应用概率统计 第二十七卷
第四期 2011年8月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.27 No.4 Aug. 2011

Copula理论在信用风险研究中的应用 *

梁歌春 任学敏

(同济大学数学系风险管理研究所, 上海, 200092)

摘 要

信用风险研究是近些年来金融数学中的一个崭新的研究方向. 本文主要研究了组合信用风险中的常用方法: 违约相关性的Copula方法. 本文建立了Copula方法与违约相关性研究中的结构化方法和约化方法的联系. 此外对于单个公司的生存概率的研究, 本文给出了不同于Lando (1998)的求解和证明方法, 而这种方法不需要在现在就知道将来的信息.

关键词: 信用风险, 违约相关性, 生存概率, Copula.

学科分类号: O211.5.

§1. 引 言

信用风险研究是近些年来金融数学中的一个崭新的研究方向, 对信用风险的研究不仅具有理论意义, 更加能够推动信用衍生产品市场的发展. 组合信用风险(Portfolio's Credit Risk)是当前信用风险研究的热点和前沿, 其问题的核心是违约的相关性. 而这本质上是如何合理地给定随机变量(公司违约)之间的相关性结构, 进而求出它们的联合分布函数的问题. 违约的相关性通常可以划分为宏观和微观两种(Furfine, 1999): 前者主要考虑公司在相同的宏观经济背景下(比如同一地区或行业), 受到利率、汇率、能源价格等共同因素的影响; 后者主要是由公司之间的金融联系引起, 比如债务关系、供求关系等, 也被称为传染性. 目前研究违约相关性主要有三种方法: 结构化方法(Structural Models)、约化方法(Reduced Form Models)和Copula方法.

结构化方法是以期权定价理论为基础, 假设公司的资产运行服从几何布朗运动, 通常要事先给定公司的违约阈值, 一旦公司资产价值跌落碰到违约阈值则发生违约. 可以参见Merton (1974), Black和Cox (1976), Longstaff和Schwartz (1995), Briys和de Varenne (1997). 约化方法则把整个经济环境进行约化, 不考虑违约的具体原因, 直接用Poisson过程的第一次跳来刻画公司的违约, 而违约的强度就是Poisson过程的强度参数. 可以参见Jarrow和Turnbull (1995), Jarrow等(1997), Lando (1998). 这两种方法已经成为了信用风险研究的经典方法. Copula方法在金融风险管理中的应用是最近几年才被发现的. Embrechts等(1999)首先把这一方法应用到金融领域. Li (2000)第一次把Copula方法应用到

*国家重点基础研究发展计划(973计划) (2007CB814903)、国家自然科学基金(10471106)资助.
本文2007年9月27日收到, 2008年6月6日收到修改稿.

信用风险的违约相关性研究当中. Schonbucher和Schubert (2001)则在约化方法框架下利用Copula方法讨论了违约的相关性. Laurent和Gregory (2002)利用因子的思想首先引入了因子Copula模型, 并将其应用到一揽子CDS和合成化CDO的定价当中. 关于Copula在信用衍生产品定价中的应用更多的可以参见Andersen等(2003).

本文主要考虑Copula方法在违约相关性研究中的应用. Copula的主要思想是一个联合分布函数可以由其边际分布函数和一个Copula函数来表示, 因此Copula从本质上揭示了随机变量(公司违约)之间的相关性. 首先我们给出Copula函数的定义:

定义 1.1 函数$C:[0,1]^N\mapsto[0,1]$, 如果满足以下性质则称为Copula函数:

(1) 有界性(Grounded) 对$\forall\,\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_N)\in[0,1]^N$, 如果有某个$u_i=0$, 则

$$C(\mathbf{u})=C(u_1,\ldots,u_{i-1},0,u_{i+1},\ldots,u_N)=0. \tag{1.1}$$

如果除了某个u_k, 其它均为1, 则

$$C(\mathbf{u})=C(1,\ldots,1,u_k,1,\ldots,1)=u_k. \tag{1.2}$$

(2) 单调性(N-increasing) 对$\forall\,\mathbf{a},\mathbf{b}\in[0,1]^N$, 其中$\mathbf{a}\le\mathbf{b}$, 若定义$R_a^b=(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_N,b_N]$, 则

$$V_C(R_a^b)\ge 0, \tag{1.3}$$

其中

$$\begin{aligned}
&V_C(R_a^b)=\triangle^N_{(a_N,b_N)}\triangle^{N-1}_{(a_{N-1},b_{N-1})}\cdots\triangle^1_{(a_1,b_1)}C(x_1,\ldots,x_N),\\
&\triangle^i_{(a_i,b_i)}=C(x_1,\ldots,x_{i-1},b_i,x_{i+1},\ldots,x_N)-C(x_1,\ldots,x_{i-1},a_i,x_{i+1},\ldots,x_N).
\end{aligned}$$

由定义容易证明Copula函数有如下性质, 我们以$N=2$为例:

性质 1.1 对$0\le x_1\le x_2\le 1$, $C(x_2,y)-C(x_1,y)$关于y是递增的; 同理对$0\le y_1\le y_2\le 1$, $C(x,y_2)-C(x,y_1)$关于x是递增的.

性质 1.2 Copula函数$C(x,y)$是Lipschitiz连续的.

性质 1.3 Copula函数$C(x,y)$关于x和y分别是递增的.

性质 1.4 (Frechet界) 任意Copula函数可以被两个Copula函数所控制:

$$W(x,y):=\max(x+y-1,0)\le C(x,y)\le\min(x,y)=:M(x,y). \tag{1.4}$$

Copula最早由Sklar在1959年引入, Sklar证明了任意一个N元联合分布函数都可以由其N个边际分布函数和一个Copula函数来表示, 其是整个Copula理论的奠基性的定理.

定理 1.1 (Sklar, 1959)[1] 令F是具有边际分布$F_1,F_2,\ldots,F_N$的联合分布函数, 则存在一个Copula函数C满足

$$F(x_1,\ldots,x_N)=C(F_1(x_1),\ldots,F_1(x_N)). \tag{1.5}$$

进一步若$F_1,F_2,\ldots,F_N$是连续的, 则C是唯一的. 否则C由值域$\mathrm{ran}F_1\times\cdots\times\mathrm{ran}F_N$唯一决定.

反之若C是Copula函数, $F_1,F_2,\ldots,F_N$为分布函数, 则由(1.4)定义的F就是$F_1,F_2,\ldots,F_N$的联合分布函数.

从Sklar定理我们可以看出Copula函数本身也是一个分布函数: N个$[0,1]$上均匀分布随机变量的联合分布函数. 关于Copula函数的具体例子, 主要可以分为两类: 椭球类Copula和Archimedean Copula, 我们将在后文中介绍椭球类Copula中最常见的Gaussian Copula.

对于Copula方法在违约相关性研究中的应用, 正如前文所述, 已经有了很多的工作. 本文的目的是着重分析违约相关性研究中的Copula方法与结构化方法和约化方法的内在联系. 具体地, 我们考虑了Copula方法和约化方法的关系: 我们建立了Li (2000)中的Copula函数与Schonbucher和Schubert (2001)中的Copula函数的联系, 即在宏观经济信息已知的条件下, 这两种方法是等价的. 我们还考虑了Copula方法和结构化方法的关系: 应用结构化方法研究违约相关性主要的是Vasicek (1987, 1991)的因子模型, 我们证明了Vasicek的因子模型实际上就是Copula理论当中的Gaussian因子Copula.

应用Copula方法通常要事先求得单个公司的生存概率或是违约概率, 在约化方法框架下经典的是Lando (1998), 但Lando为了证明上的需要, 需要先基于未来的域流, 即在现在就要知道将来的信息. 鉴于此, 对于单个公司的生存概率, 我们重新给出了不同于Lando的求解和证明方法, 由于不需要在现在知道将来的信息, 因此这种方法更加合理.

全文结构安排如下: 在第二节我们首先给出了问题的基本假定; 我们在第三节讨论了在约化方法框架下单个公司生存概率的求解和证明方法; 在第四节我们研究了Copula方法与结构化方法和约化方法的内在联系; 第五节是全文的总结.

§2. 问题的基本假定

对于给定的完备概率空间$(\Omega,\mathcal{G},\mathrm{Q})$, 其中Q是风险中性下的概率测度, 我们引入代表宏观经济的域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$, 其由利率、汇率、能源价格等宏观经济变量$X_t$生成, 即$\mathcal{F}_t=\sigma(X_s,s\le t)$, $\forall t\ge0$, 其中$X_t=(X_t^1,\ldots,X_t^d)$是d维随机过程. 以$(\Omega,\mathcal{G})$上的可测随机变量$\tau_i\,(i=1,\ldots,N)$表示公司i的违约时刻, 由其生成的域流记为$\{\mathcal{H}_t^i\}_{t\ge0}$, 即$\mathcal{H}_t^i=\sigma(\{\tau_i\le s\},s\le t)$, $\forall t\ge0$. 记

$$\mathcal{G}_t^i=\mathcal{F}_t\vee\mathcal{H}_t^i,\qquad \mathcal{G}_t=\mathcal{F}_t\vee\mathcal{H}_t^1\vee\cdots\vee\mathcal{H}_t^N.$$

[1] 定理的证明参见Nelsen (1999).

对于Copula函数的具体选择, 正如在引言中所述, 主要有两类. 我们这里考虑在实际当中常用的Gaussian Copula[2]. 我们首先给出Gaussian Copula的定义:

例 1 (Gaussian Copula)

$$\begin{aligned} C_{\Sigma}^{Ga}(u_1,\ldots,u_N) &= \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1),\ldots,\Phi^{-1}(u_N)) \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)}\cdots\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_N)} \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}(\sqrt{2\pi})^N} e^{-\mathbf{x}\Sigma^{-1}\mathbf{x}^T/2}\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \ldots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \ldots & \rho_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_N)$, Φ是标准正态分布的累计分布函数, Φ_{Σ}是协方差矩阵为Σ的多维正态分布的累计分布函数.

利用Copula方法研究违约的相关性, 主要分为两步: 第一步对个体公司的违约建立模型; 第二步引进违约的相关性, 即建立Copula模型. 我们因此要解决的问题是

$$G^i(t)=\mathsf{Q}(\tau_i>t), \tag{2.2}$$

$$G(t_1,\ldots,t_N)=\mathsf{Q}(\tau_1>t_1,\ldots,\tau_N>t_N). \tag{2.3}$$

更一般地

$$G^i(t,T)=\mathsf{Q}(\tau_i\geq T|\mathcal{G}_t^i), \tag{2.4}$$

$$G^i(\mathbf{t},T)=\mathsf{Q}(\tau_i\geq T|\mathcal{G}_t), \tag{2.5}$$

其中G代表生存概率, 而$\mathbf{t}=(t,\ldots,t)$.

§3. 单个公司的生存概率

首先我们不考虑违约的相关性, 公司i的违约只受其自身和宏观经济的影响, 即在域流$\{\mathcal{G}_t^i\}_{t\geq 0}$下, 相应的域流空间为$(\Omega,\mathcal{G},\{\mathcal{G}_t^i\}_{t\geq0},\mathsf{Q})$. 我们的目标是在$\{\mathcal{G}_t^i\}_{t\geq0}$条件下, 求出$i$公司的生存概率$G^i(t,T)=\mathsf{Q}(\tau_i\geq T|\mathcal{G}_t^i)$.

用约化方法求公司的生存概率经典的是Lando (1998), 但Lando为了证明上的需要, 需要先基于未来的信息$\mathcal{F}_\infty\vee\mathcal{H}_t^i$来求生存概率, 即求生存概率

$$\mathsf{Q}(\tau_i>T|\mathcal{F}_t\vee\mathcal{H}_t^i) \tag{3.1}$$

[2]由于Gaussian Copula不能很好的刻画信用风险这类极值事件的相关性(其尾部相关系数是渐进独立的), 人们有时也采用比如t-Copula加以修正.

需要先求

$$\mathsf{Q}(\tau_i > T|\mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{H}_t^i). \tag{3.2}$$

换句话说, 在t时刻我们就必须先知道未来的宏观经济信息, 也就是现在就要知道将来的情况, 这与现实显然不符合[3]. 本质上, Lando之所以要把信息扩大到$\mathcal{F}_\infty$是由于他的求解是基于Cox过程的框架下, 而Cox过程的定义是基于信息$\mathcal{F}_\infty$的. 但实际上求解生存概率并不需要用到Cox过程, Cox过程只是在违约时刻的模拟中用到. 鉴于此, 本文重新给出生存概率的求解和证明方法, 由于不需要在现在知道将来的信息, 因此这种方法更加合理. 首先我们给出公司违约强度的定义:

定义 3.1 给定域流空间$(\Omega,\mathcal{G},\{\mathcal{G}_t^i\}_{t\geq 0},\mathsf{Q})$以及子域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, 我们记公司$i$在信息$\mathcal{F}_t$下, 现在的生存概率为$G_t^i$, 违约概率为$F_t^i$, 即

$$G_t^i = \mathsf{Q}(\tau_i > t|\mathcal{F}_t); \qquad F_t^i = \mathsf{Q}(\tau_i \leq t|\mathcal{F}_t). \tag{3.3}$$

在域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$下, 易知$G_t^i$是上鞅, F_t^i是下鞅. 我们进一步定义公司i的风险过程为

$$\Lambda_t = -\log G_t^i = -\log(1-F_t^i), \qquad \forall\, t\geq 0. \tag{3.4}$$

如果Λ_t可以表示为$\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s \mathrm{d}s$, 其中$\lambda_s$满足一定的条件: 关于$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$循序可测, 且平方可积, 则称$\{\lambda_t\}_{t\geq 0}$是公司$i$相应的违约强度过程.

我们首先比较违约强度的定义3.1与Lando中违约强度定义的不同: 在定义3.1中我们要事先知道在信息$\mathcal{F}_t$下, 公司现在的生存概率或是违约概率, 然后用其来定义违约强度; 而在Lando的框架下要事先知道违约强度λ_t, 然后假定公司的违约要服从相应的Cox过程. 假定公司的违约服从Cox过程的好处是我们可以通过模拟Cox过程的第一次跳来模拟公司的违约时刻. 但是对于计算公司的生存概率这是不需要的. 事实上我们可以在定义3.1的框架下求公司的生存概率, 它比在Cox过程框架下求解的好处是我们不需要在现在就知道将来的信息. 为了求解生存概率我们首先给出一个引理, 本质上这是条件概率公式的一个推广.

引理 3.1 对于$\mathcal{G}_\infty^i$可测的随机变量Y, 以及$\mathcal{H}_t^i$中的事件$C=\{\tau_i > t\}$,

$$\mathsf{E}[1_C Y|\mathcal{G}_t^i] = 1_C \mathsf{E}[Y|\mathcal{G}_t^i] = 1_C \frac{\mathsf{E}[1_C Y|\mathcal{F}_t]}{\mathsf{Q}(C|\mathcal{F}_t)}, \tag{3.5}$$

其中$\mathcal{G}_\infty^i = \sigma(\mathcal{G}_t^i, t\geq 0)$.

证明: 我们只需证明

$$\mathsf{E}[1_C Y \mathsf{Q}(C|\mathcal{F}_t)|\mathcal{G}_t^i] = 1_C \mathsf{E}[1_C Y|\mathcal{F}_t]. \tag{3.6}$$

[3] 参见Schonbucher和Schubert (2001).

首先显然$\mathit{1}_C\mathsf{E}[\mathit{1}_C Y|\mathcal{F}_t]$关于$\mathcal{G}_t^i$可测; 其次构造集类$\mathcal{M}_t^i$如下:

$$\mathcal{M}_t^i=\{A\in\mathcal{G}_t^i|\text{存在 } B\in\mathcal{F}_t,\ \text{使得 } A\cap C=B\cap C\},$$

易证$\mathcal{M}_t^i=\mathcal{G}_t^i$. 因此对于$\forall\,A\in\mathcal{G}_t^i$我们有

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[\mathit{1}_A\mathit{1}_C\mathsf{E}[\mathit{1}_C Y|\mathcal{F}_t]] &= \mathsf{E}[\mathit{1}_B\mathit{1}_C\mathsf{E}[\mathit{1}_C Y|\mathcal{F}_t]]\\
&= \mathsf{E}[\mathsf{E}[\mathit{1}_B\mathit{1}_C\mathsf{E}[\mathit{1}_C Y|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_t]]\\
&= \mathsf{E}[\mathit{1}_B\mathsf{E}[\mathit{1}_C Y|\mathcal{F}_t]\mathsf{Q}(C|\mathcal{F}_t)]\\
&= \mathsf{E}[\mathsf{E}[\mathit{1}_B\mathit{1}_C Y\mathsf{Q}(C|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_t]]\\
&= \mathsf{E}[\mathit{1}_B\mathit{1}_C Y\mathsf{Q}(C|\mathcal{F}_t)]\\
&= \mathsf{E}[\mathit{1}_A\mathit{1}_C Y\mathsf{Q}(C|\mathcal{F}_t)].
\end{aligned}$$

因此$\mathit{1}_C\mathsf{E}[\mathit{1}_C Y|\mathcal{F}_t]$是$\mathit{1}_C Y\mathsf{Q}(C|\mathcal{F}_t)$关于$\mathcal{G}_t^i$的条件数学期望. □

定理 3.1 公司i的生存概率为

$$G^i(t,T)=\mathsf{Q}(\tau_i>T|\mathcal{G}_t^i)=\mathit{1}_{\{\tau_i>t\}}\mathsf{E}\big[e^{-\int_t^T\lambda_s\mathrm{d}s}|\mathcal{F}_t\big]. \tag{3.7}$$

证明: 我们取$C=\{\tau_i>t\}$, $Y=\mathit{1}_{\{\tau_i>T\}}$, 则由引理3.1

$$\begin{aligned}
\mathsf{Q}(\tau_i>T|\mathcal{G}_t^i) &= \mathsf{E}[\mathit{1}_{\{\tau_i>t\}}\mathit{1}_{\{\tau_i>T\}}|\mathcal{G}_t^i]\\
&= \mathit{1}_{\{\tau_i>t\}}\frac{\mathsf{E}[\mathit{1}_{\{\tau_i>t\}}\mathit{1}_{\{\tau_i>T\}}|\mathcal{F}_t]}{\mathsf{Q}(\tau_i>t|\mathcal{F}_t)}\\
&= \mathit{1}_{\{\tau_i>t\}}\frac{\mathsf{E}[\mathsf{Q}(\tau_i>T|\mathcal{F}_T)|\mathcal{F}_t]}{\mathsf{Q}(\tau_i>t|\mathcal{F}_t)}\\
&= \mathit{1}_{\{\tau_i>t\}}\frac{\mathsf{E}(e^{-\Lambda_T}|\mathcal{F}_t)}{e^{-\Lambda_t}}\\
&= \mathit{1}_{\{\tau_i>t\}}\mathsf{E}\big(e^{-\int_t^T\lambda_s\mathrm{d}s}|\mathcal{F}_t\big).
\end{aligned}$$

其在倒数第二个等号我们用到了定义3.1中的(3.3)式和(3.4)式. □

注记 1 如果考虑初始时刻即$t=0$, 且违约不受宏观经济的影响, 即违约强度λ_t为常数$\lambda_t\equiv\lambda$, 则

$$G^i(t)=G^i(0,T)=\mathsf{Q}(\tau_i>T)=e^{-\lambda T}. \tag{3.8}$$

§4. 违约相关性的Copula方法

4.1 Copula方法与约化方法

公司违约的相关性主要是通过违约强度的相关性建立起来. 具体地, 是通过宏观经济域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq0}$来建立联系的. 正如在引言中所述, 利用Copula方法研究违约相关性最早的是

Li (2000), 而Schonbucher和Schubert (2001)则在约化方法框架下, 利用Copula讨论了违约相关性. 在这一节我们将建立他们模型之间的联系.

Li在2000年首先利用Copula方法研究了违约的相关性问题. 在Li的模型中我们要事先求得每个公司的边际生存概率$G^i(t)$, 而一旦求得边际生存概率, 由Sklar定理就可以求出联合生存概率

$$\begin{aligned} G(t_1,\ldots,t_N) &= \mathsf{Q}(\tau_1>t_1,\ldots,\tau_N>t_N) \\ &= C^{\mathrm{Li}}(G^1(t_1),\ldots,G^N(t_N)), \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中C^{Li}代表Li的模型中的Copula函数.

Schonbucher和Schubert通过Cox过程来刻画公司的违约, 因此公司i的违约时刻可以由下式来模拟

$$\tau_i=\inf\Big\{t\ge 0:\Lambda_t=\int_0^t\lambda(X_s)\mathrm{d}s\ge E^i\Big\}, \tag{4.2}$$

其中E^i是独立于$\mathcal{F}_\infty$的单位指数随机变量. 他们没有先求得每个公司的边际生存概率, 而是通过引入在违约时刻模拟中用到的单位指数随机变量E^i $(i=1,\ldots,N)$的相关性(Copula函数C^{Sh})来刻画公司违约的相关性, 即

$$\mathsf{Q}(E^1>u_1,\ldots,E^N>u_N)=C^{\mathrm{Sh}}(e^{-u_1},\ldots,e^{-u_N}). \tag{4.3}$$

对应于定理3.1, 在$\mathcal{G}_t$条件下(考虑违约的相关性), 公司i的生存概率为

$$\begin{aligned} G^i(\mathbf{t},T) &= \mathsf{Q}(\tau_i>T,\tau_{-i}>t|\mathcal{G}_t) \\ &= 1_{\{\tau>\mathbf{t}\}}\mathsf{E}\Big[\frac{C^{\mathrm{Sh}}(e^{-\int_0^t\lambda_s^{-i}\mathrm{d}s},e^{-\int_0^T\lambda_s^i\mathrm{d}s})}{C^{\mathrm{Sh}}(e^{-\int_0^t\lambda_{\mathbf{s}}\mathrm{d}s})}\Big|\mathcal{F}_t\Big], \end{aligned} \tag{4.4}$$

其中C^{Sh}代表Schonbucher和Schubert (2001)模型中的Copula函数, 而

$$\begin{aligned} &\lambda_s^{-i}=(\lambda_s^1,\ldots,\lambda_s^{i-1},\lambda_s^{i+1},\ldots,\lambda_s^N), \\ &\tau_{-i}=(\tau_1,\ldots,\tau_{i-1},\tau_{i+1},\ldots,\tau_N), \\ &\lambda_{\mathbf{s}}=(\lambda_s^1,\ldots,\lambda_s^N), \qquad \tau=(\tau_1,\ldots,\tau_N). \end{aligned}$$

Li (2000)的模型是通过Copula函数来连接生存概率, 而Schonbucher和Schubert (2001)是通过Copula函数来连接单位指数随机变量E^i的分布, 虽然两种方法看似不同, 但他们模型中的Copula函数实际上是有联系的. 下面我们通过定理4.1来建立Li(2000)和Schonbucher和Schubert (2001)模型中的Copula函数的关系.

定理 4.1　Li (2000)模型中的Copula函数C^{Li}和Schonbucher和Schubert (2001)模型中的Copula函数C^{Sh}有如下关系:

$$C^{\mathrm{Li}}(G^1(t_1),\ldots,G^N(t_N))=\mathsf{E}\big[C^{\mathrm{Sh}}\big(e^{-\int_0^{t_1}\lambda_s^1\mathrm{d}s},\ldots,e^{-\int_0^{t_N}\lambda_s^N\mathrm{d}s}\big)\big]. \tag{4.5}$$

证明: 首先我们作变换$U^i = e^{-E^i}$ $(i=1,\ldots,N)$, 则U^i是均匀分布的随机变量, 它们的Copula函数为C^{Sh},

$$\mathsf{Q}(U^1 < u_1, \ldots, U^N < u_N) = C^{\mathrm{Sh}}(u_1, \ldots, u_N). \tag{4.6}$$

注意到U_i $(i=1,\ldots,N)$独立于$\mathcal{F}_\infty$

$$\begin{aligned} C^{\mathrm{Li}}(G^1(t_1),\ldots,G^N(t_N)) &= \mathsf{Q}(\tau_1 > t_1, \ldots, \tau_N > t_N) \\ &= \mathsf{Q}\big(U_1 < e^{-\int_0^{t_1}\lambda_s^1 \mathrm{d}s}, \ldots, U_N < e^{-\int_0^{t_N}\lambda_s^N \mathrm{d}s}\big) \\ &= \mathsf{E}\big(\mathsf{Q}\big(U_1 < e^{-\int_0^{t_1}\lambda_s^1 \mathrm{d}s}, \ldots, U_N < e^{-\int_0^{t_N}\lambda_s^N \mathrm{d}s}|\mathcal{F}_\infty\big)\big) \\ &= \mathsf{E}\big(C^{\mathrm{Sh}}\big(e^{-\int_0^{t_1}\lambda_s^1 \mathrm{d}s}, \ldots, e^{-\int_0^{t_N}\lambda_s^N \mathrm{d}s}\big)\big). \qquad \square \end{aligned}$$

注记 2 Schonbucher和Schubert (2001)模型中的违约强度λ_t是没有考虑违约相关性下的违约强度, 即只是在信息$\mathcal{G}_t^i$下考虑的, 因此也称为伪违约强度(Pseudo Default Intensity). 考虑了违约相关性的违约强度我们记为h_t, 当我们利用Copula方法求出联合违约概率时, 其可以由违约强度的定义3.1反求出来.

对于给定的宏观经济域流$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, h_t^i, λ_t^i $(i=1,\ldots,N)$都是确定性的函数, 我们记为$h_t^i = h^i(t)$, $\lambda_t^i = \lambda^i(t)$, 则

$$\begin{aligned} h^i(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathsf{Q}(T < \tau_i < T + \Delta t | \tau > \mathbf{t})}{\Delta t}\Big|_{T=t} \\ &= -\frac{1}{G(\mathbf{t})} \frac{\partial G(t,\ldots,T,\ldots,t)}{\partial t_i}\Big|_{T=t} \\ &= \frac{1}{C\big(e^{-\int_0^t \lambda(\mathbf{s})\mathrm{d}s}\big)} \frac{\partial}{\partial t_i} C\big(e^{-\int_0^t \lambda(\mathbf{s})\mathrm{d}s}\big) e^{-\int_o^t \lambda^i(s)\mathrm{d}s} \lambda^i(t). \end{aligned}$$

将$h^i(t), \lambda^i(t)$重新用h_t^i, λ_t^i带回, 我们便得到在信息$\mathcal{G}_t$下, 考虑了违约相关性的违约强度

$$h_t^i = \lambda_t^i e^{-\Lambda_t^i} \frac{\partial}{\partial t_i} \log C(e^{-\mathbf{\Lambda_t}}), \tag{4.7}$$

其中$\mathbf{\Lambda_t} = (\Lambda_t^1, \ldots, \Lambda_t^N)$是$N$个公司的风险过程. 如果$N=1$, 即没有违约的相关性, 易见$h_t^i = \lambda_t^i$, 即这时两种违约强度是相同的.

4.2 Copula方法与结构化方法

应用结构化方法研究违约相关性经典的是Vasicek (1987, 1991)的因子模型. 因子模型假设随机变量的相关性由一个或多个共有因子来建立. 在我们的问题中, 影响每个公司违约的来源有两部分: 自有因子(Idiosyncratic Factor)和共有因子(Common Factor), 而这些因子都是相互独立的. 应用因子Copula模型我们可以大大降低问题的维数, 从而简化联合生存概率的计算, 而且还可以得到问题的半解析解(Semi-explicit Expression). 在这一节我们将证明结构化方法中被广泛应用的Vasicek模型就是Gaussian因子Copula.

例 2 (Gaussian因子Copula)

对于例1中的Gaussian Copula的累积分布函数Φ_Σ, 其对应着标准正态分布随机变量$X_1,\ldots,X_N$. 它们的协方差矩阵为Σ. 我们假设X_i可以分解为

$$X_i=\rho_iV+\sqrt{1-\rho_i^2}V_i, \tag{4.8}$$

其中V_i,V是独立的标准正态分布随机变量, V是它们的共有因子. 则我们称在这种分解下的Gaussian Copula为Gaussian因子Copula

$$C(u_1,\ldots,u_N)=\int\prod_{i=1}^N\Phi\Big(\frac{\Phi^{-1}(u_i)-\rho_ix}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\Big)\phi(x)\mathrm{d}x. \tag{4.9}$$

在信用风险研究中, Copula的方法是用Copula函数来连接N个公司的边际生存概率, 而结构化方法是通常事件假定违约边界, 一旦公司的资产价值跌落碰到违约边界, 则发生违约. 两种方法看似不同, 但实际上在结构化方法中被广泛应用的Vasicek模型就是Gaussian因子Copula, 尽管Vasicek当初在建立因子模型时, Copula的思想还没有被引入到信用风险研究当中. 这本质上是因为两者都用到了正态分布随机变量的分解. 针对Vasicek模型和Gaussian因子Copula的关系, 我们给出了以下结论:

定理 4.2 在分解(4.8)式下, Vasicek的因子模型是Gaussian因子Copula.

证明: 在结构化方法的框架下, N个公司的资产运行均服从几何布朗运动

$$\mathrm{d}V_t^i=V_t^i(r\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W_t^i)\qquad(i=1,\ldots,N),$$

且

$$\mathsf{E}(\mathrm{d}E_t^i\mathrm{d}W_t^j)=\rho_i\rho_j\mathrm{d}t,$$

其中$\rho_i\rho_j$是资产V_i,V_j的相关系数, 则

$$V_t^i=V_0^ie^{(r-\sigma_i^2/2)t+\sigma_i\sqrt{t}X_t^i}.$$

这里$X_t^i=W_t^i/\sqrt{t}$是标准正态分布随机变量. 若用D^i表示公司i的负债价值, 则i公司的违约概率为

$$F^i(t)=\mathsf{Q}(V_t^i<D^i)=\mathsf{Q}(X_t^i<(-d^i))=\Phi(-d^i), \tag{4.10}$$

其中

$$d^i=\frac{\log V_0^i/D^i-(r-\sigma_i^2/2)t}{\sigma_i\sqrt{t}}.$$

如果同Gaussian因子Copula一样, 我们对X_t^i也作(4.8)式的分解

$$X_t^i=\rho_iV+\sqrt{1-\rho_i^2}V_i. \tag{4.11}$$

在这种分解下, N个公司的联合违约概率为

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Q}(V_t^1 < D^1, \ldots, V_t^N < D^N) &= \mathsf{Q}(X_t^1 < (-d^1), \ldots, X_t^N < (-d^N)) \\
&= \mathsf{Q}\Big(V_1 < \frac{-d^1 - \rho_1 V}{\sqrt{1-\rho_1^2}}, \ldots, V_N < \frac{-d^N - \rho_N V}{\sqrt{1-\rho_N^2}}\Big) \\
&= \mathsf{E}\Big[\mathsf{Q}\Big(V_1 < \frac{-d^1 - \rho_1 V}{\sqrt{1-\rho_1^2}}, \ldots, V_N < \frac{-d^N - \rho_N V}{\sqrt{1-\rho_N^2}}\Big| V\Big)\Big] \\
&= \mathsf{E}\Big[\prod_{i=1}^N \mathsf{Q}\Big(V_i < \frac{-d^i - \rho_i V}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\Big| V\Big)\Big] \\
&= \mathsf{E}\Big[\prod_{i=1}^N \Phi\Big(\frac{-d^i - \rho_i V}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\Big)\Big] \\
&= \int \prod_{i=1}^N \Phi\Big(\frac{-d^i - \rho_i x}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\Big)\phi(x)\mathrm{d}x. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

注意到(4.10)式, 将$-d^i = \Phi^{-1}(F^i(t))$代入上式, 则N个公司的联合违约概率为

$$
\mathsf{Q}(V_t^1 < D^1, \ldots, V_t^N < D^N) = \int \prod_{i=1}^N \Phi\Big(\frac{\Phi^{-1}(F^i(t)) - \rho_i x}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\Big)\phi(x)\mathrm{d}x. \qquad (4.13)
$$

由Sklar定理, 我们知道其对应的就是Gaussian因子Copula (4.9). □

§5. 结　　论

本文主要研究了组合信用风险中的常用方法: 违约相关性的Copula方法. 我们建立了Copula方法与违约相关性研究中的结构化方法和约化方法的联系, 从而能够帮助我们更深刻地理解信用风险领域的各种研究方法以及它们之间的内在联系. 具体地, 我们考虑了Copula方法和约化方法的关系: 我们建立了Li (2000)中的Copula函数与Schonbucher和Schubert (2001)中的Copula函数的联系, 即在宏观经济信息已知的条件下, 这两种方法是等价的. 我们还考虑了Copula方法和结构化方法的关系: 结构化方法当中的Vasicek因子模型对应着的就是Copula当中的Gaussian因子Copula. 此外对于单个公司的生存概率的求解, 我们给出了不同于Lando (1998)的求解和证明方法, 而这种方法不需要在现在就知道将来的信息.

致谢　作者衷心感谢导师姜礼尚教授给予的指导; 感谢审稿专家提出的宝贵意见; 并感谢汪荣明教授指出原稿的一个错误.

参 考 文 献

[1] Andersen, L., Sidenius, J. and Basu, S., All your hedges in one basket, *Risk*, **11**(2003), 67–72.

[2] Black, F. and Cox, J., Some effects of bond indenture provisions, *Journal of Finance*, **31**(1976), 351–367.

[3] Briys, E. and Varenne, F., Valuing risky fixed rate debt: an extension, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **32**(1997), 239–249.

[4] Embrechts, P., McNeil, A. and Straumann, D., Correlation: pitfalls and alternatives, *Risk*, **12**(1999), 69–71.

[5] Furfine, C., Interbank exposures: quantifying the risk of contagion, *Journal of Money, Credit and Banking*, **35**(2003), 111–128.

[6] Jarrow, R. and Turnbull, S., Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *Journal of Finance*, **50**(1995), 53–86.

[7] Jarrow, R., Lando, D. and Turnbull, S., A Markov model for the term structure of credit risk spreads, *Review of Financial Studies*, **10**(1997), 481–523.

[8] Lando, D., On Cox processes and credit-risky securities, *Review of Derivatives Research*, **2**(1998), 99–120.

[9] Laurent, J. and Gregory, J., Basket default swaps, CDO's and factor Copulas, *Journal of Risk*, **7**(2005), 103–122.

[10] Li, D., On default correlation: a Copula approach, *Journal of Fixed Income*, **9 March**(2000), 43–54.

[11] Longstaff, F. and Schwartz, E., A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt, *Journal of Finance*, **50**(1995), 789–819.

[12] Merton, R.C., On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates, *Journal of Finance*, **29**(1974), 449–470.

[13] Nelsen, R.B., *An Introduction to Copula*, Springer, 1999.

[14] Schonbucher, P. and Schubert, D., Copula dependent risk in intensity models, *Working Paper*, 2001.

[15] Vasicek, O., Probability of loss on loan portfolio, *KMV Technical Document*, 1987.

[16] Vasicek, O., Limiting loan loss probability distribution, *KMV Technical Document*, 1991.

Applications of Copula Theory in Credit Risk

LIANG GECHUN　　REN XUEMIN

(*Tongji University Department of Mathematics Institute of Risk Management, Shanghai, 200092*)

Credit risk theory has become one of the cutting edges in modern finance over the past few years. We investigate into one of the important issues amongst portfolio's credit risk: Copula's applications in correlated default. We discover the relationship amongst Copula and other tools for the correlated default, such as structural models and reduced form models. Additionally, different from Lando (1998), we present another method and proof for the calculation of default probability of the single firm.

Keywords: Credit risk, correlated default, survival probability, Copula.

AMS Subject Classification: 60G70, 62P05, 91G40.