应用概率统计　第三十卷
第一期　2014年2月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.30 No.1 Feb. 2014

# SLE$_\kappa$ ($\kappa > 4$)的Cardy公式 *

周仕忠[1,2]　　蓝师义[1]

([1]广西民族大学理学院, 南宁, 530006; [2]南京理工大学理学院, 南京, 210094)

**摘　要**

Cardy给出临界渝流族横穿一个长方形而不碰到长方形的上边和下边的概率估计公式; Lawler, Schramm和Werner给出了参数$\kappa = 6$的通弦随机Loewner演变(SLE$_6$)穿过长方形的类似的概率估计公式. 在本文, 我们将后者的结果推广到$\kappa > 4$的情形.

**关键词:** SLE$_\kappa$, Cardy公式, 临界渝流族.

**学科分类号:** O153.3, O151.21.

## §1. 引　言

随机Loewner演变(stochastic Loewner evolution, 简称SLE)是Schramm (2000)在研究回路删除随机游动和一致生成树的尺度极限时引入的一种研究离散物理模式的一个随机过程. 它是集合$K_t$增长的一个随机过程, 集合$K_t$依时间参数$t$的演变可以通过$K_t$的余集上规范共形映射$g_t = g_t(z)$来描述的, 这里映射$g_t$是驱动函数为一维Brownian运动的Loewner微分方程的解. 其完整的定义将在下面第2节给出.

Cardy (1992)在讨论有限几何中临界渝流时给出了临界渝流族穿过一个长方形而不碰到长方形的上边和下边的概率(用$\Lambda(x)$表示)估计(称为Cardy公式). 也就是, 对于$x \in (0,1)$, 有

$$\Lambda(x) = \frac{3\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)^2} x^{1/3}\,{}_2F_1\Big(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; x\Big). \tag{1.1}$$

Lawler, Schramm和Werner (2001a)在研究半平面中Brownian运动的相交指数时, 得到了关于SLE$_6$的Cardy公式. 即对于所有的$b \geq 0$, $x \in (0,1)$, 成立

$$\Lambda(x,b) = \frac{\sqrt{\pi}\,2^{-2\widehat{b}}\,\Gamma(5/6+\widehat{b})}{\Gamma(1/3)\Gamma(1+\widehat{b})} x^{1/6+\widehat{b}}\,{}_2F_1\Big(\frac{1}{6}+\widehat{b}, \frac{1}{2}+\widehat{b}, 1+2\widehat{b}; x\Big), \tag{1.2}$$

这里$\widehat{b} = \sqrt{1+24b}/6$.

在本文, 我们利用SLE$_\kappa$的基本性质和超几何方程的一些结果, 讨论$\kappa > 4$的SLE$_\kappa$的类似的概率估计公式. 也就是, 将公式(1.2)推广到$\kappa > 4$的情形. 更确切地, 设$K_t$是上半平面

*国家自然科学基金(11161004)和广西自然科学基金(2013GXNSFAA019015)资助.
本文2010年11月15日收到.
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2014.01.003

$\mathbb{H}$内SLE$_\kappa$ $(\kappa>4)$过程$g_t=g_{K_t}$的壳, 其中驱动函数$\xi(t)$开始于$x\in(0,1)$, 也就是, $K_t$是由开始于0的标准SLE$_\kappa$ $(\kappa>4)$的壳平移$x$得到. 则我们有下面的定理.

**定理 1.1** 对于一切$b\geq 0$, $x\in(0,1)$, $\kappa>4$, 如果令$T_0=\sup\{t\geq 0:\overline{K}_t\cap(-\infty,0]=\emptyset\}$, $T_1=\sup\{t\geq 0:\overline{K}_t\cap[1,\infty)=\emptyset\}$, $T=\min\{T_0,T_1\}$, $f_t(z)=[g_t(z)-g_t(0)]/[g_t(1)-g_t(0)]$, 则有

$$\begin{aligned}\Lambda_\kappa(x,b) &= \frac{\Gamma(3/2-6/\kappa+\widehat{b}_\kappa)\Gamma(1/2+2/\kappa+\widehat{b}_\kappa)}{\Gamma(1-4/\kappa)\Gamma(1+2\widehat{b}_\kappa)}x_2^{1/2-2/\kappa+\widehat{b}_\kappa}\\ &\quad\times F_1\Big(\frac{1}{2}-\frac{2}{\kappa}+\widehat{b}_\kappa,\frac{6}{\kappa}-\frac{1}{2}+\widehat{b}_\kappa,1+2\widehat{b}_\kappa;x\Big),\end{aligned}\tag{1.3}$$

这里$\widehat{b}_\kappa=\sqrt{(\kappa-4)^2+16\kappa b}/(2\kappa)$, $\Lambda_\kappa(1-x,b)=\mathsf{E}_x[(f_T'(1))^b1_{\{T_0<T_1\}}]$.

**注记 1** 容易知道, 在定理1.1中若令$\kappa=6$, 则公式(1.3)就变成(1.2); 进一步, 除了令$\kappa=6$外, 若再令$b=0$, 那么公式(1.3)就变成(1.1).

与文[3]类似, 我们的证明方法如下: 首先, 我们通过定义一个新的关于$\xi(t)$的规范化形式以及新的时间参数, 然后我们导出了$\Lambda_\kappa(x,b)$满足的超几何微分方程, 最后由超几何微分方程的性质得到了所需要的结论.

## §2. 通弦随机Loewner演变和超几何函数

在这一节, 我们简明扼要地给出SLE的定义及其相关性质, 同时给出超几何函数的定义. 更多的背景知识可参见[4–6, 8]等.

### 2.1 通弦SLE及其性质

假设$B_t$是直线$\mathbb{R}$上开始于$B_0=0$的标准布朗运动, 对于$\kappa>0$, 令$\xi(t)=\sqrt{\kappa}B_t$. 记$\mathbb{H}=\{z:\mathrm{Im}(z)>0\}$, 则对于$z\in\overline{\mathbb{H}}\setminus\{0\}$, 我们令$g_t(z)$为下面常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\partial_t g_t(z)=\dfrac{2}{g_t(z)-\xi(t)},\\ g_0(z)=z\end{cases}\tag{2.1}$$

的解. 显然, 只要$g_t(z)-\xi(t)$有界且不等于0时, 则这个初值问题的解总是存在的.

我们用$\tau(z)$表示第一次时间$\tau$使得当$t\nearrow\tau$时, 0是$g_t(z)-\xi(t)$的极限点, 也就是

$$\tau(z)=\inf\Big\{t:\lim_{t\nearrow\tau}(g_t(z)-\xi(t))=0\Big\}.\tag{2.2}$$

如果我们令

$$H_t=\{z\in\mathbb{H}:\tau(z)>t\},\qquad K_t=\{z\in\overline{\mathbb{H}}:\tau(z)\leq t\},$$

则容易验证, 对于所有$t \geq 0$, $K_t$是紧集, $H_t$是开集. 我们把含有参数$t$的映射集合$(g_t : t \geq 0)$称为通弦SLE$_\kappa$ (stochastic-Loewner evolution). 集合$K_t$称为SLE的壳. 也容易验证, 对于每个$t \geq 0$, 映射$g_t : H_t \longmapsto \mathbb{H}$是一个共形同胚映射, 而且$H_t$是$\mathbb{H} \backslash K_t$的无界分支. 过程$\xi(t)$称为SLE的驱动过程或驱动函数.

**引理 2.1** (SLE的尺度不变性和稳定性) (i) SLE$_\kappa$在下面意义下是尺度不变的. 令$K_t$是SLE$_\kappa$的壳, $\alpha > 0$, 则过程$t \longmapsto \alpha^{-1/2} K_{\alpha t}$与过程$t \longmapsto K_t$有相同的分布; 过程$(t, z) \longmapsto \alpha^{-1/2} g_{\alpha t}(\sqrt{\alpha} z)$与过程$(t, z) \longmapsto g_t(z)$有相同的分布.

(ii) 设$t_0 > 0$, 则映射$(t, z) \longmapsto \widetilde{g}_t(z) = g_{t+t_0} \circ g_t^{-1}(z + \xi(t_0)) - \xi(t_0)$与映射$(t, z) \longmapsto g_t$有相同的分布. 而且$(\widetilde{g}_t)_{t \geq 0}$与$(g_t)_{0 \leq t \leq t_0}$是相互独立的.

**证明:** 尺度不变性(i)的证明容易从布朗运动的尺度不变性质得到; 而性质(ii)也容易从布朗运动的Markov性质以及平移不变性得到. 具体证明过程可以参见[7, 10]等. □

我们来看关于通弦随机Loewner演变碰撞事件的概率. 假定$a < 0 < c$, 固定$\kappa > 0$, 用$E_{a,c}$表示通弦SLE$_\kappa$先碰到$[c, \infty)$后碰到$(-\infty, a]$的事件. 这里我们仅限于假定$\kappa > 4$, 否则它从不碰到这些区间. 我们的目标是计算$E_{a,c}$的概率, 通弦SLE的尺度不变性表明这是一个仅与比率$c/a$有关的函数. 因此若在区间$(0, 1)$上定义函数$F = F_\kappa$为$F(-a/(c-a)) = \mathsf{P}[E_{a,c}]$对于任意$a < 0 < c$, 则我们有

**引理 2.2** 对于所有$\kappa > 4$, $x \in (0, 1)$, 有

$$F(x) = c(\kappa) \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{u^{4/\kappa}(1-u)^{4/\kappa}}, \tag{2.3}$$

其中$c(\kappa) = \left( \int_0^1 u^{-4/\kappa}(1-u)^{-4/\kappa} \mathrm{d}u \right)^{-1}$.

**证明:** 这个引理的证明见[7]. □

## 2.2 超几何函数$_2F_1$

把超几何方程

$$z(1-z)w'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]w' - \alpha\beta w(z) = 0$$

的解解析延拓到全平面$\mathbb{C}$, 这样开拓的函数称为超几何函数, 用

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n \tag{2.4}$$

表示, 这里$(\eta)_n = \prod_{j=0}^{n-1} (\eta + j)$, $(\eta)_0 = 1$. 由超几何函数的定义, 我们容易看到${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; 0) = 1$. 更多的细节可以参见[8].

## §3. 几个引理

为了证明定理1.1, 我们需要下面的几个引理以及一些常用的记号.

用$K_t$表示$\mathbb{H}$中具有驱动函数为$\xi(t)$ (其中$\xi(0)=x\in(0,1)$)的SLE$_\kappa$过程$g_t=g_{K_t}$的壳; $\mathsf{P}_x$与$\mathsf{E}_x$分别表示依赖于$x$的概率与期望.

**引理 3.1** 令$T_0=\sup\{t\geq 0:\overline{K}_t\cap(-\infty,0]=\emptyset\}$, $T_1=\sup\{t\geq 0:\overline{K}_t\cap[1,\infty)=\emptyset\}$, 则$T_0<\infty$, $T_1<\infty$ a.s..

**证明:** 令$Y_t/\sqrt{\kappa}=[g_t(1)-\xi(t)]/\sqrt{\kappa}$, 则容易知道, $Y_t/\sqrt{\kappa}$是具有时间线性尺度且维数为$1+4/\kappa$的Bessel过程. 由Bessel过程的基本性质, 我们知道, 当$\kappa>4$时, $g_t(1)-\xi(t)$几乎肯定在有限时间内碰到0. 显然, $T_1$是$g_t(1)-\xi(t)$碰到0时的时间, 因此$T_1<\infty$ a.s.; 同理, 我们也得到$T_0<\infty$ a.s.. $\square$

**引理 3.2** 设$T_0,T_1$的定义如上引理3.1, 则对于所有的$x\in(0,1)$, 都有$T_0\neq T_1$ a.s.且

$$\lim_{x\to 0}\mathsf{P}_x[T_0<T_1]=1,\qquad \lim_{x\to 1}\mathsf{P}_x[T_0<T_1]=0. \tag{3.1}$$

**证明:** 由引理2.2可知, 当$x\to 0$时, $\overline{K}_T$几乎肯定先碰到$(-\infty,0]$后碰到$[1,\infty)$, 故有$\lim\limits_{x\to 0}\mathsf{P}_x[T_0<T_1]=1$; 而当$x\to 1$时, $\overline{K}_T$几乎肯定先碰到$[1,\infty)$后碰到$(-\infty,0]$, 从而有$\lim\limits_{x\to 1}\mathsf{P}_x[T_0<T_1]=0$. $\square$

**引理 3.3** 设$T=\min\{T_0,T_1\}$, $T_0,T_1$的定义如上引理3.1, 若令$f_t(z)=[g_t(z)-g_t(0)]/[g_t(1)-g_t(0)]$, 则$\lim\limits_{t\nearrow T}f_t'(1)>0$当且仅当$T_0<T_1$.

**证明:** 充分性. 若$T_0<T_1$, 则$\overline{K}_T\cap[1,\infty)=\emptyset$. 因此$f_T$在1的附近是有定义而且是共形映射, 由Schwarz反射原理, 我们有$f_T'(1)>0$.

必要性(用反证法). 假设$T_1<T_0$, 则$\overline{K}_T\cap[1,\infty]\neq\emptyset$. 我们断言:

$$1\in\overline{K}_{T_1}\qquad \text{a.s..} \tag{3.2}$$

因为$\overline{K}_{T_1}\cap[1,\infty)\neq\emptyset$. 这就意味着$K_{T_1}$在$\mathbb{H}$中分离1与$\infty$. 事实上, 令$\phi:\mathbb{H}\mapsto\mathbb{H}$是一个使$x$固定, 交换1与$\infty$的反共形自同胚映射. 由$T_1<\infty$ a.s.和$\sup\limits_{t\to T_1}|\xi(t)|<\infty$ a.s., 我们得到$K_{T_1}$是几乎肯定有界的, 这推出当$t\nearrow T_1$时, $\phi(K_T)$是有界且不包含1. 而由SLE的局部性质[3], 我们知道, 到达时间$T_1$之前$K_t$与$\phi(K_t)$关于时间变化的分布是相同的. 因此, 几乎肯定当$t\nearrow T_1$时, $\phi(K_t)$有界且不包含1, 从而就证明了(3.2). 由$1\in\overline{K}_{T_1}$ a.s., 我们推出$\mathbb{H}\setminus K_t$中从0的邻域到1的邻域的极值长度趋向于$\infty$, 当$t\nearrow T_1$时. 因此, 当$T_1<T_0$时, $\lim\limits_{t\nearrow T_1}f_t'(1)=0$ a.s., 这与已知条件$\lim\limits_{t\nearrow T}f_t'(1)>0$发生矛盾. 从而完成了这个引理的证明. $\square$

## §4.　定理1.1的证明

在这一节, 我们将给出定理1.1的证明.

**定理1.1的证明:**　首先, 我们定义$\xi(t)$的规范化形式为$Z(t) := [\xi(t) - g_t(0)]/[g_t(1) - g_t(0)]$和新的时间参数$s = s(t) := \int_0^t \mathrm{d}t/[g_t(1) - g_t(0)]^2$, 对于$t < T$, 设$s_0 = \lim_{t \nearrow T} s(t)$. 则由引理3.1以及$\inf\{g_t(1) - g_t(0) : t < T\} > 0$ a.s.可知, $s_0 < \infty$ a.s.. 用$t(s)$表示映射$t \mapsto s(t)$的逆映射, 则由(2.1)我们有

$$\begin{aligned}
\partial s(f_{t(s)}(z)) &= \partial s\Big(\frac{g_{t(s)}(z) - g_{t(s)}(0)}{g_{t(s)}(1) - g_{t(s)}(0)}\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{g_{t(s)}(z) - g_{t(s)}(0)}{g_{t(s)}(1) - g_{t(s)}(0)}\Big)\frac{\partial t}{\partial s} \\
&= \Big(\frac{2}{g_{t(s)}(z) - \xi(t)} - \frac{2}{g_{t(s)}(0) - \xi(t)}\Big)(g_{t(s)}(1) - g_{t(s)}(0)) \\
&\quad - (g_{t(s)}(z) - g_{t(s)}(0))\Big(\frac{2}{g_{t(s)}(1) - \xi(t)} - \frac{2}{g_{t(s)}(0) - \xi(t)}\Big) \\
&= \frac{2(g_{t(s)}(1) - g_{t(s)}(0))}{g_{t(s)}(z) - \xi(t)} + \frac{2(g_{t(s)}(z) - g_{t(s)}(1))}{g_{t(s)}(0) - \xi(t)} - \frac{2(g_{t(s)}(z) - g_{t(s)}(0))}{g_{t(s)}(1) - \xi(t)}.
\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\partial s(f_{t(s)}(z)) = \frac{2}{f(t) - Z(t)} + \frac{2(1 - f_t(z))}{Z(t)} - \frac{2f_t(z)}{1 - Z(t)}. \tag{4.1}$$

另外, 由$Z(t)$的定义, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Z(t) &= \mathrm{d}\Big(\frac{\xi(t) - g_t(0)}{g_t(1) - g_t(0)}\Big) \\
&= \frac{1}{(g_t(1) - g_t(0))^2}\Big\{\Big(\mathrm{d}\xi(t) - \frac{2\mathrm{d}t}{g_t(0) - \xi(t)}\Big)(g_t(1) - g_t(0)) \\
&\quad - (\xi(t) - g_t(0))\Big(\frac{2\mathrm{d}t}{g_t(1) - \xi(t)} - \frac{2\mathrm{d}t}{g_t(0) - \xi(t)}\Big)\Big\} \\
&= \frac{\mathrm{d}\xi(t)}{g_t(1) - g_t(0)} - \frac{2\mathrm{d}t}{(g_t(1) - g_t(0))^2} \\
&\quad \times \Big(\frac{g_t(1) - g_t(0)}{g_t(0) - \xi(t)} + \frac{\xi(t) - g_t(0)}{g_t(1) - \xi(t)} - \frac{\xi(t) - g_t(0)}{g_t(0) - \xi(t)}\Big).
\end{aligned}$$

这给出

$$\mathrm{d}Z(t) = \frac{\mathrm{d}\xi(t)}{g_t(1) - g_t(0)} + \frac{2\mathrm{d}t}{(g_t(1) - g_t(0))^2}\Big(\frac{1}{Z(t)} + \frac{1}{Z(t) - 1}\Big). \tag{4.2}$$

其次, 我们引入记号: $\widetilde{Z}(s) = Z(t(s))$, $\widetilde{f}_s(z) = f_{t(s)}(z)$, 则有

$$\mathrm{d}\widetilde{Z}(s) = \mathrm{d}z_s + \frac{2(1 - 2\widetilde{Z}(s))}{\widetilde{Z}(s)(1 - \widetilde{Z}(s))}\mathrm{d}s, \tag{4.3}$$

其中$(z_s, s\geq 0)$与$(\xi_t, t\geq 0)$有相同的分布. 同时我们有

$$\partial_s(\widetilde{f}_s(z))=\frac{-2}{\widetilde{Z}(s)-\widetilde{f}_s(z)}+\frac{2(1-\widetilde{f}_s(z))}{\widetilde{Z}(s)}-\frac{2\widetilde{f}_s(z)}{1-\widetilde{Z}(s)}. \tag{4.4}$$

于是, $\widetilde{f}_s(z)$的演变就由方程(4.3)与(4.4)来描述. 注意到$s(T)=s_0$是$\widetilde{Z}(s)$碰到0或者1的第一次时间.

假定$b>0$. 由(4.4)我们得到

$$\partial_s(\log\widetilde{f}_s'(z))=\frac{\partial_s\partial_z\widetilde{f}_s(z)}{\partial_z\widetilde{f}_s(z)}=\frac{-2}{(\widetilde{Z}(s)-\widetilde{f}_s(z))^2}-\frac{2}{\widetilde{Z}(s)}-\frac{2}{1-\widetilde{Z}(s)}, \tag{4.5}$$

这里$\widetilde{f}_s'(z)$是$\widetilde{f}_s(z)$关于$z$的微分. 记$\alpha(s)=\log\widetilde{f}_s'(1)=\log f_{t(s)}'(1)$, 则我们有

$$\partial_s\alpha(s)=\frac{-2}{(\widetilde{Z}(s)-1)^2}-\frac{2}{\widetilde{Z}(s)}-\frac{2}{1-\widetilde{Z}(s)}. \tag{4.6}$$

注意方程(4.3)与(4.6)描述了Markov过程$(\widetilde{Z}(s),\alpha(s))$的演变, 这个过程停止于$s_0$.

设$y(x,v)=\mathsf{E}[\exp(b\alpha(s_0))|\widetilde{Z}(0)=x,\alpha(0)=v]$, 这里期望是相应开始于$\widetilde{Z}(0)=x$, $\alpha(0)=v$的Markov过程. 注意到当$T_0<T_1$时, $\lim\limits_{t\nearrow T}f_t=f_T$在1的邻域内且引理3.3成立, 因此由$y$的定义我们得到$y(x,0)=\Lambda(1-x,b)$. 于是$y(x,v)$是一个$C^\infty$函数. 从强Markov性质[10], 我们推出过程$Y=y(\widetilde{Z}(s),\alpha(s))$是一个局部鞅. 从而在关于d$Y$的Itó公式中, 其漂移项为0, 也就是

$$0=\frac{2(1-2x)}{x(1-x)}\partial_x y+\frac{\kappa}{2}\partial_{xx}^2(y)+\Big(\frac{-2}{(1-x)^2}-\frac{2}{x}-\frac{2}{1-x}\Big)\partial_v y. \tag{4.7}$$

当$\alpha(s)=\alpha(0)+\displaystyle\int_0^u(\partial_s\alpha(s))\mathrm{d}s$时, 我们得到

$$y(x,v)=\exp(bv)y(x,0). \tag{4.8}$$

又设$h(x)=y(1-x,0)=\Lambda(x,b)$, 则有

$$y(x,v)=\exp(bv)h(1-x). \tag{4.9}$$

从而(4.7)变为

$$\begin{aligned}&-\frac{2(1-2x)}{x(1-x)}\exp(bv)h'(1-x)+\frac{\kappa}{2}\exp(bv)h''(1-x)\\&+b\Big(\frac{-2}{(1-x)^2}-\frac{2}{x}-\frac{2}{1-x}\Big)\exp(bv)h(1-x)\quad=\quad 0,\end{aligned}$$

整理后, 我们得到

$$-\frac{2(1-2x)}{x(1-x)}h'(1-x)+\frac{\kappa}{2}h''(1-x)+b(\frac{-2}{(1-x)^2}-\frac{2}{x}-\frac{2}{1-x})h(1-x)=0,$$

去分母后变成

$$-2(1-x)(1-2x)h'(1-x)+\frac{\kappa}{2}x(1-x)^2h''(1-x)-2bh(1-x)=0.$$

令$1-x=t$, 代入得到

$$-2bh(x)+2x(1-2x)h'(x)+\frac{\kappa}{2}x^2(1-x)h''(x)=0. \tag{4.10}$$

又由引理3.2的第二个结论, 即$\lim\limits_{x\to1}\mathsf{P}_x[T_0<T_1]=0$, 我们推出$\lim\limits_{x\searrow0}h(x)=0$, $\lim\limits_{x\nearrow1}h(x)=1$, 因为当$x$接近于0时, 由尺度不变性, $K_{T_0}$可以充分小.

最后, 对微分方程(4.10)可以通过寻求形如$h(x)=x^cZ(x)$的解而得到其显示表达式. 应用待定系数法我们得到它的两个线性独立解为

$$h_i(x)=x^{1/2-2/\kappa+b_i}\,{}_2F_1\Big(\frac{1}{2}-\frac{2}{\kappa}+b_i,\frac{6}{\kappa}-\frac{1}{2}+b_i,1+2b_i;x\Big),$$

这里$b_1=-b_2=\sqrt{(\kappa-4)^2+16\kappa b}/6$, $i=1,2$. 注意到${}_2F_1(a_0,a_1,a_2;0)=1$, 因此, $h(x)$一定是$h_1$与$h_2$的线性组合.

然而, $\lim\limits_{x\searrow0}h(x)=0=\lim\limits_{x\searrow0}h_1(x)$, 但$\lim\limits_{x\searrow0}h_2(x)=\infty$. 所以我们得到$h(x)=ch_1(x)$, 其中$c$为某个常数. 由等式$h(1)=0$与超几何函数在$x=1$时的值, 我们推出这个常数$c$为

$$c=\frac{\Gamma(3/2-6/\kappa+\widehat{b}_\kappa)\Gamma(1/2+2/\kappa+\widehat{b}_\kappa)}{\Gamma(1-4/\kappa)\Gamma(1+2\widehat{b}_\kappa)},$$

其中$\widehat{b}_\kappa=\sqrt{(\kappa-4)^2+16\kappa b}/(2\kappa)$. 上面的证明过程中始终假定$b>0$. 对$b=0$的情形, 我们可以通过令$b\searrow0$取极限而得到. 这就完成了这个定理的证明. $\square$

## 参 考 文 献


[1] Schramm, O., Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel Journal of Mathematics*, **118(1)**(2000), 221–288.

[2] Cardy, J.L., Critical percolation in finite geometries, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **25(4)**(1992), L201–L206.

[3] Lawler, G.F., Schramm, O. and Werner, W., Values of Brownian intersection exponents, I: half-plane exponents, *Acta Mathematica*, **187(2)**(2001a), 237–273.

[4] Lawler, G.F., Schramm, O. and Werner, W., Values of Brownian intersection exponents, II: plane exponents, *Acta Mathematica*, **187(2)**(2001b), 275–308.

[5] Lawler, G.F., Schramm, O. and Werner, W., Values of Brownian intersection exponents, III: two-side exponents, *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques*, **38(1)**(2002), 109–123.

[6] Rohde, S. and Schramm, O., Basic properties of SLE, *Annals of Mathematics*, **161(2)**(2005), 883-924.

[7] Werner, W., Random planar curves and Schramm-Loewner evolutions, *Lecture Notes from the 2002 Saint-Flour Summer School*, Springer, 2003.

[8] Lebedev, N.N., *Special Functions and Their Applications*, Dover, 1972.

[9] Reruz, D. and Yor, M., *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[10] Werner, W., Critical exponents, conformal invariance and planar Brownian motion, In *European Congress of Mathematics*, Vol. II (Barcelona, 2000), Volume 202 of *Progress in Mathematics*, 87–103, Birkhänser, Basel, 2001.




## On Cardy's Formula of $\mathbf{SLE}_\kappa$ $(\kappa > 4)$


ZHOU SHIZHONG[1,2] LAN SHIYI[1]

([1]*School of Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning, 530006*)

([2]*School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094*)



Cardy gave a probabilistic estimation for the critical percolation clusters crossing a rectangle without touching the upper and lower boundaries of the rectangle. Lawler, Schramm and Werner obtained similar probabilistic estimation for the chordal stochastic Loewner evolution with parameter 6 ($\mathrm{SLE}_6$) crossing a rectangle. In this paper, we generalize the latter result to the case $\kappa > 4$.



**Keywords:** $\mathrm{SLE}_\kappa$, Cardy's formula, critical percolation clusters.

**AMS Subject Classification:** 60J67, 82B21.