

§3. 完全数据情形下平均寿命的置信限

3.1 广义枢轴量方法

记$W_i=(Y_i-\mu)/\sigma$, $i=1,\cdots,n$, 则$W_1,\cdots,W_n$ i.i.d., 其共同分布为标准极值分布$F_{\mathsf{E}}(w)=1-\exp\{-\exp\{w\}\}$. 记

$$\overline{W}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n W_i,\qquad V^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(W_i-\overline{W})^2, \tag{3.1}$$

其中

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i,\qquad S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(Y_i-\overline{Y})^2. \tag{3.2}$$

比较(3.1)和(3.2)式, 可得

$$\overline{W}=\frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma},\qquad V^2=\frac{S^2}{\sigma^2}. \tag{3.3}$$

因此$(\overline{Y}-\mu)/\sigma$及$S^2/\sigma^2$是枢轴量, 其的分布函数与未知参数无关. 利用(3.3)式, 可知$\sigma=S/V$, $\mu=\overline{Y}-\overline{W}S/V$, 因此

$$\theta=\exp(\overline{Y}-ZS/V+\log(\Gamma(1+S/V))). \tag{3.4}$$

由此等式, 我们可以定义一个枢轴量$\widehat{\theta}$

$$\widehat{\theta}=\exp(\overline{y}-Zs/V+\log(\Gamma(1+s/V))). \tag{3.5}$$

这里的$\overline{y}$和s分别表示$\overline{Y}, S$在观测数据点$(y_1, \cdots, y_n)$的取值, 由于该枢轴量中含有观测数据, 因此它只是一个广义的枢轴量(定义见文[1]). 根据此枢轴量可以构造θ的置信下限:

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathsf{P}(\widehat{\theta} \geq \theta_L)\\ &= \mathsf{P}(\exp(\overline{y} - Zs/V + \log(\Gamma(1+s/V))) \geq \theta_L)\\ &= \mathsf{P}(\overline{y} - Zs/V + \log(\Gamma(1+s/V))) \geq \log\theta_L).\end{aligned} \tag{3.6}$$

由(3.6)式可知, $\log\theta_L$是$\overline{y} - Zs/V + \log(\Gamma(1+s/V))$的$1-\alpha$分位点. 因此, 可以通过模拟产生标准极值分布随机数, 求出$\overline{y} - Zs/V + \log(\Gamma(1+s/V))$的$1-\alpha$分位点作为$\log\theta_L$的近似值, 从而可以求出平均寿命的$1-\alpha$置信下限$\theta_L$.

3.2 WCF展开方法

记$\gamma_k = \mathsf{E}Y^k$, $k = 1, 2, \cdots$, $\rho = (\gamma_1, \gamma_2)$, 则易知

$$\gamma_1 = \mu - r\sigma, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{6}\pi^2\sigma^2 + \gamma_1^2, \tag{3.7}$$

其中$r = 0.577212\cdots$为欧拉常数, 显然(μ, σ)和(γ_1, γ_2)是一一对应的, 且$\varphi = \ln(\theta) = \varphi(\rho)$是$\rho$的充分光滑函数, 易知$\gamma_1, \gamma_2$的矩估计分别为

$$\widehat{\gamma}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad \widehat{\gamma}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2, \tag{3.8}$$

记$\widehat{\gamma} = (\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2)$, 由于$\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2$均为独立和, 容易验证$\widehat{\gamma}$满足适当的条件, 即$\widehat{\gamma}$渐近正态, 及

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}(\widehat{\gamma}_i - \gamma_i) = 0, \quad \mathsf{E}(\widehat{\gamma}_i - \gamma_i)^2 = \frac{\nu_i}{n}, \quad \mathsf{E}(\widehat{\gamma}_1 - \gamma_1)(\widehat{\gamma}_2 - \gamma_2) = \frac{\vartheta_{11}}{n},\\ &\mathsf{E}(\widehat{\gamma}_i - \gamma_i)^3 = \frac{\omega_i}{n^2}, \quad \mathsf{E}(\widehat{\gamma}_1 - \gamma_1)^2(\widehat{\gamma}_2 - \gamma_2) = \frac{\vartheta_{21}}{n^2}, \quad \mathsf{E}(\widehat{\gamma}_1 - \gamma_1)(\widehat{\gamma}_2 - \gamma_2)^2 = \frac{\vartheta_{12}}{n^2},\\ &\mathsf{E}(\widehat{\gamma}_1 - \gamma_1)^2(\widehat{\gamma}_2 - \gamma_2)^2 = \frac{\vartheta_{22}}{n^2} + O(n^{-3}), \quad \mathsf{E}(\widehat{\gamma}_1 - \gamma_1)^3(\widehat{\gamma}_2 - \gamma_2) = \frac{\vartheta_{31}}{n^2} + O(n^{-3}),\\ &\mathsf{E}(\widehat{\gamma}_1 - \gamma_1)(\widehat{\gamma}_2 - \gamma_2)^3 = \frac{\vartheta_{13}}{n^2} + O(n^{-3}), \quad \mathsf{E}(\widehat{\gamma}_i - \gamma_i)^4 = \frac{3\nu_i^2}{n^2} + O(n^{-3})\ (i = 1, 2).\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中

$$\begin{aligned}&\nu_1 = \gamma_2 - \gamma_1^2, \quad \nu_2 = \gamma_4 - \gamma_2^2, \quad \omega_1 = \gamma_3 - 3\gamma_1\gamma_2 + 2\gamma_1^3, \quad \omega_2 = \gamma_6 - 3\gamma_2\gamma_4 + 2\gamma_2^3,\\ &\vartheta_{11} = \gamma_3 - \gamma_1\gamma_2, \quad \vartheta_{21} = \gamma_4 - \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 + 2\gamma_1^2\gamma_2, \quad \vartheta_{12} = \gamma_5 - \gamma_1\gamma_4 - 2\gamma_2\gamma_3 + 2\gamma_1\gamma_2^2,\\ &\vartheta_{22} = \nu_1\nu_2 + 2\vartheta_{11}^2, \quad \vartheta_{31} = 3\nu_1\vartheta_{11}, \quad \vartheta_{13} = 3\nu_2\vartheta_{11}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

四阶以上累量满足$K_j = O(n^{1-j})$ $(j \geq 4)$, 这时存在参数估计量的函数H, G_1, G_3使得

$$V_n = G_1 n^{-1} + H(\widehat{\varphi} - \varphi) + G_3(\widehat{\varphi} - \varphi)^3. \tag{3.11}$$

满足$\sqrt{n}V_n$的特征函数$g(t)=\exp(-t^2/2)+O(n^{-1})$. 因此有

$$\mathsf{P}\{\varphi-\widehat{\varphi}\le x\}=\Phi(-G_1n^{-1/2}+Hn^{1/2}x-G_3n^{1/2}x^2)+O(n^{-1}). \tag{3.12}$$

称(3.12)为随机变量$\varphi-\widehat{\varphi}$分布的二阶正态逼近. 具体的推导过程及$H,G_1,G_3$的具体形式见文[2]. 由以上式子可以得出$\varphi$的置信下限为:

$$\varphi_L=\widehat{\varphi}-x_pH^{-1}n^{-1/2}+(G_3x_p^2+G_1H^2)H^{-3}n^{-1}. \tag{3.13}$$

这里x_p为正态分布的p分位点, 由此可以计算出设备的平均寿命的置信下限, 这种方法简称为WCF方法. 该方法也可用来计算复杂系统的平均寿命的置信区间, 只需要能把系统的平均寿命表示为部件参数的函数.

3.3 三阶法

三阶法是基于鞍点近似得到的一种求参数置信区间的近似方法, 它的近似程度较高, 在小子样情形下也可以达到很好的精确度. 对于位置刻度模型, 有两种常用的三阶法可以用来近似尾概率, 一种是Barndorff-Nielsec's (1986, 1991)方法, 另一种为Fraser and Reid's (1995)方法. 这两种方法可以获得相同的近似. 这里我们利用的是后一种方法, 因为它只需要用到一个辅助方向向量$V=(1,e)$ (e是一个残余向量), 而不需要特定的辅助向量, 也不需要把讨厌参数明确的表达出来; 而前一种方法的结果与选用的辅助向量是有关的, 在很多情况下明确的辅助向量是难于获得的, 因此就计算量来说, 后者要比前者小很多.

3.3.1 三阶法简介

假定随机向量Y的分布为位置刻度族, 含有p维未知参数$\psi=(\theta,\lambda)$, θ为感兴趣的参数, λ为讨厌参数. 已知它的一组容量为n的随机样本$y=(y_1\le\cdots\le y_n)$ (前r个为完全数据, 后$n-r$个为截尾数据). 要得到原假设$H_0:\theta=\theta_0$为真条件下的尾概率$p(\theta_0)=\mathsf{P}(\theta>\theta_0)$的近似, 除了需要用到位置刻度模型的对数似然函数$l(\psi)$ (即似然函数的对数)外, 还需要用到上述辅助方向向量V. 根据Fraser and Reid's (1995), 可得

$$V=-\{z_{;y}(\psi,y)\}^{-1}z_{\psi}(\psi,y)|_{\psi=\widehat{\psi}}. \tag{3.14}$$

这里的$z(\psi,y)$是一个全模型枢轴量(可以任取), $\widehat{\psi}$是参数ψ的极大似然估计, y是观测数据向量. 对于位置刻度模型, $V=(1,e)$ (1是一个r维向量), e是一个残余向量:

$$e=\Big(\frac{y_1-\widehat{\mu}}{\widehat{\sigma}},\cdots,\frac{y_r-\widehat{\mu}}{\widehat{\sigma}}\Big)^{\tau}, \tag{3.15}$$

此处$(\widehat{\mu},\widehat{\sigma})$是参数$(\mu,\sigma)$的极大似然估计. 这样我们可以得到观测数据点附近的局部典则参数$\varphi(\psi)=(\varphi_1(\psi),\cdots,\varphi_p(\psi))^{\tau}$,

$$\varphi_i(\psi)=\sum_{j=1}^{r}l;\qquad y_j(\psi)V_{ij}=\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial l(\psi)}{\partial y_j}V_{ij}. \tag{3.16}$$

由对数似然函数$l(\psi)$和这个典则参数$\varphi(\psi)$, 即可得到$p(\theta_0)$近似为:

$$\begin{aligned} p(\theta_0) &= \Phi(R) + \Big(\frac{1}{R} - \frac{1}{Q}\Big)\Phi(R) && (3.17)\\ &= \Phi\Big(R - R^{-1}\ln\frac{R}{Q}\Big). && (3.18)\end{aligned}$$

这里R为θ的符号似然比方根检验统计量, Q为修改的形式Wald统计量, 它们分别是:

$$R(\theta) = \mathrm{sign}(\widehat{\theta} - \theta)[2\{l(\widehat{\psi}) - l(\widehat{\psi}_{\theta_0})\}]^{1/2}, \quad (3.19)$$

$$Q(\theta) = \mathrm{sign}(\widehat{\theta} - \theta)|\widehat{\chi} - \widehat{\chi}_\theta|\Big\{\frac{|\widehat{j}_{\varphi\varphi}|}{|j_{(\lambda\lambda)}(\widehat{\psi}_{\theta_0})|}\Big\}^{1/2}. \quad (3.20)$$

其中各个量的含义分别为:

θ为感兴趣的参数, λ为讨厌参数, $l(\psi)$为对数似然函数, $\widehat{\psi} = (\widehat{\theta}, \widehat{\lambda})$是$(\theta, \lambda)$的联合极大似然估计, $\widehat{\psi}_{\theta_0}$是给定$\theta = \theta_0$值下$\psi$的约束极大似然估计.

$\chi(\psi)$是$\theta(\psi)$在典则参数$\varphi(\psi)$下的一个近似, 它是$\varphi(\psi)$的各个分量的线性组合, 即:

$$\chi(\psi) = \theta_\psi(\widehat{\psi}_{\theta_0})\varphi_\psi^{-1}(\widehat{\psi}_{\theta_0})\varphi(\psi) \qquad (\theta_\psi(\psi) = \partial\theta(\psi)/\partial\psi). \quad (3.21)$$

ψ的Fisher阵$j_{\psi\psi}(\psi)$的行列式在典则参数$\varphi(\psi)$下的近似为:

$$\begin{aligned} |\widehat{j}_{\varphi\varphi}| &= |j_{\psi\psi}(\widehat{\psi}_{\theta_0}||\varphi_\psi(\widehat{\psi})|^{-2}, && (3.22)\\ |j_{(\lambda\lambda)}(\widehat{\psi}_{\theta_0})| &= |j_{\lambda\lambda}(\widehat{\psi}_{\theta_0})||\varphi_{\lambda'}(\widehat{\psi}_{\theta_0})|^{-2}. && (3.23)\end{aligned}$$

3.3.2 平均寿命的置信区间

取原假设为$H_0: \varphi = \varphi_0$ (φ_0为任意给定的正数), 则可以按照以下算法求其尾概率P$(\varphi > \varphi_0)$:

已知一组来自极值分布$F_Y(y) = 1 - \exp\{-\exp\{(y-\mu)/\sigma\}\}$的容量为$n$一个随机样本$y = (y_1, \cdots, y_n)$, 其中$y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_r$为$r$个观测值, 其他为截尾数据. 则参数$\zeta = (\mu, \sigma)$的对数极大似然函数为:

$$l(\zeta) = l(\zeta; y) = -r\ln\sigma + \sum_{i=1}^{r}\Big\{\frac{y_i - \mu}{\sigma} - \exp\Big\{\frac{y_i-\mu}{\sigma}\Big\} - (n-r)\exp\Big\{\frac{y_i-\mu}{\sigma}\Big\}\Big\}. \quad (3.24)$$

步骤一: 利用(3.24)的一阶偏导数$l_\mu(\zeta)$、$l_\sigma(\zeta)$就可以求得未知参数的极大似然估计$\widehat{\zeta}(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma})$ (令$l_\mu(\widehat{\zeta}) = 0$, $l_\sigma(\widehat{\zeta}) = 0$); 利用其二阶偏导数$l_{\mu\mu}(\zeta)$、$l_{\mu\sigma}(\zeta)$、$l_{\sigma\sigma}(\zeta)$则可以求出Fisher信息阵$j_{\zeta\zeta}(\zeta)$及观测信息阵$j_{\zeta\zeta}(\widehat{\zeta})$. 其中

$$j_{\zeta\zeta}(\zeta) = \begin{pmatrix} -l_{\mu\mu}(\zeta) & -l_{\mu\sigma}(\zeta)\\ -l_{\mu\sigma}(\zeta) & -l_{\sigma\sigma}(\zeta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{\mu\mu}(\zeta) & j_{\mu\sigma}(\zeta)\\ j_{\mu\sigma}(\zeta) & j_{\sigma\sigma}(\zeta)\end{pmatrix}.$$

步骤二: 利用Lagrangian方法求约束极大似然估计$\widehat{\zeta}_{\varphi_0}$. Lagrangian算式为:

$$H(\zeta)=l(\zeta)+\alpha(\varphi-\varphi_0)=l(\zeta)+\alpha(\mu+\ln(\Gamma(1+\sigma))-\varphi_0). \tag{3.25}$$

(3.25)的偏导数为:

$$\begin{cases}H_\mu(\zeta)=l_\mu(\zeta)+\alpha;\\ H_\sigma(\zeta)=l_\sigma(\zeta)+\alpha\Psi(1+\sigma);\\ H_\alpha(\zeta)=\mu+\ln(\Gamma(1+\sigma))-\varphi_0,\end{cases} \tag{3.26}$$

其中$\Psi(x)=\ln(\Gamma(x))'$. 解方程组$H_\mu(\zeta)=0$, $H_\sigma(\zeta)=0$, $H_\alpha(\zeta)=0$, 得ζ在原假设$H_0:\varphi=\varphi_0$成立时的约束极大似然估计$\widehat{\zeta}_{\varphi_0}$及满足条件的$\widehat{\alpha}$, 将它们带入极大似然函数, 可得到$l(\widehat{\zeta}_{\varphi_0})$. (3.25)的二阶偏导数为:

$$\begin{cases}H_{\mu\mu}(\zeta)=l_{\mu\mu}(\zeta);\\ H_{\mu\sigma}(\zeta)=l_{\mu\sigma}(\zeta);\\ H_{\sigma\sigma}(\zeta)=l_{\sigma\sigma}(\zeta)+\alpha\Psi'(1+\sigma)).\end{cases} \tag{3.27}$$

由此可得约束条件下的Fisher观测信息阵$\widehat{j}_{\zeta\zeta}(\widehat{\zeta}_{\psi_0})$:

$$\widehat{j}_{\zeta\zeta}(\widehat{\zeta}_{\varphi_0})=\begin{pmatrix}-l_{\mu\mu}(\widehat{\zeta}_{\varphi_0}) & -l_{\mu\sigma}(\widehat{\zeta}_{\varphi_0})\\ -l_{\mu\sigma}(\widehat{\zeta}_{\varphi_0}) & -(l_{\sigma\sigma}(\widehat{\zeta}_{\varphi_0})+\widehat{\alpha}\Psi'(1+\widehat{\sigma}))\end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

步骤三: 通过(3.19)求出R.

步骤四: $V=(1,e)$如(3.14)定义, 并通过(3.16)求出$\varphi(\zeta)$, 然后就可以通过(3.21)、(3.22)、(3.23)求出相应的量, 最后代入(3.20)可以求出Q.

步骤五: 利用(3.17)或(3.18)求出尾概率$p(\varphi_0)$.

§4. 不完全数据处理方法—QF算法

前面我们研究了完全样本情形下设备平均寿命置信下限的计算问题, 而在实际工程问题中, 不完全数据的情形是普遍存在的, 由于试验设备、试验费用、试验设计、试验环境以及人为因素等原因, 常常使得试验数据出现截尾情况. 为了在不完全数据情形下使用上面的方法, 需要先把截尾数据转化为完全样本数据, 我们下面介绍一种用于参数估计和数据转换的分位数填充算法, 简称QF算法(见[2]). QF算法的目的是将删失数据转化为虚拟的完全样本. 下面以右删失数据为例介绍QF算法.

设非负随机变量$X\sim F(x|\theta)$, 其中$\theta\in\Theta\subset R^p$, X的密度函数为$f(x|\theta)$. 设$T_1,\cdots,T_n$是一常数列, $x_1,\cdots,x_n$是X的独立同分布样本, 我们观测到的数据为$x_1\wedge T_1,\cdots,x_n\wedge T_n$, 即右删失数据. 令$\delta_i=I\{x_i\le T_i\}$, $t_i=x_i\wedge T_i$ $(i=1,\cdots,n)$, 记Δ_i为第i个设备的剩余寿命, 即$\Delta_i=(x_i-T_i)(1-\delta_i)$. 设$G(t|\theta)$是参数真值为$\theta$时, 到$t$时刻为止剩余寿命的一个度量. 在

以上记号下, QF算法的计算步骤如下. 首先给定参数初值θ_0, 当得到θ_{k-1}后按如下迭代步骤计算θ_k:

步骤一: 固定θ_{k-1}, 计算剩余寿命度量$\Delta_i^{(k)} = G^{(k)}(t_i|\theta_{k-1})(1-\delta_i)$, $i=1,\cdots,n$;

步骤二: 利用填充后的数据$t_i+\Delta_i^{(k)}$ $(j=1,\cdots,n)$, 对参数进行矩估计并记之为θ_k. 当$|\theta_k-\theta_{k-1}|<\epsilon$时, 停止迭代计算, 取$t_1+\Delta_1^{(k)},\cdots,t_n+\Delta_n^{(k)}$作为删失数据的虚拟完全样本.

关于样本点的虚拟值的选取, 可以考虑步骤一中的剩余寿命度量可采用条件剩余寿命分布的均值或条件剩余寿命分布的分位点, 本文采用剩余寿命分布的分位点作为剩余寿命的度量; 在步骤二中进行参数估计更新时, 可采用参数的极大似然估计方法或矩估计, 此处我们采用矩估计. 到t时刻为止的剩余寿命分布的分位点记做

$$G(t|\theta) = H^{-1}(p|t,\theta),$$

其中$H^{-1}(p|t,\theta)$表示到t时刻为止的剩余寿命分布的p分位点. p的选取与在时刻t处删失的数据个数有关, 如果在t时刻有b个删失数据, 则它们的剩余寿命分别取剩余寿命分布的$r/(b+1)$, $r=1,\cdots,b$分位点作为填充寿命. 关于QF算法的收敛性及相合性等理论性质的证明详见文[4].

§5. 模拟研究

按照上面的模拟步骤, 我们选取了多组参数, 做了大量的模拟计算. 在进行模拟计算时, 我们分别考虑了完全样本、定数和定时两种最常见的删失数据情形, 以便比较三种方法计算部件平均寿命的置信下限的精度. 模拟中所用参数都是根据工程实际选取的.

5.1 模拟条件

模拟中的置信度分别取$\gamma=0.7$、0.8、0.9, 模拟数为5000次.

1) 完全样本参数分别取(1.5,500)、(2, 500), 因此平均寿命真值分别为$\theta=451.37, 443.11$, 样本量分别取20、15、10、5;

2) 定数截尾参数取(1.5, 500), 样本量分别取(20, 3)、(20, 6)、(20, 9), 即20个产品中分别有3、6、9个删失, 因此删失比分别为15%、30%、45%;

3) 定时截尾参数分别取(2, 500), 得到试验数据分别为(20, 634)、(20, 549)、(20, 490), 表示有20个产品进行试验, 分别在634、549、490时刻截尾.

5.2 优良准则

在模拟条件、参数完全相同的情况下, 我们从三个方面衡量置信下限的优劣:

覆盖率 即模拟中计算出的部件平均寿命的置信下限小于真值的比率$\hat{\gamma}$. 覆盖率可以近似地看作实际置信水平, 它与置信水平γ越接近越好. 当$\hat{\gamma}<\gamma$时, 说明置信限偏冒进; $\hat{\gamma}>\gamma$时, 置信限偏保守.

偏　差　这里的γ是预先给定的置信水平. 如果模拟了M次, 得到了M个置信下限, 按照置信下限的定义, $\mathsf{P}(\theta \geq \theta_L) = \gamma$; 或写成$\mathsf{P}(\theta_L - \theta \leq 0) = \gamma$. 因此$\theta_L - \theta$的$\gamma$分位点与零的偏差越小该法越好, 即平均而言置信下限的估计精度高. 若$\widehat{0} < 0$说明置信限偏保守; $\widehat{0} > 0$说明置信限偏冒进.

标准差　置信下限的样本标准差. 它刻画置信下限相对于平均寿命真值的离散程度. 该量越小说明求出的置信限越稳定.

5.3　模拟结果

表1　参数为(1.5, 500)完全样本, 平均寿命为451.37

样本量	方法	$\gamma = 0.7$			$\gamma = 0.8$			$\gamma = 0.9$		
		覆盖率	偏差	标准差	覆盖率	偏差	标准差	覆盖率	偏差	标准差
20	1	0.7192	2.79	59.48	0.8130	3.22	62.30	0.9108	2.70	69.61
	2	0.7035	0.37	50.42	0.7980	0.31	49.13	0.8970	0.92	47.43
	3	0.6972	0.55	51.74	0.8015	0.32	50.01	0.9030	-0.39	47.98
15	1	0.7283	3.71	67.63	0.8217	3.65	71.29	0.9129	3.43	83.77
	2	0.7110	0.90	57.75	0.7921	0.84	58.86	0.8891	1.52	56.42
	3	0.6977	0.71	57.20	0.7923	0.77	55.51	0.8933	0.69	54.75
10	1	0.7364	7.89	87.18	0.8370	6.11	97.03	0.9205	7.99	120.56
	2	0.6949	2.98	73.26	0.7834	3.02	71.86	0.8809	3.43	68.04
	3	0.6950	1.03	70.81	0.7922	0.61	68.27	0.9090	-0.93	65.57
5	1	0.7601	14.22	155.80	0.8468	14.97	225.87	0.9289	20.02	370.74
	2	0.6509	10.12	98.31	0.7533	7.16	95.64	0.8536	8.91	92.12
	3	0.7112	-2.16	95.30	0.8164	2.65	93.87	0.9132	1.12	89.07

表2　参数为(2, 500)完全样本, 平均寿命为443.11

样本量	方法	$\gamma = 0.7$			$\gamma = 0.8$			$\gamma = 0.9$		
		覆盖率	偏差	标准差	覆盖率	偏差	标准差	覆盖率	偏差	标准差
20	1	0.7190	2.75	58.39	0.8125	3.10	61.71	0.9188	2.49	67.97
	2	0.7030	-0.17	49.42	0.7990	0.29	48.26	0.8990	0.96	46.88
	3	0.6990	0.52	50.36	0.8010	-0.57	49.22	0.9000	-0.37	47.66
15	1	0.7286	4.69	68.33	0.8240	3.81	73.38	0.9112	3.38	83.61
	2	0.7090	-1.40	58.98	0.7960	0.62	57.32	0.8900	1.49	55.41
	3	0.6980	0.69	57.36	0.7920	0.74	56.13	0.8940	0.65	54.62
10	1	0.7508	7.49	86.66	0.8368	6.03	96.95	0.9198	7.86	121.01
	2	0.6980	2.84	72.49	0.7890	2.90	70.03	0.8820	3.94	67.14
	3	0.6970	0.96	69.29	0.7960	0.52	67.27	0.9020	-0.81	64.70
5	1	0.7600	13.58	153.74	0.8454	14.42	222.05	0.9282	20.11	369.58
	2	0.6540	9.01	97.94	0.7510	7.09	94.98	0.8510	8.78	91.29
	3	0.7100	-1.57	96.28	0.8150	2.32	92.38	0.9130	2.04	86.98

表3　参数为(1.5, 500)定数截尾, 平均寿命为451.37

$(n,\ r)$	方法	$\gamma=0.7$			$\gamma=0.8$			$\gamma=0.9$		
		覆盖率	偏差	标准差	覆盖率	偏差	标准差	覆盖率	偏差	标准差
(20, 3)	1	0.7199	2.83	60.56	0.8144	3.27	63.12	0.9111	2.77	70.17
	2	0.7084	1.14	51.23	0.7903	1.75	50.32	0.8921	1.07	49.66
	3	0.6920	0.99	52.21	0.8087	1.38	51.25	0.9067	-0.93	48.12
(20, 6)	1	0.7270	3.98	63.63	0.8223	3.78	66.80	0.9135	2.94	72.21
	2	0.7097	1.55	56.09	0.7891	2.47	55.24	0.8897	1.99	52.68
	3	0.6903	1.31	53.90	0.8103	1.72	53.10	0.9108	-1.36	51.05
(20, 9)	1	0.7395	5.59	69.96	0.8299	4.86	73.23	0.9198	4.37	73.44
	2	0.7124	2.80	58.56	0.7875	2.82	57.85	0.8865	2.75	54.64
	3	0.6874	1.82	55.04	0.8136	2.61	55.51	0.9147	-2.43	53.56

注: $(n,\ r)$表示n个样本中有r个截尾数据.

表4　参数为(2, 500)定数截尾, 平均寿命为443.11

$(n,\ T)$	方法	$\gamma=0.7$			$\gamma=0.8$			$\gamma=0.9$		
		覆盖率	偏差	标准差	覆盖率	偏差	标准差	覆盖率	偏差	标准差
(20, 634)	1	0.7209	2.01	61.56	0.8194	2.52	65.45	0.9181	2.96	71.12
	2	0.7084	1.02	54.35	0.7904	1.16	52.71	0.8900	1.18	50.41
	3	0.6907	0.98	52.71	0.8077	1.27	51.85	0.9083	-0.99	49.97
(20, 549)	1	0.7307	3.43	65.71	0.8252	3.98	68.26	0.9198	3.55	73.38
	2	0.7105	1.98	57.01	0.7856	2.31	56.24	0.8858	2.03	53.89
	3	0.6895	1.62	53.76	0.8104	1.80	53.74	0.9102	-1.14	52.73
(20, 490)	1	0.7479	5.20	72.56	0.8364	4.11	70.58	0.9278	4.98	73.58
	2	0.7138	2.90	60.54	0.7825	2.86	59.43	0.8830	2.57	56.48
	3	0.6876	1.73	55.07	0.8124	1.99	57.42	0.9136	-1.38	54.62

注: $(n,\ T)$中, n为样本量, T表示定时截尾时间, (634, 549, 490)分别是参数为(2, 500)的威布尔分布的0.8、0.7、0.6分位点.

5.4　模拟小结

从模拟结果可以得到如下结论:

(1) 从效果来看: 在中等样本($10\le n\le 20$)情况下, 三阶法的近似程度最高, 覆盖率误差不超过1%; 即使是在样本量特别小($n=5$)的情况下, 三阶法的效果仍然比较稳定, 而且它可以用来直接处理定数截尾数据; WCF方法在中等样本情形下近似程度也很高; 它还可以用于系统寿命的综合评估; 广义枢轴量方法偏冒进, 但在中等样本情形下偏差不是太大;

(2) 从计算复杂度来看: 三阶法计算比较复杂, 最好能设计相应的软件包, 否则不利于工程人员使用; WCF虽然公式比较繁琐, 但是计算量并不大; 广义枢轴量计算非常简单, 因而在对精度要求不是很高的时候是可用的.

在工程实际中, 可以根据实际要求选用不同的方法.

参 考 文 献

[1] Weeranhandi, S., *Exact Statistical Methods for Data Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] 姜宁宁, 矩不变准则及其在Weibull不完全数据处理中的应用, 航空可靠性工程技术, 中国航空学会可靠性专业委员会第十届学术年会论文集, 王自力主编, 国防工业出版社, 北京, 2006, 244–253.

[3] Fraser, D.A.S. and Reid, N., Ancillaries and third order significance, *Uilitias Mathematica*, **47**(1995), 33–57.

[4] 姜宁宁, Weibull分布等分位数数据填充算法及其应用, 中国科学院数学与系统科学研究院研究报告, 2006.

On the Confidence Limits for the Mean of Weibull Distributions

LI XUEJING

(*Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080*)

The mean of products is an important performance index in reliability analysis. It is difficult to gain the exact confidence limits for the mean of Weibull distribution with two parameters, because there is no evident pivotal quantity for the mean. In this paper, we get the approximate confidence limits for the mean of Weibull distribution with two parameters by generalized pivotal quantity, WCF approximation and third-order procedure. Numerical examples are presented to show the accuracy of the methods when the sample is moderate and small.

Keywords: The confidence limits for the mean, generalized pivotal quantity, WCF approximation, third-order procedure.

AMS Subject Classification: 62F25.