应用概率统计 第二十八卷
第一期 2012年2月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.28 No.1 Feb. 2012

定时截尾寿命的平均寿命比估计研究 *

刘利华
(陕西科技大学理学院, 西安, 710021)

李建波
(徐州师范大学数学科学学院, 徐州, 221116)

摘 要

本文讨论了相互独立且寿命服从单参数指数分布的两产品在定时截尾寿命试验中的平均寿命比估计, 并给出了该估计量的渐近正态性和置信区间. 如果某一种(或某一类)产品与另一种(或某一类)产品平均寿命比率显著大于1, 那么该种产品就具有耐用优势, 这在投资决策中有重大意义. 通过数值模拟还进一步验证了该比估计量和估计方法的有效性.

关键词: 比估计, 定时截尾寿命试验, 渐近正态性.

学科分类号: O212.3.

§1. 引 言

在抽样调查时, 经常会遇到估计两个指标的均值(或总和)的比率问题. 在产品质量的可靠性分析中, 同样会遇见总体平均寿命的比率问题. 例如某一种产品升级后, 产品质量是否有提高, 或比较几种同类产品质量哪一种更优? 这类问题均可通过观察平均寿命的比率的估计量(简称为比估计)得到解决. 讨论平均寿命比估计首先要进行产品质量的可靠性试验, 通常用截尾寿命试验, 所得到的数据为截尾数据. 由于产品的寿命不是一般的随机样本, 因此平均寿命比估计不同于抽样调查中的比估计[3]. 因而对这一问题的研究, 不仅具有较强的理论意义, 而且具有很强的现实意义. 本文将在定时截尾场合下, 研究两个服从单参数指数分布的独立总体的平均寿命比估计. 在定时截尾场合下, 失效产品个数为随机变量, 这对研究参数估计量的统计性质带来了很大困难. 本文利用参数估计量的渐近正态分布, 给出了平均寿命比估计的渐近正态性及其区间估计; 进一步用数值模拟验证了所提方法的有效性.

§2. 参数估计

所谓定时截尾寿命试验就是抽取n个产品进行寿命试验, 不需要等到所有产品失效才结束试验, 而是当试验进行到事先规定的时间就停止试验, 得到的只是部分样品的寿命. 若

*国家自然科学基金项目(10871072)资助.
本文2010年12月13日收到, 2011年5月12日收到修改稿.

能充分利用这部分数据中所含寿命分布的信息, 就能得到关于产品寿命的统计分析, 本文只讨论无替换的定时截尾寿命试验下的平均寿命比估计.

设随机变量X服从参数为$\theta > 0$的单参数指数分布$\exp\{\theta\}$, 其概率密度为

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, \qquad x > 0.$$

设样本$x_1, x_2, \ldots, x_n$来自于单参数指数分布$\exp\{\theta\}$, 定时截尾寿命试验中规定截尾时间为τ, 设在$[0,\tau]$时间内有r个产品失效, 测得这些失效产品的寿命为上述样本的前r个次序统计量

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(r)},$$

其中$0 \leq r \leq n$.

样本的似然函数为

$$L(x;\theta) = \frac{1}{\theta^r}\exp\left\{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{r} x_{(i)} + (n-r)\tau}{\theta}\right\},$$

所以似然方程为

$$-\frac{r}{\theta} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} x_{(i)} + (n-r)\tau}{\theta^2} = 0,$$

因而参数θ伪极大似然估计为

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} x_{(i)} + (n-r)\tau}{r}. \tag{2.1}$$

令$T_r = \sum\limits_{i=1}^{r} x_{(i)} + (n-r)\tau$, 可得

$$\widehat{\theta} = \frac{T_r}{r},$$

其中r为随机变量. 这里称之为伪极大似然估计量是因为r是随机变量, r的极大似然估计可由试验的失效数来估计.

若当$n\to\infty$时, $r/n \xrightarrow{\mathsf{P}} c\ (0 < c \leq 1)$, 则由极大似然估计的性质知$\widehat{\theta}$是$\theta$的相合估计.

在$[0,\tau]$时间内产品失效数r是随机变量, 这给参数的统计分析带来很大的难度[1], 有时人们不得不将定时截尾转化成定数截尾的情况来处理, 本文利用了定数截尾场合下估计量的分布得到了定时截尾场合下估计量函数的分布, 下面给出θ估计量$\widehat{\theta}$函数的渐近正态性.

定理 2.1 设样本$x_1, x_2, \ldots, x_n$来自于单参数指数分布$\exp\{\theta\}$, 在$[0,\tau]$时间内截尾试验有r个产品失效, 它们的次序统计量为

$$0 \leq x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(r)} \leq \tau,$$

其中r为随机变量, $0 \le r \le n$. 令$Y_r = r\widehat{\theta} - (n-r)(\tau - x_{(r)})$. 若$r/n \xrightarrow{\mathsf{P}} c\ (n \to \infty)$, 其中$0 < c \le 1$, 则

$$\frac{Y_r/\theta - r}{\sqrt{r}} \xrightarrow{L} N(0,1). \tag{2.2}$$

证明: 由公式(2.1)得

$$r\widehat{\theta} - (n-r)\tau = \sum_{i=1}^{r} x_{(i)},$$

两边同加$(n-r)x_{(r)}$得

$$r\widehat{\theta} - (n-r)(\tau - x_{(r)}) = \sum_{i=1}^{r} x_{(i)} + (n-r)x_{(r)}.$$

由上式可得Y_r服从$G_a(r, 1/\theta)$分布[2], 进一步可得$2Y_r/\theta \sim \chi^2(2r)$, 可将$2Y_r/\theta$看作$2r$个相互独立且服从$N(0,1)$随机变量的平方和且$r \xrightarrow{\mathsf{P}} nc$, 由中心极限定理知

$$\frac{2Y_r/\theta - 2r}{2\sqrt{r}} \xrightarrow{L} N(0,1) \qquad (n \to \infty),$$

定理得证. □

§3. 比 估 计

设两个相互独立的总体X, Y, 分别服从单参数指数分布$\exp\{\theta_1\}$和$\exp\{\theta_2\}$, 则这两个总体的比率为$R = \mathsf{E}Y/\mathsf{E}X = \theta_2/\theta_1$, 其估计量简称比估计[2], 定义为

$$\widehat{R} = \frac{\widehat{\theta}_2}{\widehat{\theta}_1}.$$

定理 3.1 设两个相互独立的总体X, Y, 分别服从单指数分布$\exp\{\theta_1\}$和$\exp\{\theta_2\}$. 在定时截尾场合下, 它们的次序统计量分别为

$$0 \le x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(r_1)} \le \tau$$

和

$$0 \le y_{(1)} \le y_{(2)} \le \cdots \le y_{(r_2)} \le \tau,$$

其中r_1, r_2均为随机变量, 且满足$0 \le r_1, r_2 \le n$. 若$n \to \infty$时, $y_{(r_2)} \xrightarrow{\mathsf{P}} \tau$且$r_2/n \xrightarrow{\mathsf{P}} c$, 其中$0 < c \le 1$, 则

$$\sqrt{cn}\Big(\frac{\widehat{R}}{R} - 1\Big) \xrightarrow{L} N(0,1). \tag{3.1}$$

证明: 由比率和比估计的定义可得

$$\frac{\widehat{R}}{R}=\frac{r_2\widehat{\theta}_2/(r_2\theta_2)}{\widehat{\theta}_1/\theta_1}.$$

令$Y_{r_2}=r_2\widehat{\theta}_2-(n-r_2)(\tau-y_{(r_2)})$,

$$\frac{\widehat{R}}{R}=\frac{[Y_{r_2}+(n-r_2)(\tau-y_{(r_2)})]/(r_2\theta_2)}{\widehat{\theta}_1/\theta_1}.$$

当n充分大时, 由公式(2.2)可知

$$\frac{Y_{r_2}}{r_2\theta_2}\xrightarrow{L}N(1,1/r_2).$$

由$y_{(r_2)}\to\tau$, $\widehat{\theta}_1$相合性和Slutsky定理即得(3.1)式, 定理得证. □

注记 1 由定理3.1可得R的置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\Big[\frac{\widehat{R}}{1+U_{1-\alpha/2}/\sqrt{nc}},\ \frac{\widehat{R}}{1-U_{1-\alpha/2}/\sqrt{nc}}\Big],$$

其中$U_{1-\alpha/2}$是标准正态分布的上$1-\alpha/2$分位数.

§4. 模 拟

前边从理论上讨论了产品寿命服从单参数指数分布的条件下, 两个相互独立的总体在定时截尾寿命试验中的平均寿命的比估计及其渐近正态性和置信水平为$1-\alpha$的置信区间. 本节用数值模拟验证该估计方法的有效性.

设产品寿命分别服从两个相互独立的总体$\exp\{\theta_1\}$和$\exp\{\theta_2\}$, 取定参数$\theta_1=100$, $\theta_2=150$, 则平均寿命比率真值是$R=\theta_2/\theta_1=1.5$.

若取截尾时间为$\tau=150$, 分别取样本容量n为500, 1000, 2500, 5000, 10000, 100000, 对平均寿命的比估计$\widehat{R}$在该定时截尾场合下进行一万次的数值模拟, 结果见表1.

通过分析表1可知下列结论:

(1) 平均寿命的比估计与比率的真值偏差很小, 均不超过0.001.

(2) 平均寿命比估计的方差与均方误差几乎处处相等, 均不超过0.0009.

(3) 由图1到图8可看到, $\tau=150$的定时截尾试验模拟出的比估计值对应的直方图关于对称轴基本左右对称, 正态检验图的数据点都基本落在一条直线上. 在样本容量不小于5000的情况下, 图中的数据点更集中落在一条直线上, 这说明通过数值模拟证明在定时截尾场合下平均寿命比估计服从渐近正态分布.

(4) L值表示含有真值的置信区间的个数, P值表示含有真值的置信区间在所有置信区间中占有的比例, 表1中该值均在93%左右.

表1 $\tau = 150$截尾试验场合下一万次的大样本的$\widehat{R}$值模拟结果的统计分析

n	500	1000	2500	5000	10000	100000
$\mathrm{E}(\widehat{R})$	1.5010	1.5002	1.4998	1.5005	1.5002	1.5004
$\mathrm{Bias}(\widehat{R})$	9.9612e-004	2.0701e-004	-2.0345e-004	4.5367e-004	1.5348e-004	3.5008e-004
$\mathrm{Var}\,(\widehat{R})$	6.5005e-004	6.0858e-004	6.3922e-004	6.3304e-004	6.4699e-004	6.5119e-004
$\mathrm{MSE}(\widehat{R})$	6.5104e-004	6.0862e-004	6.3926e-004	6.3325e-004	6.4702e-004	6.5211e-004
L	464	945	2338	4726	9360	93476
P	0.9280	0.9450	0.9352	0.9452	0.9360	0.9348

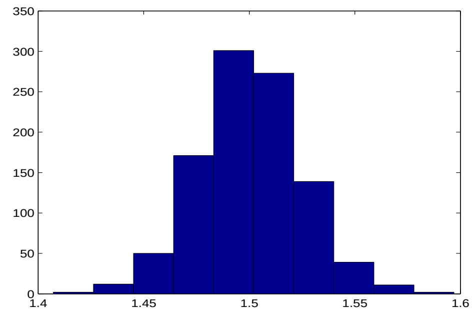

图1 $n = 1000$时$\widehat{R}$的直方图

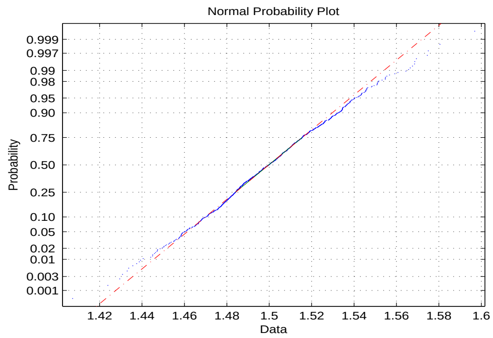

图2 $n = 1000$时$\widehat{R}$的正态检验图

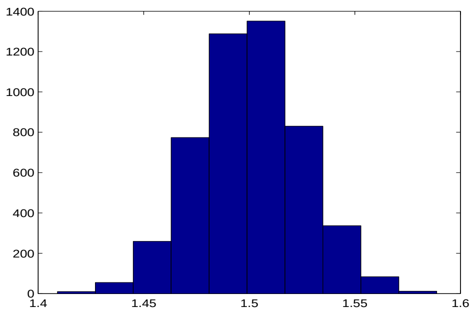

图3 $n = 5000$时$\widehat{R}$的直方图

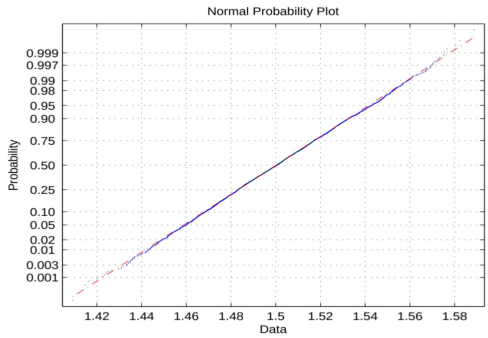

图4 $n = 5000$时$\widehat{R}$的正态检验图

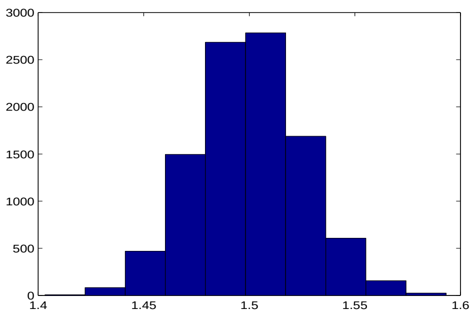

图5 $n = 10000$时$\widehat{R}$的直方图

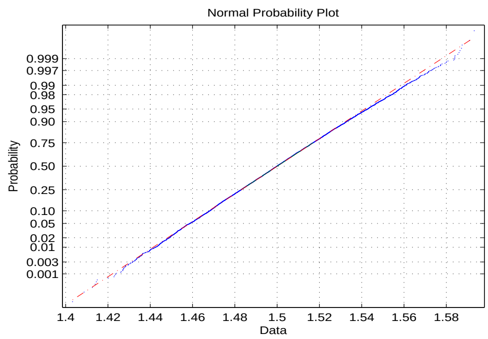

图6 $n = 10000$时$\widehat{R}$的正态检验图

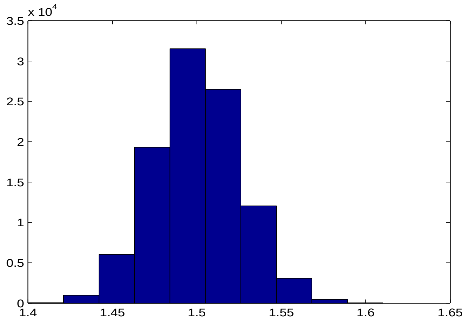

图7　$n=100000$时$\widehat{R}$的直方图

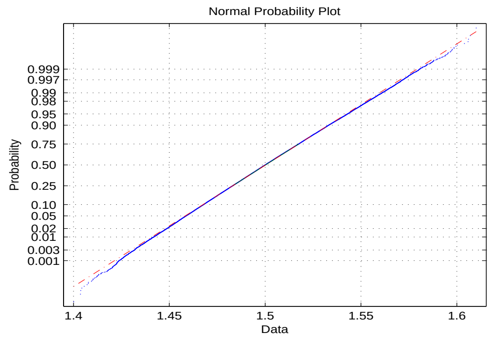

图8　$n=100000$时$\widehat{R}$的正态检验图

参 考 文 献

[1] 翟伟丽, 茆诗松, 定时截尾场合下双参数指数分布的参数估计, 应用概率统计, **18(2)**(2002), 197–402.

[2] 李建波, 张日权, 双参数指数分布参数比率统计推断的研究, 应用概率统计, **26(1)**(2010), 81–88.

[3] 梁小筠, 祝大平, 抽样调查的方法与原理, 华东师范大学出版社, 1994.

[4] 王炳兴, 指数分布场合基于竞争失效数据的参数估计, 工程数学学报, **18(3)**(2001), 121–124.

[5] 黄江平, 定时与定数截尾试验参模的建立与参数估计, 纯粹数学与应用数学, **20(1)**(2004), 44–52.

[6] 刘银萍, 马占友, 定时截尾场合下二项分布参数的估计, 东北师大学报自然科学学报, **36(4)**(2004), 25–28.

[7] 张荷观, 两个比率的比率估计量, 江南大学学报, **2(3)**(2003), 309–314.

Estimation of the Mean Life Ratio under Type-I Life Test

Liu Lihua

(*School of Science, Shanxi University of Science and Technology, Xi'an, 710021*)

Li Jianbo

(*School of Mathematical Sciences, Xuzhou Normal University, Xuzhou, 221116*)

In this paper, we studied the mean life ratio estimate between two populations, independently following one parameter exponential distribution in a type-I censoring life test. Under some conditions, we showed that the ratio estimate is asymptotically normally distributed. Based on the asymptotic normality, we also established its confidence interval. By a simulation study, we illustrated the validation of the ratio estimate.

Keywords: Ratio estimate, type-I censoring life test, asymptotic normality.

AMS Subject Classification: 62N05.