应用概率统计 第二十八卷
第六期 2012年12月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.28 No.6 Dec. 2012

一个带有稀疏相关性结构的约化信用风险模型 *

梁 雪[1,2] 王过京[1]

([1]苏州大学金融工程中心, 苏州, 215006; [2]苏州科技学院数理学院数学系, 苏州, 215009)

摘 要

约化信用风险模型是一类非常重要的信用风险模型, 在约化模型中, 如何对违约相关性进行建模是很关键的. 本文在约化模型框架中进入引入稀疏相关性, 具有违约相关性的两个公司的联合生存概率可以推出来, 在此基础上, 我们得到了信用违约互换(具有对手风险或者没有对手风险)的互换率的解析表达式. 最后我们作了数值分析, 发现稀疏相关模型可以较好地刻画公司之间的违约相关性.

关键词: 约化模型, 违约相关性, 稀疏相关结构, 信用违约互换, 对手信用风险, 互换率.

学科分类号: O211.6.

§1. 引 言

信用风险是指债务人未能如期偿还债务造成违约而给经济主体经营带来的风险. 更一般的, 信用风险还包括由于借款人信用评级的变动或履约能力的变化导致市场价值发生变动而引起损失的可能性. 因此信用风险主要包括违约风险和信用等级下降风险. 本文讨论的内容主要指前者.

信用风险的度量和管理是困扰金融机构的主要问题, 金融界也一直在不断地加强对信用风险的防范与管理, 一系列以信用风险为核心的信用衍生工具得到迅速发展, 成为国际市场上金融创新的一大热点. 信用衍生品市场的快速发展对信用衍生品定价理论提出了更高的要求, 如何对信用衍生品进行准确定价以及有效的模型校正已成为近年来国内外学者研究的热点课题之一.

信用衍生品的定价模型主要有两大类: 结构模型和约化模型. 结构模型是以期权定价理论为基础, 通过公司的资本和负债的变动过程来刻画违约, 这类模型的优点在于可以了解违约事件发生的经济背景, 并对违约事件有一个清晰的认识; 但是由于企业资产、负债等相关信息很难及时、准确地获得, 这对模型的应用来说是一个很难克服的困难, 另外为了缩小同现实情况的差距, 结构模型的拓展采用了随机利率、不完全信息以及跳跃等假设使得模型更为复杂, 很难估计与校正, 所以一直以来结构模型没能作为实践中基本的定价模型. 约化模型避免了对无法观察的公司价值进行建模, 而是将违约过程看作跳过程, 违约时间

*教育部博士点基金(20093201110013)、江苏省自然科学基金(BK2012613)和苏州科技学院科研基金青年项目(XKQ201211)资助.

本文2011年11月9日收到, 2012年7月13日收到修改稿.

由这个外生的跳过程来刻画, 即跳过程第一次发生跳的时刻定义为公司的违约时刻. 这类模型具有易处理性, 也容易校正, 所以被业界所采用, 并逐渐成为信用衍生品定价的主流模型.

对违约相关性的建模是约化模型研究的重点, 目前违约相关性的刻画主要有三种方法: 条件违约独立(Conditionally Independence Default, CID)模型(参见[1]), CID假设企业的强度过程依赖于共同的状态变量, 从而使各企业的信用风险互相依赖, 而一旦状态变量给定, 则各企业的违约率是独立的; 传染模型(Contagion Models)(参见[2]及[3])则通过企业间的违约依赖来克服CID模型产生的低水平的相关性, 这种违约依赖体现在违约的可传染性: 一个公司的违约或信用降级可能导致其他在经济或生产等方面与之有着直接联系的公司违约或信用恶化; 因子copula模型(参见[4])是通过copula函数引入违约相关性. 本文不采用以上三种方法, 而引入稀疏相关性, 为违约相关性的刻画提供了一种新的思路. Wang和Yuen (2005)把稀疏相关性应用于保险理赔模型中, 受此启发, 我们将稀疏相关性运用于信用风险模型中, 得到了较好的结果.

我们的模型简要叙述如下: 假设市场有n个公司, 我们认为公司违约是由外生事件诱发引起的, 包括国家政策的调整、公司策略的变化、市场流动性环境的改变、自然灾害等等, 这些事件的来到次数用相互独立的泊松过程刻画. 假设这些随机事件被划分为m类, 进一步假设, 如果第k类事件在时刻t发生, 则它导致第i个公司违约的概率为$p_i^k(t)$, $k=1,2,\ldots,m$; $i=1,2,\ldots,n$, 它们又称为稀疏概率, 这些稀疏概率与其他事件导致什么公司违约无关. 这样我们实际上就引入了稀疏相关结构, 这一点我们在下一节还将作进一步的讨论.

本文余下的部分将这样安排: 在第2节我们给出模型的基本框架并在此框架下推导出联合违约概率, 计算出违约相关性系数, 第3节我们在此模型下对单名信用违约互换进行定价, 第4节我们作了数值分析.

§2. 模型框架

假设市场上有n个公司, 可能导致这些公司违约的随机因素分为m类, 如果第k类事件在时刻t发生, 则它导致第i个公司违约的概率为$p_i^k(t)$, $k=1,2,\ldots,m$; $i=1,2,\ldots,n$, 并且与其他事件导致什么公司违约无关. 记到时刻t为止第k类事件发生的次数为$N^k(t)$, 记到时刻t为止由第k类事件发生而导致第j个公司发生违约的次数为$N_j^k(t)$. 与Wang和Yuen(2005)的保险理赔模型类似, 我们需要以下两个假设:

假设 1 过程$N^1(t), N^2(t), \ldots, N^m(t)$是相互独立的泊松过程, 它们的参数分别为$\lambda_1$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

假设 2 对每个k $(k=1,2,\ldots,m)$, 过程$N_1^k(t), N_2^k(t), \ldots, N_n^k(t)$在给定$N^k(t)$的条件

下是独立的.

注记 1 以上两个假设与[5]中的假设是类似的.

注记 2 对每个$k\,(k=1,2,\ldots,m)$, 以及$j\,(j=1,2,\ldots,n)$, 由于$N^k(t)$中的任何一个事件是否导致第j个公司违约与其他事件独立, 故假设2是自然成立的.

注记 3 由于过程$N^1(t),N^2(t),\ldots,N^m(t)$相互独立, 而对每个$k\,(k=1,2,\ldots,m)$, 过程$N_1^k(t),N_2^k(t),\ldots,N_n^k(t)$是由泊松过程$N^k(t)$稀疏而来的, 故$m$个向量计数过程$(N^1(t),N_1^1(t),N_2^1(t),\ldots,N_n^1(t))$, $(N^2(t),N_1^2(t),N_2^2(t),\ldots,N_n^2(t))$, $\ldots$, $(N^m(t),N_1^m(t),N_2^m(t),\ldots,N_n^m(t))$也相互独立.

我们令

$$N_i(t)=\sum_{k=1}^m N_i^k(t),\qquad i=1,2,\ldots,n,$$

由假设1以及注记3我们知道$N_i(t)$是强度为$\sum\limits_{k=1}^m \lambda_k p_i^k(t)$的非齐次泊松过程. 在约化信用风险模型中, 第$i$个公司的违约时间$\tau_i$通常定义为点过程的第一次跳时间, 即

$$\tau_i=\inf\{t\geq 0: N_i(t)>0\},\qquad i=1,2,\ldots,n.$$

引理 2.1 如果$N(t)$是一个参数为λ的泊松过程, 且$0<t_1<t_2$, 则我们有

$$\mathsf{P}(N(t_1)=k|N(t_2)=n)=C_n^k\Big(\frac{t_1}{t_2}\Big)^k\Big(1-\frac{t_1}{t_2}\Big)^{n-k}.$$

证明: 我们知道, 在已知泊松过程$N(t)$在$(0,t_2]$内发生n个事件的条件下, 各事件发生的时刻是相互独立的, 且服从$(0,t_2)$上的均匀分布(参见[6]). 从而事件发生的时刻在$(0,t_1]$内的概率为t_1/t_2, 事件发生的时刻在$(t_1,t_2]$内的概率为$1-t_1/t_2$, 于是$\mathsf{P}(N(t_1)=k|N(t_2)=n)$刚好等于$n$次试验中$k$次成功$n-k$次失败的概率, 而$t_1/t_2$是各次试验成功的概率, 即

$$\mathsf{P}(N(t_1)=k|N(t_2)=n)=C_n^k\Big(\frac{t_1}{t_2}\Big)^k\Big(1-\frac{t_1}{t_2}\Big)^{n-k}.\qquad\square$$

引理 2.2 对每个$k\,(k=1,2,\ldots,m)$, 以及$j\,(j=1,2,\ldots,n)$, $N^k(t),N_j^k(t)$是前面定义好的泊松过程, 且$0<t_1<t_2$, $0<n_1<n_2$, 则我们有

$$\mathsf{P}(N_j^k(t_1)=n_1|N^k(t_2)=n_2)=C_{n_2}^{n_1}\Big(\Big(\int_0^{t_1}p_j^k(s)\mathrm{d}s\Big)/t_2\Big)^{n_1}\Big(1-\Big(\int_0^{t_1}p_j^k(s)\mathrm{d}s\Big)/t_2\Big)^{n_2-n_1}.$$

证明: 证明思路与引理2.1类似, 只要注意以下这个事实就可以得到本引理的结论: 对泊松过程$N^k(t)$, 考虑$(0,t_2]$内已经发生的任意一个事件, 如果该事件在时刻s发生, 则它引起第j个公司违约的概率为$p_j^k(s)\,(j=1,2,\ldots,n)$, 由于此事件发生的时刻服从$(0,t_2)$上的均匀分布(参见[6]), 从而由该事件而导致第j个公司在$(0,t_1]$内违约的概率为$\Big(\int_0^{t_1}p_j^k(s)\mathrm{d}s\Big)/t_2.\qquad\square$

命题 2.1 如果τ_i,τ_j分别是第i,j个公司的违约时刻$(i,j=1,2,\ldots,n;\ i\neq j)$, 且$0<t_1\leq t_2$, 则我们有

$$\mathsf{P}(\tau_i>t_1,\tau_j>t_2)=e^{\sum\limits_{k=1}^{m}[(1-(\int_0^{t_1}p_i^k(s)\mathrm{d}s)/t_2)(1-(\int_0^{t_2}p_j^k(s)\mathrm{d}s)/t_2)-1]\lambda_k t_2}.$$

证明:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(\tau_i>t_1,\tau_j>t_2)=\mathsf{P}(N_i(t_1)=0,N_j(t_2)=0)\\
=&\ \mathsf{P}\Big(\sum_{k=1}^{m}N_i^k(t_1)=0,\sum_{k=1}^{m}N_j^k(t_2)=0\Big)\\
=&\ \mathsf{P}(N_i^1(t_1)=0,\ldots,N_i^m(t_1)=0,N_j^1(t_2)=0,\ldots,N_j^m(t_2)=0)\\
=&\ \prod_{k=1}^{m}\mathsf{P}(N_i^k(t_1)=0,N_j^k(t_2)=0)\\
=&\ \prod_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{+\infty}\mathsf{P}(N_i^k(t_1)=0,N_j^k(t_2)=0|N^k(t_2)=l)\mathsf{P}(N^k(t_2)=l)\\
=&\ \prod_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{+\infty}\mathsf{P}(N_i^k(t_1)=0|N^k(t_2)=l)\mathsf{P}(N_j^k(t_2)=0|N^k(t)=l)\mathsf{P}(N^k(t_2)=l)\\
=&\ \prod_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{+\infty}C_l^0\Big(1-\Big(\int_0^{t_1}p_i^k(s)\mathrm{d}s\Big)/t_2\Big)^l C_l^0\Big(1-\Big(\int_0^{t_2}p_j^k(s)\mathrm{d}s\Big)/t_2\Big)^l\frac{e^{-\lambda_k t_2}(\lambda_k t_2)^l}{l!}\\
=&\ \prod_{k=1}^{m}e^{(1-(\int_0^{t_1}p_i^k(s)\mathrm{d}s)/t_2)^l(1-(\int_0^{t_2}p_j^k(s)\mathrm{d}s)/t_2)^l\lambda_k t_2-\lambda_k t_2}\\
=&\ e^{\sum\limits_{k=1}^{m}[(1-(\int_0^{t_1}p_i^k(s)\mathrm{d}s)/t_2)(1-(\int_0^{t_2}p_j^k(s)\mathrm{d}s)/t_2)-1]\lambda_k t_2}.\qquad\Box
\end{aligned}$$

注记 4 如果稀疏概率$p_i^k(s),p_j^k(s)$, $k=1,2,\ldots,m;\ i,j=1,2,\ldots,n;\ i\neq j$与时间无关, 即稀疏概率为常值$p_i^k,p_j^k$, $k=1,2,\ldots,m;\ i,j=1,2,\ldots,n;\ i\neq j$, 且$0<t_1\leq t_2$时, 我们得到

$$\mathsf{P}(\tau_i>t_1,\tau_j>t_2)=e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}[(p_i^k t_1+p_j^k t_2)-p_i^k p_j^k t_1]\lambda_k},$$

进一步, 令$t_1=t_2$, 于是有

$$\mathsf{P}(\tau_i\wedge\tau_j>t_1)=e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}[(p_i^k+p_j^k)-p_i^k p_j^k]\lambda_k t_1}.$$

命题 2.2 如果$t_1<t_2<\cdots<t_n$, 则$(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)$的联合概率分布由下式给出:

$$\mathsf{P}(\tau_1>t_1,\tau_2>t_2,\ldots,\tau_n>t_n)=e^{\sum\limits_{k=1}^{m}\big(\prod\limits_{j=1}^{n}(1-(\int_0^{t_j}p_j^k(s)\mathrm{d}s)/t_n)\lambda_k t_n-\lambda_k t_n\big)}.$$

证明: 由于证明过程与命题2.1完全类似, 故略去不证. $\Box$

注记 5　如果稀疏概率$p_i^k(s)$, $k=1,2,\dots,m$; $i=1,2,\dots,n$与时间无关, 即稀疏概率为常值p_i^k, $k=1,2,\dots,m$; $i=1,2,\dots,n$, 且$t_1=t_2=\cdots=t_n=t$时, 我们得到

$$\mathsf{P}(\tau_1\wedge\tau_2\wedge\cdots\wedge\tau_n>t)=e^{\sum\limits_{k=1}^{m}\Big[(-1)^1\sum\limits_{j=1}^{n}p_j^k+(-1)^2\sum\limits_{j_1\neq j_2=1}^{n}p_{j_1}^kp_{j_2}^k+\cdots+(-1)^n\prod\limits_{j=1}^{n}p_j^k\Big]\lambda_kt}.$$

下面我们给出违约指标变量的线性相关系数的定义(参见[7]):

$$\rho(1_{\tau_i\leq t},1_{\tau_j\leq t})=\frac{\mathsf{P}(\tau_i\leq t,\tau_j\leq t)-\mathsf{P}(\tau_i\leq t)\mathsf{P}(\tau_j\leq t)}{\sqrt{\mathsf{P}(\tau_i\leq t)(1-\mathsf{P}(\tau_i\leq t))}\sqrt{\mathsf{P}(\tau_j\leq t)(1-\mathsf{P}(\tau_j\leq t))}},$$

经过简单的计算, 我们得到下式:

$$\rho(1_{\tau_i\leq t},1_{\tau_j\leq t})=\frac{\mathsf{P}(\tau_i> t,\tau_j> t)-\mathsf{P}(\tau_i> t)\mathsf{P}(\tau_j> t)}{\sqrt{\mathsf{P}(\tau_i> t)(1-\mathsf{P}(\tau_i> t))}\sqrt{\mathsf{P}(\tau_j> t)(1-\mathsf{P}(\tau_j> t))}}.$$

注记 6　如果τ_i,τ_j分别是第i,j个公司的违约时刻($i,j=1,2,\dots,n$; $i\neq j$), 且稀疏概率为常值p_i^k,p_j^k, $k=1,2,\dots,m$; $i,j=1,2,\dots,n$; $i\neq j$, 则这两个公司的违约指标变量的线性相关系数由下式给出:

$$\rho(1_{\tau_i\leq t},1_{\tau_j\leq t})=\frac{e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}[(p_i^k+p_j^k)-p_i^kp_j^k]\lambda_kt}-e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}(p_i^k+p_j^k)\lambda_kt}}{\sqrt{e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}(p_i^k+p_j^k)\lambda_kt}\Big(1-e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}p_i^k\lambda_kt}\Big)\Big(1-e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}p_j^k\lambda_kt}\Big)}}.$$

§3.　信用违约互换的互换率及对手风险的度量

在这一节我们考虑信用违约互换(Credit Default Swap, CDS)的对手风险(counterparty risk). 信用违约互换是违约保护买方和卖方之间的协议, 保护卖方承诺在参考资产(reference credit)违约事件发生时支付保护买方的损失, 而保护买方购买此承诺, 并做定期支付, 直到参考资产违约或合约到期. 信用违约互换将参考资产的信用风险剥离, 转移这些资产因信用事件而产生的潜在损失, 因而被广泛地应用于转移、规避和对冲信用风险, 是信用风险管理的一种重要工具. 一般来说, 参考资产可能在任何时刻违约, 而保护买方定期支付给保护卖方的互换费是在合约签订之日就商定好的, 此互换费是信用违约互换合约最核心的问题.

在信用违约互换产生之初及以后很长的一段时期里, 都是不考虑保护买卖双方的违约可能性的, 即认为双方都不会违约. 然而2008年金融风暴发生以后, 一些大的投行的破产表明任何交易对手都是有可能违约的. 那么在计算互换费时, 就需要考虑对手风险, 在此我们考虑保护卖方有可能违约, 保护买方不会发生违约的具有单边对手风险的情况.

我们首先计算无对手风险的信用违约互换的互换率, 然后再计算有单边对手风险的信用违约互换的互换率, 两者之差就可以度量对手风险的大小, 这种度量对手风险的方式与Leung和Kwok (2009)类似, 不过他们考虑的是传染模型.

我们假设无违约短期利率r_t是一个确定性函数. A是信用保护买方, B是信用保护卖方, C为参考方. 从合约签订之日起($t=0$), 保护买方A将定期支付保护费用给保护卖方B, 直到参考方C违约或合约到期(到期日为T); 作为交换, 保护卖方B将在参考方C违约之时补偿保护买方A的损失. 不失一般性, 我们假设参考方C的票面价值为1, C违约时($t=\tau_1$), 其回收率为R_1, 若保护卖方B可能违约, 则它违约时($t=\tau_2$), 其回收率为R_2. 在连续时间模型中, 保护买方A在单位时间内支付给保护卖者的费用即为互换率(premium rate).

首先考虑无对手风险的CDS的互换率. 由于进入一个CDS合约是不需要任何费用的, 故由无套利原则知互换率κ应满足下式:

$$\mathsf{E}\Big(\kappa\int_0^T e^{-\int_0^t r_s\mathrm{d}s}1_{\tau_1>t}\mathrm{d}t\Big)=\mathsf{E}\big((1-R_1)e^{-\int_0^{\tau_1}r_s\mathrm{d}s}1_{\tau_1\le T}\big),$$

于是得到无对手风险的CDS的互换率为

$$\kappa=\frac{\mathsf{E}\big((1-R_1)e^{-\int_0^{\tau_1}r_s\mathrm{d}s}1_{\tau_1\le T}\big)}{\mathsf{E}\Big(\displaystyle\int_0^T e^{-\int_0^t r_s\mathrm{d}s}1_{\tau_1>t}\mathrm{d}t\Big)}.$$

如果无违约短期利率、稀疏概率均为常数, 我们得到一个简单的结果:

$$\kappa=(1-R_1)\sum_{k=1}^m p_1^k\lambda_k.$$

接下来考虑单边对手风险的情形: 保护买方A将定期支付保护费用给保护卖方B, 直到B或C违约或合约到期; 作为交换, 若在到期日T之前C违约了, B将在C违约之时补偿A的损失: 若C违约之时B未违约, 则补偿$1-R_1$, 若C违约之时B同时违约, 则补偿$(1-R_1)R_2$; 若在到期日T之前C未违约, 而B违约了, 则按照如下方式结算: 若无对手风险的CDS在τ_2时刻的价值P_{τ_2} (P_t的定义见下述定义3.1)为正(对保护买者而言), 则B支付A结算金$R_2P_{\tau_2}$, 无对手风险的CDS在τ_2时刻的价值P_{τ_2}为负(对保护买者而言), 则A支付B结算金$P^-_{\tau_2}$.

注记 7 关于结算金的计算, 尽管通常都是采用用无对手风险的CDS在(τ_2)时刻的价值计算结算金, 然而Crepey, Jeanblanc和Zargari (2010)提出了不同的看法, 他们指出用有对手风险的CDS在τ_2时刻的价值来计算结算金更合理, 而他们的数值计算又表明, 实际上这两种算法结果相差非常小, 所以用无对手风险的CDS在τ_2时刻的价值计算结算金是没有问题的.

注记 8 $P^+_{\tau_2}$和$P^-_{\tau_2}$分别是指P_{τ_2}的正部和负部.

于是由无套利原则知有对手风险的CDS的互换率κ'应满足下式:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\Big(\kappa'\int_0^T e^{-\int_0^t r_s\mathrm{d}s}1_{\tau_1\wedge\tau_2>t}\mathrm{d}t\Big)\quad&=\quad\mathsf{E}\big((1-R_1)e^{-\int_0^{\tau_1}r_s\mathrm{d}s}1_{\tau_1\le T}(1_{\tau_1<\tau_2}+R_21_{\tau_1=\tau_2})\\&\qquad+e^{-\int_0^{\tau_2}r_s\mathrm{d}s}1_{\tau_2\le T}1_{\tau_2<\tau_1}(R_2P^+_{\tau_2}-P^-_{\tau_2})\big).\end{aligned}$$

为了得到互换率κ', 我们需要下面两个引理:

引理 3.1　设$1_{\tau_1=\tau_2>t}=1_{\tau>t}$, 且稀疏概率均为常数, 则

$$\mathsf{P}(\tau>t)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}p_1^kp_2^k}{\sum\limits_{k=1}^{m}(p_1^k+p_2^k-p_1^kp_2^k)}e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}(p_1^k+p_2^k-p_1^kp_2^k)\lambda_k t}.$$

证明:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\tau>t)&=\mathsf{P}(\tau_1\wedge\tau_2>t)\\&-\int_t^{+\infty}\int_{t_1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{m}(p_1^k-p_1^kp_2^k)\lambda_k\sum_{k=1}^{m}p_2^k\lambda_k e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}(p_1^kt_1+p_2^kt_2-p_1^kp_2^kt_1)\lambda_k}\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1\\&-\int_t^{+\infty}\int_{t_2}^{+\infty}\sum_{k=1}^{m}(p_2^k-p_1^kp_2^k)\lambda_k\sum_{k=1}^{m}p_1^k\lambda_k e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}(p_1^kt_1+p_2^kt_2-p_1^kp_2^kt_2)\lambda_k}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2,\end{aligned}$$

把命题2.1的结果代入, 可求得

$$\mathsf{P}(\tau>t)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}p_1^kp_2^k}{\sum\limits_{k=1}^{m}(p_1^k+p_2^k-p_1^kp_2^k)}e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}(p_1^k+p_2^k-p_1^kp_2^k)\lambda_k t}.\qquad\square$$

参考公司的违约指标过程$1_{\tau_1\leq t}$生成的σ-代数记为$\mathcal{H}_t$, 即$\mathcal{H}_t=\sigma(1_{\tau_1\leq u}:u\leq t)$. 在计算无对手风险CDS在$t$时刻的价值时, 我们参考Crepey, Jeanblanc和Zargari (2010)的定义.

定义 3.1　无对手风险CDS的价格过程由下式给出:

$$P_t=\mathsf{E}(p_T(t)|\mathcal{H}_t),$$

其中$p_T(t)$是无对手风险CDS在时间段$(t,T]$上的累积折现支付:

$$e^{-\int_0^t r_s\mathrm{d}s}p_T(t)=-\kappa(T)\int_{t\wedge\tau_1}^{T\wedge\tau_1}e^{-\int_0^s r_u\mathrm{d}u}\mathrm{d}s+(1-R_1)e^{-\int_0^{\tau_1}r_s\mathrm{d}s}1_{\{t<\tau_1\leq T\}}.$$

引理 3.2　若稀疏概率均为常数, $0<t\leq T$, 则我们有

$$P_t=1_{\tau_1>t}\Big((1-R_1)\sum_{k=1}^{m}p_1^k\lambda_k-\kappa\Big)\int_t^T e^{-\int_t^s r(u)\mathrm{d}u}e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}p_1^k\lambda_k(s-t)}\mathrm{d}s.$$

证明:　证明方法与Crepey, Jeanblanc和Zargari (2010)命题3.3的证明方法类似, 故略去.　$\square$

注记 9　把κ的表达式代入, 则得到$P_t=0$.

注记 10　由于我们假设可能引起违约的事件的来到次数为齐次泊松过程以及稀疏概率为常数, 这使得参考公司的违约强度不变, 从而相应的CDS的互换率不会发生变化, 故有$P_t=0$.

命题 3.1 若稀疏概率、无风险利率均是常数, 则有对手风险的CDS的互换率有如下表达:

$$\kappa' = (1-R_1)\sum_{k=1}^{m}(p_1^k-(1-R_2)p_1^kp_2^k)\lambda_k.$$

证明: 若稀疏概率、无风险利率均是常数, 则我们有下面三个等式, 它们分别对应着保费支付项、赔偿支付项和结算金项:

$$\mathsf{E}\Big(\kappa'\int_0^T e^{-\int_0^t r_s\mathrm{d}s}1_{\tau_1\wedge\tau_2>t}\mathrm{d}t\Big) = \kappa'\frac{1-e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}(p_1^k+p_2^k-p_1^kp_2^k)\lambda_kT}}{\sum\limits_{k=1}^{m}(p_1^k+p_2^k-p_1^kp_2^k)\lambda_k+r};$$

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\big((1-R_1)e^{-\int_0^{\tau_1} r_s\mathrm{d}s}1_{\tau_1\le T}(1_{\tau_1<\tau_2}+R_21_{\tau_1=\tau_2})\big)\\ =\ & (1-R_1)\sum_{k=1}^{m}(p_1^k-(1-R_2)p_1^kp_2^k)\lambda_k\frac{1-e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}(p_1^k+p_2^k-p_1^kp_2^k)\lambda_kT}}{\sum\limits_{k=1}^{m}(p_1^k+p_2^k-p_1^kp_2^k)\lambda_k+r}.\end{aligned}$$

故我们有下面的表达式:

$$\kappa' = (1-R_1)\sum_{k=1}^{m}(p_1^k-(1-R_2)p_1^kp_2^k)\lambda_k. \qquad \square$$

注记 11 结合κ的表达式, 我们可以得到两者之差作为对手风险的一种度量:

$$\kappa-\kappa' = (1-R_1)\sum_{k=1}^{m}(1-R_2)p_1^kp_2^k\lambda_k.$$

§4. 数值分析

在这一节中, 我们考虑仅有两个公司、仅有一类引起公司违约的随机因素并且稀疏概率为常值的简单情形, 即$n=2$, $m=1$, p_1,p_2是常数的情形. 这里下标1指参考公司的相关量, 下标2指保护卖者的相关量. 下面我们对违约相关系数、无对手风险CDS的互换率、有对手风险CDS的互换率, 作数值计算, 并对数值结果作一个分析. 固定以下参数值不变:

$$\lambda=0.1,\qquad r=0.05,\qquad T=3,\qquad R_1=R_2=0.4.$$

按照注记6可以计算出两个公司的违约相关性系数. 当变动两个公司的稀疏概率时, 我们发现相关性系数发生较大的变化, 它从0.1387变到0.7266 (见表1), 这说明稀疏相关性不仅能产生较低的相关性, 也可以产生较高的相关性, 这是条件违约独立模型所不具备的. 从表1还可以发现相关性系数分别是p_1,p_2的增函数.

从表2我们看出无对手风险CDS的互换率κ随着参考公司的稀疏概率的增大而变大(由其表达式知道κ与保护卖者的稀疏概率是无关的).

从表3我们看出有对手风险CDS的互换率κ'随着参考公司的稀疏概率的增大而变大, 随着保护卖者的稀疏概率的增大而变小. 前者是因为随着参考公司的违约可能性的增大, 保护买者需支付更多的保费; 后者是因为随着保护卖者的违约可能性的增大, 保护买者未来可能得到的赔偿会更少, 相应的他应该支付更少的保费.

结合表2和表3我们看出作为对手风险的度量$\kappa-\kappa'$随着保护卖者的稀疏概率的增大而变大. 这是因为随着保护卖者的稀疏概率的增大κ不变, 而κ'变小, 从而$\kappa-\kappa'$变大.

表1 违约相关性系数随稀疏概率的变化而发生较大的变化

两个公司的违约相关性系数				
p_1 \ p_2	0.2	0.4	0.6	0.8
0.1	0.1387	0.1937	0.2344	0.2673
0.3	0.238	0.3345	0.4071	0.4671
0.5	0.3044	0.4305	0.5271	0.6085
0.7	0.3568	0.5077	0.6255	0.7266

表2 互换率随参考资产的稀疏概率p_1的增加而变大

无对手风险CDS的互换率κ				
p_1	0.1	0.3	0.5	0.7
κ	0.006	0.018	0.03	0.042

表3 κ'随保护买方的稀疏概率的增大而变小

有对手风险CDS的互换率κ'				
p_1 \ p_2	0.2	0.4	0.6	0.8
0.1	0.0053	0.0046	0.0038	0.0031
0.3	0.0158	0.0137	0.0115	0.0094
0.5	0.0264	0.0228	0.0192	0.0156
0.7	0.037	0.0319	0.0269	0.0218

§5. 结　　论

本论文在约化模型框架中引入了一个新的违约相关性—稀疏相关性, 数值分析结果表明这种违约相关结构不仅能产生较低的相关性, 也可以产生较高的相关性, 这是条件独立模型所不具备的. 另外由于联合违约概率能解析地表示出来, CDS的互换率自然也可以解析地表达, 也就是此模型还具有易处理性.

为了得到更加简洁的表达式, 我们假设稀疏概率是常值, 这不免与现实不符. 在现实中, 稀疏概率不可能是恒定的, 随着时间的推移, 它会发生变化, 而且还有可能是随机的. 所以我们将在以后的工作中考虑稀疏概率是随机的情况.

参 考 文 献

[1] Jarrow, R.A. and Turnbull, S.M., Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *The Journal of Finance*, **50**(1995), 53–85.

[2] Davis, M. and Lo, V., Infectious defaults, *Quantitative Finance*, **1**(2001), 382–387.

[3] Jarrow, R.A. and Yu, F., Counterparty risk and the pricing of defaultable securities, *The Journal of Finance*, **56**(2001), 1765–1799.

[4] Li, D.X., On default correlation: a copula function approach, *The Journal of Fixed Income*, **9**(2000), 43–54.

[5] Wang, G.J. and Yuen, K.C., On a correlated aggregate claims model with thinning-dependence structure, *Insurance: Mathematics and Economics*, **36**(2005), 456–468.

[6] Ross, S.M., *Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1996.

[7] Giesecke, K., A simple exponential model for dependent defaults, *The Journal of Fixed Income*, **13**(2003), 74–83.

[8] Leung, K.S. and Kwok, Y.K., Counterparty risk for credit default swaps: Markov chain interacting intensities model with stochastic intensity, *Asia-Pacific Financial Markets*, **16**(2009), 169–181.

[9] Crepey, S., Jeanblanc, M. and Zargari, B., Counterparty risk on a CDS in a Markov chain copula model with joint defaults, In *Recent Advances In Financial Engineering 2009* (Kijima, M., Hara, C., Tanaka, K. and Muromachi, Y., Eds.), World Scientific Publishing Company, Singapore, 2010, 91–126.

A Reduced Model with Thinning-Dependence Structure

LIANG XUE[1,2] WANG GUOJING[1]

([1] *Center for Financial Engineering of Soochow University, Suzhou, 215006*)

([2] *Department of Mathematics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou, 215009*)

The class of reduced form models is a very important class of credit risk models, and the modelling of the default dependence structure is essential in the reduced form models. This paper models dependent defaults under a thinning-dependent structure in the reduced form framework. In our tractable model, the joint survival probability for correlated defaults can be derived, and hence the CDS premium rates (with or without counterparty risk) are given in closed form. The numerical result shows that the thinning-dependent structure is effective to model the default dependence.

Keywords: Reduced form model, default correlation, thinning-dependence structure, credit default swaps (CDS), counterparty risk, swap premium rate.

AMS Subject Classification: 91B28.