应用概率统计 第二十八卷
第三期 2012年6月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.28 No.3 Jun. 2012

违约强度由Lévy从属过程驱动的约化信用风险模型及信用违约互换的定价 *

胡凤清 王过京

(苏州大学数学科学学院与金融工程研究中心, 苏州, 215006)

摘 要

本文引入一个约化信用风险模型, 其中违约强度定义为从属过程, 即非负增Lévy过程. 用概率方法得到了违约时间分布的解析表达式. 利用该解析表达式, 给出了该信用风险模型下的信用违约互换(Credit Default Swaps)的闭形式的定价公式.

关键词: 从属过程, 无穷小算子, 零息票债券, 信用违约互换.

学科分类号: O211.6.

§1. 模型的建立

在信用衍生品出现之前, 市场上并没有其他较好的金融工具能够同时防范信用风险和市场风险. 信用衍生产品的诞生, 使得信用风险可以从市场风险中分离出来并将其从一方转移到另外一方. 正因为如此, 信用衍生产品在全球信用衍生品市场发展得如此迅速且日趋成熟, 具有代表性的信用衍生产品有信用违约互换等. 目前, 有许多国内外学者研究信用违约互换, 如O'Kane和Turnbull (2003), Jamshidian (2004), Crepey, Jeanblanc和Zargari (2009)等.

约化信用风险模型(Reduced form credit risk model)的研究始于Artzner和Delbaen (1995), Jarrow和Turnbull (1995)以及Duffie和Singleton (1999). 在一类约化信用风险模型中, 可违约公司的违约时间定义为Cox过程的第一次跳发生的时刻. 而Cox过程的强度过程则为可违约公司的违约强度过程. 刻划Cox过程的强度过程的形式多种多样, 参见Basu和Dassios (2002), Dassios和Jang (2003), Cariboni和Schoutens (2006)等. 由于Cox过程在数学上易于处理, 有关对Cox型约化信用风险模型的研究已取得了许多深刻的结果. 但由于实际问题中信用风险的复杂性, 人们需要尝试各种不同形式的强度过程来刻划信用违约风险. 从属过程是一类特殊的Lévy过程, 它是非负增Lévy过程. 因此, 用从属过程刻划违约强度具有一定的局限性, 但也有一定的合理性. 本文在Cox型约化信用风险模型框架下, 把违约强度过程定义为一从属过程, 并借助于鞅方法和违约强度及其积分泛

*教育部博士点基金(20093201110013)和福建省教育厅基金(JA11208)资助.

本文2011年7月8日收到, 2012年3月4日收到修改稿.

函的联合拉普拉斯变换推导出违约时间分布的闭形式表达式. 该表达式可用于定价信用违约互换的公平保费.

我们先引入Cox过程的定义, 参见Dassios和Jang (2003)或Grandell (1976).

定义 1.1 令$(\Omega,\mathfrak{F},\{\mathfrak{F}_t,t\in[0,T]\},\mathsf{P})$是一个带过滤的完备概率空间. N_t是以λ_t为强度的点过程, 其中λ_t是$\mathfrak{F}$适应的非负过程, 且满足

$$\int_0^t \lambda_s \mathrm{d}s<\infty \qquad \text{a.s..}$$

若对所有的$0\le t_1\le t_2$且$u\in\mathrm{R}$, 有

$$\mathsf{E}\{e^{iu(N_{t_2}-N_{t_1})}|\mathfrak{F}^{\lambda}_{t_2}\}=e^{\{(e^{iu}-1)\int_{t_1}^{t_2}\lambda_s\mathrm{d}s\}} \tag{1.1}$$

成立, 其中$\mathfrak{F}^{\lambda}_t=\sigma\{\lambda_s,s\le t\}$, 则称$N_t$是具有强度为$\lambda_t$的Cox过程.

假设违约强度过程λ_t是从属过程且$\lambda_0=0$, 其Lévy特征三元组为$(0,\nu,\gamma)$,

$$b=\gamma-\int_{R_+} yI_{(|y|\le 1)}\nu(\mathrm{d}y)\ge 0.$$

现假设N_t是以从属过程λ_t为强度过程的Cox过程, 在约化信用风险模型框架下, 公司首次违约时间τ定义为$\tau=\inf\{t\ge 0,N_t=1|N_0=0\}$. 设$\mathcal{G}_t$是由$\lambda$生成的$\sigma$代数, 即$\mathcal{G}_t=\sigma(\lambda_s,0\le s\le t)$. 由违约时间的定义以及(1.1), 容易得到可违约公司的条件生存概率

$$\mathsf{P}(\tau>t|\mathcal{G}_t)=e^{-\Lambda_{0,t}}, \tag{1.2}$$

其中$\Lambda_{s,t}=\displaystyle\int_s^t\lambda_u\mathrm{d}u$. 设$\mathcal{H}_t$表示到$t$时刻为止, 由$\tau$生成的最小$\sigma$代数, 则定义$\mathcal{F}_t$为

$$\mathcal{F}_t=\mathcal{G}_t\vee\mathcal{H}_t.$$

为了证明之后命题2.1, 我们引入Lévy过程的无穷小算子, 参见Cont和Tankov (2004). 设λ_t是从属Lévy过程, 其Lévy特征三元组为$(0,\nu,\gamma)$,

$$b=\gamma-\int_{R_+} yI_{(|y|\le 1)}\nu(\mathrm{d}y)\ge 0,$$

且$f(t,\Lambda,\lambda)$满足:

(1) f在有限时间区间内有界;

(2) f关于t,Λ,λ连续可微;

(3)
$$\Big|\int_{R_+} f(\cdot,\cdot,\lambda+y)-f(\cdot,\cdot,\lambda)\nu(\mathrm{d}y)\Big|<\infty,$$

则从属Lévy过程λ_t的无穷小算子$\mathcal{A}f(t,\Lambda_t,\lambda_t)$为

$$\mathcal{A}f(t,\Lambda_t,\lambda_t)=\frac{\partial f}{\partial t}+\lambda\frac{\partial f}{\partial\Lambda}+b\frac{\partial f}{\partial\lambda}+\int_{R_+} f(t,\Lambda,\lambda+y)-f(t,\Lambda,\lambda)\nu(\mathrm{d}y). \tag{1.3}$$

§2.　违约时间分布的解析表达式

本节的主要目标是利用逐段决定马科尔夫过程理论中构造鞅的方法推导强度过程和累积强度过程的联合拉普拉斯变换和可违约公司的生存概率的解析表达式. 为后文计算方便, 首先给出如下记号:

$$h(u,k,s,t)=\frac{1}{2}u(t^2-s^2)-(ut+k)(t-s), \tag{2.1}$$

$$\widetilde{\eta}_{u,k}(x,t)=\int_0^{\infty}(e^{-(k+u(t-x))y}-1)\nu(\mathrm{d}y), \tag{2.2}$$

$$\Phi_{u,k}(s,t)=bh(u,k,s,t)+\int_s^t\widetilde{\eta}_{u,k}(x,t)\mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

下面, 我们以定理的形式给出可违约公司的生存概率的解析表达式.

定理 2.1　(1) 违约时间的条件生存概率为

$$\mathsf{P}[\tau>t|\mathcal{G}_s]=\exp\{\Phi_{1,0}(s,t)-(t-s)\lambda_s\}. \tag{2.4}$$

(2) 违约时间的生存概率为

$$\mathsf{P}[\tau>t]=\exp\{\Phi_{1,0}(0,t)\}. \tag{2.5}$$

(3) 违约时间的概率密度函数为

$$\mathsf{P}(\tau\in\mathrm{d}t)=-\exp\{\Phi_{1,0}(0,t)\}\partial_t\Phi_{1,0}(0,t)\mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

在证明这个定理之前, 我们给出以下两个命题:

命题 2.1　假设给定t^*及$\omega\in\Omega$, λ_t是t的函数, 其中$t\in[0,t^*]$. 令$u\geq 0$, $v\geq ut^*$, 则

$$\exp\Big\{-u\Lambda_{0,t}-(v-ut)\lambda_t-b\Big(\frac{1}{2}ut^2-vt\Big)-\int_0^t\eta_{u,v}(x)\mathrm{d}x\Big\} \tag{2.7}$$

是一个$\mathcal{F}_t$-鞅.

证明:　由Jacobsen (2006)中定理7.6.1知, 满足

$$\mathcal{A}f(t,\Lambda,\lambda)=0 \tag{2.8}$$

的解$f(t,\Lambda,\lambda)$是$\mathcal{F}_t$-鞅. 求解方程(2.8)的如下形式的解

$$f(t,\Lambda,\lambda)=e^{-u\Lambda+A(t)\lambda}e^{B(t)}. \tag{2.9}$$

由(1.3)和(2.8), 得

$$(A'(t)-u)\lambda+bA(t)+B'(t)+\int_{R_+}(e^{A(t)y}-1)\nu(\mathrm{d}y)=0. \tag{2.10}$$

由(2.10), 易得

$$A(t) = ut - v, \tag{2.11}$$

$$B(t) = -b\Big(\frac{1}{2}u^2t^2 - vt\Big) - \int_0^t \eta_{u,v}(x)\mathrm{d}x, \tag{2.12}$$

其中

$$\eta_{u,v}(t) = \int_{R_+} (e^{(ut-v)y} - 1)\nu(\mathrm{d}y). \tag{2.13}$$

将(2.11), (2.12)和(2.13)代入(2.9), 命题2.1成立. □

命题 2.2 对于$0 < s < t$, 且$k \geq 0$, $u \geq 0$, 违约强度过程λ_t和累积违约强度过程$\Lambda_{s,t}$的联合拉普拉斯变换为

$$\mathsf{E}[e^{-(k(\lambda_t-\lambda_s)+u\Lambda_{s,t})}|\mathcal{G}_s] = e^{\Phi_{u,k}(s,t)-u(t-s)\lambda_s}. \tag{2.14}$$

证明: 由命题2.1和鞅性质, 得

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}[e^{-u\Lambda_{0,t}-(v-ut)\lambda_t-b(ut^2/2-vt)-\int_0^t \eta_{u,v}(x)\mathrm{d}x}|\mathcal{G}_s]\\ =\ & e^{-u\Lambda_{0,s}-(v-us)\lambda_s-b(us^2/2-vs)-\int_0^s \eta_{u,v}(x)\mathrm{d}x}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

令$v = k + ut$, 其中$k \geq 0$, 代入(2.15), 命题2.2成立. □

由命题2.2, 我们很容易得到定理2.1的证明. 下面, 针对定理2.1, 给出一个简单的证明.

证明: (1)

$$\begin{aligned}\mathsf{P}[\tau > t|\mathcal{G}_s] &= \mathsf{P}(N_t - N_s = 0|\mathcal{G}_s) = \mathsf{E}(e^{-\int_s^t \lambda_u \mathrm{d}u}|\mathcal{G}_s)\\ &= e^{\Phi_{1,0}(s,t)-(t-s)\lambda_s}.\end{aligned}$$

最后一个等式是由命题2.2得到.

(2)

$$\mathsf{P}[\tau > t] = \mathsf{P}(\tau > t|\mathcal{G}_0).$$

利用(2.4)可以直接推导出来.

(3) 对(2.5)关于t求导, 可得到(2.6). □

§3. 零息票债券和信用违约互换保费率的公平定价

本节主要利用前面的定理计算零息票债券在0时刻的价格以及信用违约互换(Credit Default Swaps, 简称CDS)的公平保费率. 假设公司A发行到期日为T, 面值为1的零息票债券, 公司A可能发生违约, 违约回收率为δ. 那么, 如果公司A在到期日T之前不发生违

约, 则投资者在到期日将获得1; 如果公司A在到期日T之前违约, 投资者在违约时刻获得δ, 这就意味着投资者将损失$1-\delta$. 公司B持有一份公司A发行的零息票债券. 为规避公司A的违约风险, 投资者B向公司C购买一份CDS. 从本质上讲, CDS是一份保险合同. 该合同规定: (1)投资者B在合同有效期内是以事先约定方式(本文假设为连续支付方式)向公司C支付保费, 保费率为$\kappa(T)$; (2)若公司A在到期日之前违约, 则在违约时刻, 投资者B从公司A得到δ, 从公司C得到其余的损失$1-\delta$; (3)若公司A在到期日之前没有违约, 那么投资者B在T时刻从公司A得到1, 公司C无须向投资者B支付任何费用. 另外, 假设市场利率是确定性函数, 我们用r_t, $t\geq 0$来表示. $\beta(t)=e^{-\int_0^t r_u\mathrm{d}u}$表示贴现因子. 类似于Crepey, Jeanblanc和Zargari (2009), 我们引入CDS的价格过程的定义

定义 3.1 假设τ是公司A的违约时间, 则CDS的价格过程为$P_t=\mathsf{E}_t[p_T^t]$. 其中, p_T^t表示$(t,T]$内CDS的累积现金流, 即

$$\beta(t)p_T^t=-\kappa(T)\int_t^{\tau\wedge T}\beta(s)\mathrm{d}s+(1-\delta)\beta(\tau)I(t<\tau<T). \tag{3.1}$$

(3.1)表示公司B的现金流变化情况. 其中, 等式右边第一项表示投资者B需向公司C缴纳的保费的现值, 等式右边第二项表示由公司A违约导致投资者B损失$1-\delta$的现值.

从上述定义, 我们可以推出CDS的公平保费率.

定理 3.1 设$B(0,T)$为在到期日为T, 面值为1的零息票债券在0时刻的价格. 则

(1) 零息票债券在0时刻的价格$B(0,T)$为

$$B(0,T)=e^{-\int_0^T r_u\mathrm{d}u}e^{\Phi_{1,0}(0,T)}-\delta\int_0^T e^{-\int_0^t r_u\mathrm{d}u+\Phi_{1,0}(0,t)}\partial_t\Phi_{1,0}(0,t)\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

(2) CDS在t时刻的价格为

$$P_t=I_{(\tau>t)}\mathsf{E}\Big[\int_t^T((1-\delta)\lambda_s-\kappa(T))e^{-\int_t^s r_u+\lambda_u\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\big|\mathcal{G}_t\Big]. \tag{3.3}$$

(3) CDS的公平保费率为

$$\kappa(T)=\frac{(1-\delta)\displaystyle\int_0^T e^{-\int_0^t r_u\mathrm{d}u+\Phi_{1,0}(0,t)}\partial_t\Phi_{1,0}(0,t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^T e^{-\int_0^s r_u\mathrm{d}u}e^{\Phi_{1,0}(0,s)}\mathrm{d}s}. \tag{3.4}$$

证明: (1) 由(2.5), (2.6)和零息票债券的定义, 得

$$\begin{aligned}B(0,T)&=e^{-\int_0^T r_u\mathrm{d}u}\mathsf{P}(\tau>T)+\delta\int_0^T e^{-\int_0^t r_u\mathrm{d}u}\mathrm{d}\mathsf{P}(\tau\leq t)\\&=e^{-\int_0^T r_u\mathrm{d}u}e^{\Phi_{1,0}(0,T)}-\delta\int_0^T e^{-\int_0^t r_u\mathrm{d}u+\Phi_{1,0}(0,t)}\partial_t\Phi_{1,0}(0,t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.5}$$

(2) 由(3.1), Jeanblanc, Yor和Chesney (2009)中的引理7.4.1.1, 得

$$\begin{aligned}
P_t &= \mathsf{E}[p_T^t|\mathcal{F}_t]\\
&= \frac{I_{(\tau>t)}}{\mathsf{E}[I_{(\tau>t)}|\mathcal{G}_t]}\Big[(1-\delta)\mathsf{E}[e^{-\int_t^\tau r_u\mathrm{d}u}I_{(t<\tau<T)}|\mathcal{G}_t]-\kappa(T)\int_t^T e^{-\int_t^s r_u\mathrm{d}u}\mathsf{E}[I_{(\tau>s)}|\mathcal{G}_t]\mathrm{d}s\Big]\\
&= \frac{I_{(\tau>t)}}{\mathsf{E}[I_{(\tau>t)}|\mathcal{G}_t]}\Big[(1-\delta)\mathsf{E}\Big[\sum_t^T e^{-\int_t^s r_u\mathrm{d}u}\mathsf{E}[I_{(\tau\in(s,s+\triangle s))}|\mathcal{G}_{s+\triangle s}]|\mathcal{G}_t\Big]\\
&\quad -\kappa(T)\int_t^T e^{-\int_t^s r_u\mathrm{d}u}\mathsf{E}[\mathsf{E}[I_{(\tau>s)}|\mathcal{G}_s]|\mathcal{G}_t]\mathrm{d}s\Big]\\
&= \frac{I_{(\tau>t)}}{\mathsf{E}[I_{(\tau>t)}|\mathcal{G}_t]}\Big[(1-\delta)\mathsf{E}\Big[\int_t^T e^{-\int_t^s r_u\mathrm{d}u}\mathsf{P}(\tau\in\mathrm{d}s)|\mathcal{G}_t\Big]\\
&\quad -\kappa(T)\int_t^T e^{-\int_t^s r_u\mathrm{d}u}\mathsf{E}[e^{-\Lambda_{0,s}}|\mathcal{G}_t]\mathrm{d}s\Big]\\
&= I_{(\tau>t)}\Big[(1-\delta)\mathsf{E}\Big[\int_t^T \lambda_s e^{-\int_t^s r_u+\lambda_u\mathrm{d}u}\mathrm{d}s|\mathcal{G}_t\Big]-\kappa(T)\int_t^T \mathsf{E}[e^{-\int_t^s r_u+\lambda_u\mathrm{d}u}\mathrm{d}s|\mathcal{G}_t]\Big]\\
&= I_{(\tau>t)}\mathsf{E}\Big[\int_t^T((1-\delta)\lambda_s-\kappa(T))e^{-\int_t^s r_u+\lambda_u\mathrm{d}u}\mathrm{d}s|\mathcal{G}_t\Big].
\end{aligned}$$

(3.3)成立.

(3) 令$P_0=0$, 我们可得(3.4). □

接下来, 我们分析零息票债券在0时刻的价格和CDS的公平保费率与到期日T之间的动态关系. 为简单起见, 假设$b=0$, 从属过程λ_t是带正跳的复合泊松过程, 即$\lambda_t=\sum\limits_{i=1}^{N(t)}Y_i$, 其中, $N(t)$是服从强度为α的泊松过程, $\{Y_i,i=1,2,\ldots\}$是独立同分布随机序列, 其分布为参数为ρ的指数分布, 即

$$F(x)=1-e^{-\rho x},\qquad \rho>0,\ x>0.$$

设$\alpha=10$, $\rho=30$, $\delta=0.4$, $r=0.05$. 表1给出零息票债券在0时刻的价格与到期日T之间的动态关系. 表2给出了CDS的公平保费率与到期日T之间的动态关系.

表1 零息票债券的价格和到期日之间的动态关系

T	2	4	6	8
$B(0,T)$	0.862265	0.699452	0.595469	0.660545

表2 CDS的公平保费率和到期日之间的动态关系

T	2	4	6	8
$\kappa(T)$	0.0286908	0.0696346	0.1430160	0.3010480

从表1中, 我们可以发现, 零息票债券价格并不是到期日的单调函数. 从表2中看, CDS的公平保费率随着到期日得延长逐渐增加. 这主要是因为公司A随着时间的逐渐延长, 其破产概率逐渐增大.

参 考 文 献

[1] Artzner, P. and Delbaen, F., Default risk insurance and incomplete markets, *Mathematical Finance*, **5**(1995), 187–195.

[2] Basu, S. and Dassios, A., A Cox process with log-normal intensity, *Insurance: Mathematics and Economics*, **31(2)**(2002), 297–302.

[3] Cariboni, J. and Schoutens, W., Jumps in intensity models, Working Paper, 2006.

[4] Crepey, S., Jeanblanc, M. and Zargari, B., Counterparty risk on a CDS in a Markov chain copula model with joint defaults, Working Paper, 2009.

[5] Dassios, A. and Jang, J., Pricing of catastrophe reinsurance and derivatives using the Cox process with shot noise intensity, *Finance and Stochastics*, **7**(2003), 73–95.

[6] Duffie, D. and Singleton, K.J., Modeling term structures of defaultable bonds, *Review of Financial Studies*, **12**(1999), 687–720.

[7] Grandell, J., *Doubly Stochastic Poisson Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[8] Jacobsen, M., *Point Process Theory and Applications: Marked Point and Piecewise Deterministic Processes*, Birkhauser, Boston, 2006.

[9] Jamshidian, F., Valuation of credit default swaps and swaptions, *Finance and Stochastics*, **8**(2004), 343–371.

[10] Jarrow, R.A. and Turnbull, S.M., Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *Journal of Finance*, **50(1)**(1995), 53–86.

[11] Jeanblanc, M., Yor, M. and Chesney, M., *Mathematical Methods for Financial Markets*, Springer-Verlag London Limited, 2009.

[12] Cont, R. and Tankov, P., *Financial Modeling with Jump Process*, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2004.

[13] O'Kane, D. and Turnbull, S., Valuation of credit default swaps, *Quantitative Credit Research Quarterly*, Lehman Brothers, 2003.

The Fair Pricing of the Credit Default Swaps in a Intensity-Based Model Driven by Subordinator Processes

HU FENGQING WANG GUOJING

(*Department of Mathematics and Center for Financial Engineering, Soochow University, Suzhou, 215006*)

For a reduced form model of credit risk, we use Cox process whose intensity process is a subordinator process to define the default time of the company. We derive closed forms of the distribution of the company's default time. We also derive the fair price of the defaultable zero coupon bond and the credit spread of the credit default swaps.

Keywords: Subordinator processes, infinity generator, zero coupon bond, credit default swap.

AMS Subject Classification: 91B30.