应用概率统计　第三十卷
第三期　2014年6月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.30 No.3 Jun. 2014

相依利率下离散时间再保险模型的破产问题 *

王丽霞　　李双东

(安徽大学江淮学院公共基础部, 合肥, 230031)

摘　要

本文研究了离散时间一般再保险模型的破产概率, 得出利率为一阶自回归情形下的破产概率满足的微积分方程, 利用递推方法给出破产概率的上界, 并将结果分别运用于比例再保险和超额损失再保险的情形, 最后运用图表对文中得出的结论进行了说明.

关键词:　再保险, 相依利率, 破产概率, 离散模型.

学科分类号:　O211.67.

§1.　引　　言

离散时间风险模型在很多文献中都有讨论, Cai (2002a, 2002b)分别讨论了带随机利率和一阶自回归利率的离散时间风险模型, 并分别通过鞅方法和递推方法得到模型的破产概率上界, He等(2012)将利率推广为马氏过程, 得到了类似的结论, Yang和Zhang (2006)通过鞅方法得出随机利率下破产概率的指数上下界, 在索赔额服从指数分布情形, 给出了破产概率的表达式, 并讨论了破产前盈余、破产后赤字及破产持续时间等破产相关量的分布. 同时, 离散时间情形下的再保险模型的最优控制策略也一直是近年来学者们研究的热点, 然而获得最优策略并非易事, 目前的文献主要讨论比例再保险和超额损失再保险两类再保险方式下模型的最优控制问题[5–11], Diasparra和Romera (2009)将Cai (2002a, 2002b)提出的模型推广为离散时间比例再保险风险模型, 并考虑利率过程为马氏利率, 分别运用递推方法和鞅方法得出常数策略下模型的破产概率的上界, Hipp和Vogt (2003)和Schmidli (2008)则给出超额损失再保险下破产概率的指数上界, Schäl (2004)采用动态规划方法讨论了类似的模型. 但在离散情形下的一般再保险策略的研究较少, 所以本文在Diasparra和Romera (2009)所建立模型的基础上, 将再保险形式推广为一般再保险情形, 并在利率为一阶自回归形式下(由于一阶自回归利率包含了常利率及随机利率情形, 又易于推广至p阶自回归形式, 较有代表性), 通过递推方法得出了模型的破产概率所满足的不等式, 通过破产概率的上界研究再保险的最优控制策略. 并在两种常用的保险形式比例再保险和超额损失再保险形式下给出了破产概率满足的微积分方程, 并通过图表对文中所得结论进行了说明.

*安徽大学江淮学院院级基金(2012KJ1002, 2013KJ0001, 2013JY0002)资助.
本文2013年3月11日收到, 2014年2月28日收到修改稿.
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2014.03.005

§2. 模　　型

考虑如下模型[5]

$$U_n = U_{n-1}(1+I_n) + C(b_{n-1}) - h(b_{n-1}, Y_n), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$

其中, U_n为时刻n保险公司的盈余, $U_0 = u \geqslant 0$为保险公司的初始盈余, $\{I_n, n \geqslant 1\}$和$\{Y_n, n \geqslant 1\}$分别为两列相互独立的随机变量序列, Y_n表示第n期的理赔支出, 为一列独立同分布(i.i.d.)的随机变量序列, 分布函数为$F(y) = \mathsf{P}(Y_1 \leqslant y)$. I_n为第n期的利率, 本文假定利率具有一阶自回归结构, 即

$$I_n = \alpha I_{n-1} + W_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.2}$$

其中$I_0 = i_0$, $0 < \alpha < 1$, 均为常数, $\{W_n, n \geqslant 1\}$为i.i.d.的非负随机变量序列, 分布函数为$G(w) = \mathsf{P}(W_1 \leqslant w)$, $\{W_n, n \geqslant 1\}$与$\{Y_n, n \geqslant 1\}$相互独立, 由(2.2)知

$$I_n = \alpha^n i_0 + \alpha^{n-1} W_1 + \cdots + \alpha W_{n-1} + W_n, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.3}$$

函数$h(b, y)$为一个再保险策略, $\mathbb{B}$为所有可允许策略空间, 对$b \in \mathbb{B}$, $h(b, y)$表示当理赔为y时由保险公司支付的部分, 而剩下的$y - h(b, y) \leqslant C(b)$由再保险公司支付, 假定$0 \leqslant h(b, y) \leqslant y$, 且$y \to h(b, y)$对所有$b \in \mathbb{B}$是非减函数. 而$\mathbb{B}$是一个紧的拓扑空间, $b \to h(b, y)$对任意$y \geqslant 0$是连续函数, 在模型(2.1)中b_{n-1}表示第n期的再保险策略.

再保险合同中较常见的有比例再保险和超额损失再保险, 本文将讨论一般情况$h(b, y)$, 且假定$h(b_n, y)$为常数策略, 即每期的再保险策略均相同, 具体的再保形式只需代入公式即可, 即

$$h(b_n, y) \equiv h(b, y), \qquad b \in \mathbb{B}. \tag{2.4}$$

$C(b)$表示策略b下保险公司的保费, 根据期望值定价原则:

$$C(b) = c - (1+\theta)\mathsf{E}(Y - h(b, Y)).$$

上式中Y与$\{Y_n, n \geqslant 1\}$有共同的分布. c为保费率, 为一固定常数, 其中θ为再保险公司的安全附加系数, 显然任给$b \in \mathbb{B}$, 均有$0 \leqslant C(b) \leqslant c$.

由(2.1)及(2.4)可得

$$U_n = u \prod_{i=1}^{n}(1+I_i) - \sum_{i=1}^{n}(h(b, Y_n) - C(b)) \prod_{m=i+1}^{n}(1+I_m), \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.5}$$

上式中, $\prod\limits_{m=n+1}^{n}(1+I_m) = 1$, 并假设净收益条件成立, 即$\mathsf{E}h(b, Y) \leqslant C(b)$.

定义

$$\Psi^b(u,i_0)=\mathsf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n<0)\big|I_0=i_0\Big) \tag{2.6}$$

为策略b下初始资金为u时的破产概率, 并记

$$\Psi_n^b(u,i_0)=\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n}(U_k<0)\big|I_0=i_0\Big) \tag{2.7}$$

为策略b下初始资金为u时的有限时间破产概率. 显然

$$0\leqslant\Psi_1^b(u,i_0)\leqslant\Psi_2^b(u,i_0)\leqslant\cdots\leqslant\Psi_n^b(u,i_0)\leqslant\cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_n^b(u,i_0)=\Psi^b(u,i_0).$$

定理 2.1 任给$b\in\mathbb{B}$, 存在$\Psi^b(u)$, 不依赖于i_0, 使得

$$\Psi^b(u,i_0)\leqslant\Psi^b(u)$$

对于所有$u>0$及$I_0=i_0\geqslant 0$成立.

证明: 由(2.1)及(2.3)中假定知

$$U_n=U_{n-1}(1+I_n)+C(b)-h(b,Y_n)\geqslant U_{n-1}+C(b)-h(b,Y_n),$$

记

$$\widetilde{U}_n=\widetilde{U}_{n-1}+C(b)-h(b,Y_n), \tag{2.8}$$

则$\widetilde{U}_0=U_0=u$, 且任意$n\geqslant 1$, 均有

$$U_n\geqslant\widetilde{U}_n. \tag{2.9}$$

记

$$A=\Big\{\omega\in\Omega\big|\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n(\omega)<0)\Big\}\quad 及\quad \widetilde{A}=\Big\{\omega\in\Omega\big|\bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{U}_n(\omega)<0)\Big\},$$

由(2.9)知$A\subset\widetilde{A}$, 而$\widetilde{U}_n$显然不依赖于I_n, 则

$$\Psi^b(u,i_0)=\mathsf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n<0)\big|I_0=i_0\Big)\leqslant\mathsf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{U}_n<0)\Big)\triangleq\Psi^b(u). \qquad\square$$

注记 1 事实上, 由(2.8)知$\widetilde{U}_n=u-\sum\limits_{i=1}^{n}(h(b,Y_n)-C(b))$为无利率情形的风险模型, 相应的$\Psi^b(u)=\mathsf{P}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}(h(b,Y_n)-C(b))>u\Big)$为无利率情形的破产概率, 上述定理表明考虑利率的模型破产概率更小.

§3. 破产概率满足的微积分方程

设$Z_i = h(b, Y_i) - C(b)$ $(i \geqslant 1)$, 则$\{Z_n, n \geqslant 1\}$为i.i.d.的随机变量序列, 分布函数为$H(z) = \mathsf{P}(Z_1 \leqslant z)$, 显然$z \geqslant -C(b)$, 记$\overline{H}(z) = 1 - H(z)$为$H$的尾分布, 以下给出破产概率满足的递推公式.

定理 3.1 记$\alpha i_0 + w = h$, 在前述条件下, 有

$$\Psi_1^b(u, i_0) = \int_0^\infty \overline{H}(u(1+h))\mathrm{d}G(w). \tag{3.1}$$

且对任意$n \geqslant 1$,

$$\Psi_{n+1}^b(u, i_0) = \int_0^\infty \overline{H}(u(1+h))\mathrm{d}G(w) + \int_0^\infty \int_{-C(b)}^{u(1+h)} \Psi_n^b(u(1+h)-z, h)\mathrm{d}H(z)\mathrm{d}G(w). \tag{3.2}$$

进而,

$$\Psi^b(u, i_0) = \int_0^\infty \overline{H}(u(1+h))\mathrm{d}G(w) + \int_0^\infty \int_{-C(b)}^{u(1+h)} \Psi^b(u(1+h)-z, h)\mathrm{d}H(z)\mathrm{d}G(w). \tag{3.3}$$

证明: 记$\{\widetilde{Y}_n, n \geqslant 1\}$和$\{\widetilde{W}_n, n \geqslant 1\}$分别为$\{Y_n, n \geqslant 1\}$和$\{W_n, n \geqslant 1\}$的独立复制, 则显然$\{\widetilde{Z}_n = h(b, \widetilde{Y}_n) - C(b), n \geqslant 1\}$为$\{Z_n, n \geqslant 1\}$的独立复制, 且由Cai (2002b)知, 给定$W_1 = w$时, 记

$$\widetilde{I}_{n-1} = \alpha^{n-1}h + \alpha^{n-2}\widetilde{W}_1 + \cdots + \alpha\widetilde{W}_{n-2} + \widetilde{W}_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

则$\{\widetilde{I}_n, n \geqslant 1\}$与$\{I_n, n \geqslant 1\}$有相同的自回归结构,

$$\widetilde{I}_n = \alpha\widetilde{I}_{n-1} + \widetilde{W}_n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

与$\{I_n, n \geqslant 1\}$不同的是, $\{\widetilde{I}_n, n \geqslant 1\}$的初始值为$\widetilde{I}_0 = \widetilde{i}_0 = h = \alpha i_0 + w$.

记$Z_1 = z$, 由(2.5)知,

$$U_1 = u(1 + I_1) - Z_1 = u(1 + \alpha i_0 + w) - z = u(1+h) - z,$$

当$z > u(1+h)$时, $\mathsf{P}(U_1 < 0 | W_1 = w, Z_1 = z, I_0 = i_0) = 1$, 所以

$$\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k < 0)\big|W_1 = w, Z_1 = z, I_0 = i_0\Big) = 1.$$

而当$z \leqslant u(1+h)$时, $\mathsf{P}(U_1<0|W_1=w,Z_1=z,I_0=i_0)=0$, 所以

$$\begin{aligned}
& \mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k<0)\big|W_1=w,Z_1=z,I_0=i_0\Big)\\
= & \mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=2}^{n+1}(U_k<0)\big|W_1=w,Z_1=z,I_0=i_0\Big)\\
= & \mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=2}^{n+1}\Big((u(1+h)-z)\prod_{t=2}^{k}(1+I_t)-\sum_{j=2}^{k}Z_j\prod_{t=j+1}^{k}(1+I_t)<0\Big)\\
& \big|W_1=w,Z_1=z,I_0=i_0\Big)\\
= & \mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n}\Big((u(1+h)-z)\prod_{t=1}^{k}(1+\widetilde{I}_t)-\sum_{j=1}^{k}\widetilde{Z}_j\prod_{t=j+1}^{k}(1+\widetilde{I}_t)<0\Big)\\
& \big|W_1=w,Z_1=z,\widetilde{I}_0=\widetilde{i}_0=\alpha i_0+w\Big)\\
= & \Psi_n^b(u(1+h)-z,\widetilde{i}_0)\\
= & \Psi_n^b(u(1+h)-z,h).
\end{aligned}$$

由上式可得

$$\begin{aligned}
& \Psi_{n+1}^b(u,i_0)=\mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k<0)\big|I_0=i_0\Big)\\
= & \int_0^\infty\int_{-C(b)}^\infty \mathsf{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k<0)\big|W_1=w,Z_1=z,I_0=i_0\Big)\mathrm{d}H(z)\mathrm{d}G(w)\\
= & \int_0^\infty\int_{-C(b)}^{u(1+h)}\Psi_n^b(u(1+h)-z,h)\mathrm{d}H(z)\mathrm{d}G(w)+\int_0^\infty\int_{u(1+h)}^\infty \mathrm{d}H(z)\mathrm{d}G(w).
\end{aligned}$$

化简即得(3.2), 令$n\to\infty$, 得(3.3), 特别地, 当$n=1$时,

$$\Psi_1^b(u,i_0)=\int_0^\infty \overline{H}(u(1+h))\mathrm{d}G(w). \qquad \square$$

考虑比例再保险, 即$h(b,y)=by$, 则$C(b)=c-(1+\theta)(1-b)\mathsf{E}Y$, 相应的破产概率记为$A^b(u,i)$和$A_n^b(u,i)$, 则以下结论成立.

推论 3.1

$$A_1^b(u,i_0)=\int_0^\infty \overline{F}\Big(\frac{u(1+h)+C(b)}{b}\Big)\mathrm{d}G(w),$$

且

$$A^b(u,i_0)=A_1^b(u,i_0)+\int_0^\infty\int_0^{[u(1+h)+C(b)]/b}A(u(1+h)-C(b)-by,h)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}G(w).$$

证明: 由$h(b,y)=by$知, $Z_i=bY_i-C(b)$, 故$H(z)=F([C(b)+z]/b)$, 代入(3.1)即可.

$\square$

考虑超额损失再保险, 即若$h(b,y)=\min(b,y)$,

$$C(b)=c-(1+\theta)\mathsf{E}(Y-\min(b,Y))=c-(1+\theta)\mathsf{E}Y+(1+\theta)\mathsf{E}(\min(Y,b)).$$

相应的破产概率记为$B^b(u,i_0)$和$B^b_n(u,i_0)$. 则以下结论成立.

推论 3.2 记$s(i_0)=[b-C(b)]/u-1-\alpha i_0$, 则

$$B^b_1(u,i_0)=\int_0^{s(i_0)}\overline{F}(u(1+h)+C(b))\mathrm{d}G(w), \tag{3.4}$$

且

$$\begin{aligned} B^b(u,i_0) &= B^b_1(u,i_0)\\ &\quad+\int_0^{s(i_0)}\int_0^{u(1+h)+C(b)}B^b(u(1+h)+C(b)-y,h)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}G(w)\\ &\quad+\int_{s(i_0)}^{+\infty}\int_0^{b}B^b(u(1+h)+C(b)-y,h)\mathrm{d}F(y)\mathrm{d}G(w). \end{aligned}$$

证明:

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathsf{P}(Z_1\leqslant z)=\mathsf{P}(\min(b,Y_1)-C(b)\leqslant z)\\ &= 1-\mathsf{P}(Y_1>C(b)+z,b>C(b)+z)\\ &= \begin{cases} F(C(b)+z), & z<b-C(b),\\ 1, & z\geqslant b-C(b). \end{cases} \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\overline{H}(u(1+h)) = \begin{cases} \overline{F}(u(1+h)+C(b)), & w<s(i_0),\\ 0, & w\geqslant s(i_0). \end{cases}$$

由定理3.1知,

$$B^b_1(u,i_0)=\int_0^{s(i_0)}\overline{H}(u(1+h))\mathrm{d}G(w)+\int_{s(i_0)}^{\infty}\overline{H}(u(1+h))\mathrm{d}G(w).$$

上式第二项为0, 故(3.4)成立. 同理可得

$$\begin{aligned} B^b(u,i_0) &= B^b_1(u,i_0)\\ &\quad+\int_0^{s(i_0)}\int_{-C(b)}^{u(1+h)}B^b(u(1+h)-z,h)\mathrm{d}H(z)\mathrm{d}G(w)\\ &\quad+\int_{s(i_0)}^{+\infty}\int_{-C(b)}^{b-C(b)}B^b(u(1+h)-z,h)\mathrm{d}H(z)\mathrm{d}G(w)\\ &\quad+\int_{s(i_0)}^{+\infty}\int_{b-C(b)}^{u(1+h)}B^b(u(1+h)-z,h)\mathrm{d}H(z)\mathrm{d}G(w). \end{aligned}$$

上式的第三项为0, 将(3.5)代入前两项立得结论成立. □

§4. 破产概率上界

定理 4.1 设存在$R>0$, 使得$\mathsf{E}\mathrm{e}^{(h(b,Y_1)-C(b))R}=1$, 即$\mathsf{E}\mathrm{e}^{RZ_1}=1$, 则

$$\Psi^b(u,i_0)\leqslant\beta\mathsf{E}\mathrm{e}^{-Ru(1+\alpha i_0+W_1)}\leqslant\beta\mathrm{e}^{-Ru},\tag{4.1}$$

其中$\beta=\beta(b)$, 满足

$$\beta^{-1}=\inf_{t\geqslant -C(b)}\frac{\displaystyle\int_t^{\infty}\mathrm{e}^{Rz}\mathrm{d}H(z)}{\mathrm{e}^{Rt}\overline{H}(t)}.$$

证明: 显然$\beta>0$, 且

$$\mathsf{E}\mathrm{e}^{-Ru(1+\alpha i_0+W_1)}\leqslant\beta\mathrm{e}^{-Ru}.$$

下证不等式的前半部分, 利用数学归纳法, $n=1$时, 对任意$x>-C(b)$,

$$\begin{aligned}\overline{H}(x)&=\left(\frac{\displaystyle\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{Rz}\mathrm{d}H(z)}{\mathrm{e}^{Rx}\overline{H}(x)}\right)^{-1}\mathrm{e}^{-Rx}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{Rz}\mathrm{d}H(z)\\&\leqslant\beta\mathrm{e}^{-Rx}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{Rz}\mathrm{d}H(z)\\&\leqslant\beta\mathrm{e}^{-Rx}\mathsf{E}\mathrm{e}^{RZ_1}\\&=\beta\mathrm{e}^{-Rx},\end{aligned}\tag{4.2}$$

则

$$\begin{aligned}\Psi_1^b(u,i_0)&=\int_0^{\infty}\overline{H}(u(1+\alpha i_0+w))\mathrm{d}G(w)\\&\leqslant\int_0^{\infty}\beta\mathsf{E}\mathrm{e}^{-Ru(1+\alpha i_0+w)}\mathrm{d}G(w)\\&=\beta\mathsf{E}\mathrm{e}^{-Ru(1+\alpha i_0+W_1)}.\end{aligned}$$

以下假定

$$\Psi_n^b(u,i_0)\leqslant\beta\mathsf{E}\mathrm{e}^{-Ru(1+\alpha i_0+W_1)},$$

则当$z<u(1+\alpha i_0+w)$时,

$$\begin{aligned}&\Psi_n^b(u(1+\alpha i_0+w)-z,\alpha i_0+w)\\\leqslant\ &\beta\mathsf{E}\mathrm{e}^{-R(u(1+\alpha i_0+w)-z)(1+\alpha(\alpha i_0+w)+W_1)}\\\leqslant\ &\beta\mathrm{e}^{-R(u(1+\alpha i_0+w)-z)}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

由(3.2)及(4.2)的第二个不等号和(4.3)得

$$\begin{aligned}\Psi_{n+1}^{b}(u,i_0) &\leqslant \int_0^\infty\int_{u(1+\alpha i_0+w)}^\infty \beta\mathrm{e}^{-Ru(1+\alpha i_0+w)}\mathrm{e}^{Rz}\mathrm{d}H(z)\mathrm{d}G(w)\\ &\quad+\int_0^\infty\int_{-C(b)}^{u(1+\alpha i_0+w)}\beta\mathrm{e}^{-R(u(1+\alpha i_0+w)-z)}\mathrm{d}H(z)\mathrm{d}G(w)\\ &= \int_0^\infty\int_{-C(b)}^\infty \beta\mathrm{e}^{-Ru(1+\alpha i_0+w)}\mathrm{e}^{Rz}\mathrm{d}H(z)\mathrm{d}G(w)\\ &= \beta\mathsf{E}\mathrm{e}^{-Ru(1+\alpha i_0+W_1)}.\end{aligned}$$

在上式中令$n\to\infty$, 即得(4.1). □

§5. 应用实例

方便起见, 本段假定索赔额$Y_i\sim E(1)$, 即参数为1的指数分布, 则F是一个NWUC[5]分布, 且$\mathsf{E}Y=1$, $\mathsf{E}\mathrm{e}^{tY}=1/(1-t)$. 在利率过程中假定$\alpha=0.5$, $i_0=0.05$, 且$W_1\sim U(0.01, 0.04)$.

引理 5.1 设$h(b,y)=by$, 假定对任意$b\in\mathbb{B}$, $\mathsf{E}\mathrm{e}^{RbY_1}<\infty$, 且$F$是一个NWUC分布, 则

$$\Psi^b(u,i_0)\leqslant(\mathsf{E}\mathrm{e}^{RbY_1})^{-1}\mathsf{E}\mathrm{e}^{-Ru(1+\alpha i_0+W_1)}.$$

证明: 由Willmot和Lin (2001)知, $\beta^{-1}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{Rby}\mathrm{d}F(y)=\mathsf{E}\mathrm{e}^{RbY_1}$. □

引理 5.2 设$h(b,y)=\min(b,y)$, 假定对任意$b\in\mathbb{B}$, $\mathsf{E}\mathrm{e}^{R(\min(b,Y_1))}<\infty$, 且$F$是一个NWUC分布, 则

$$\Psi^b(u,i_0)\leqslant(\mathsf{E}\mathrm{e}^{R(\min(b,Y_1))})^{-1}\mathsf{E}\mathrm{e}^{-Ru(1+\alpha i_0+W_1)}.$$

证明: 由F是一个NWUC分布, 知$Z_1=\min(b,Y_1)-C(b)$的分布$H(z)$也是NWUC分布, 由Willmot和Lin (2001)知,

$$\beta^{-1}=\inf_{t\geqslant -C(b)}\frac{\int_t^\infty \mathrm{e}^{Rz}\mathrm{d}H(z)}{\mathrm{e}^{Rt}\overline{H}(t)}=\int_{-C(b)}^\infty \mathrm{e}^{Rz}\mathrm{d}H(z)=\mathsf{E}\mathrm{e}^{R(\min(b,Y_1)-C(b))}. \qquad \square$$

例 1 取$c=1.2$, $\theta=20\%$, 显然$C(b)=1.2-1.2(1-b)>0$, $\mathsf{E}\mathrm{e}^{(bY-C(b))R}=1$, 图1显示了比例再保险情形自留水平$b$与$R$的关系.

例 2 取与例1相同的数据, 考虑超额损失再保险, 显然$C(b)=1.2(1-\mathrm{e}^{-b})>0$, $\mathsf{E}\mathrm{e}^{(\min(b,Y_1)-C(b))R}=1$, 图2显示了超额损失再保险自留水平$b$与$R$的关系.

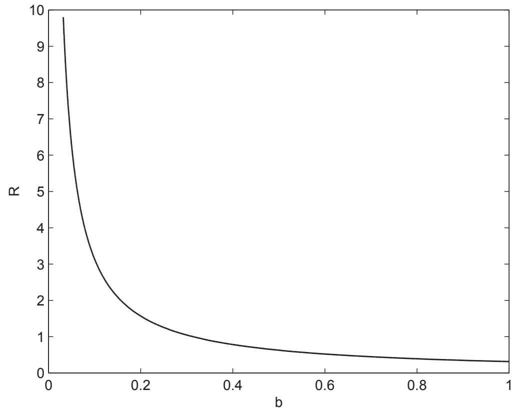

图1 比例再保险下R和b的关系

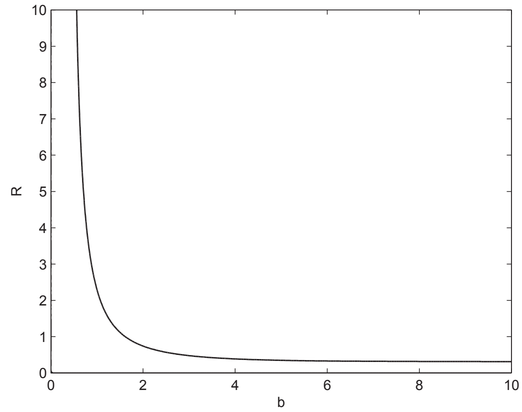

图2 超额损失再保险下R和b的关系

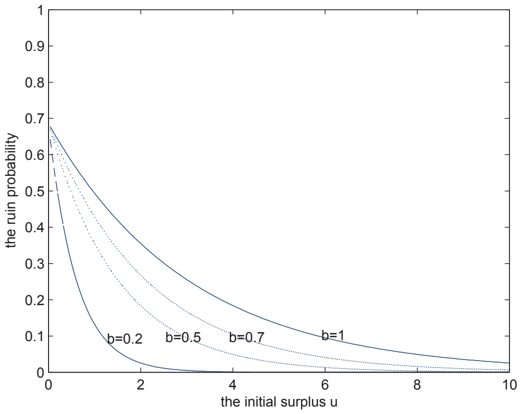

图3 比例再保险下破产概率上界

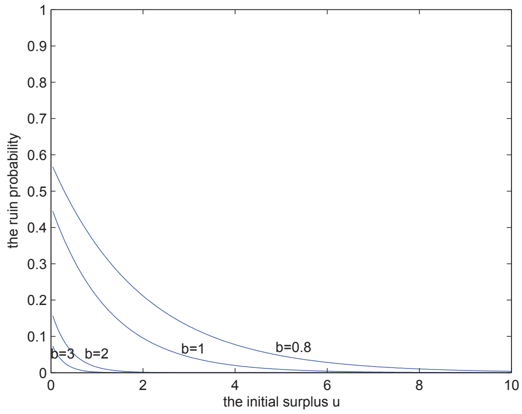

图4 超额损失再保险下破产概率上界

图1和图2表明不论是比例再保险还是超额损失再保险情形均有R的值随b的增大而减小.

图3给出了比例再保险情形, 不同的自留比例下, 由(4.1)式给出的破产概率上界与初始资本u的关系, 图3表明, 在本文的假设下破产概率上界随自留比例b的增大而增大. 图4给出了超额损失再保险情形, 不同的自留损失下, 由(4.1)式给出的破产概率上界与初始资本u的关系, 图4表明, 在本文的假设下破产概率上界随b的增大而减小.

注记 2 本节只是举例说明定理在两种常见再保险情形的应用, 而文中定理3.1及4.1所阐述之结论, 对于其他再保险情形, 依然成立.

参 考 文 献

[1] Cai, J., Discrete time risk models under rates of interest, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **16(3)**(2002a), 309–324.

[2] Cai, J., Ruin probabilities with dependent rates of interest, *Journal of Applied Probability*, **39(2)** (2002b), 312–323.

[3] He, X.X., Yao, C. and Hu, Y.J., Ruin probabilities for the discrete risk models with Markov chain interest, 应用概率统计, **28(3)**(2012), 270–276.

[4] Yang, H.L. and Zhang, L.H., Ruin problems for a discrete time risk model with random interest rate, *Mathematical Methods of Operations Research*, **63(2)**(2006), 287–299.

[5] Diasparra, M.A. and Romera, R., Bounds for the ruin probability of a discrete-time risk process, *Journal of Applied Probability*, **46(1)**(2009), 99–112.

[6] Hipp, C. and Vogt, M., Optimal dynamic XL reinsurance, *ASTIN Bulletin*, **33(2)**(2003), 193–207.

[7] Schmidli, H., On Cramér-Lundberg approximations for ruin probabilities under optimal excess of loss reinsurance, *Zhurnal Obchyslyuval'noï ta Prykladnoï Matematyky*, **96(1)**(2008), 198–205.

[8] Schäl, M., On discrete-time dynamic programming in insurance: exponential utility and minimizing the ruin probability, *Scandinavian Actuarial Journal*, **2004(3)**(2004), 189–210.

[9] Asmussen, S., *Ruin Probabilities*, World Scientific, Singapore, 2000.

[10] Gerber, H.U., *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, Richard D. Irwin, Chicago, 1979.

[11] Willmot, G.E. and Lin, X.S., *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications* (*Lecture Notes in Statistics, 156*), Springer-Verlag, New York, 2001.

Ruin Problems for the Discrete Time Model of General Reinsurance with Dependent Rates of Interest

Wang Lixia Li Shuangdong

(*Department of General Courses, Jianghuai College of Anhui University, Hefei, 230031*)

In this paper, we consider a discrete-time process driven by general reinsurance and an interest rate process. The rate of interest is assumed to have a dependent autoregressive structure. We obtain the recursive and integral equations for ruin probability, and the upper bound of ruin probability is given with recursive method. The results were applied to the proportional reinsurance and excess of loss treaty. To illustrate these results, some numerical examples are included.

Keywords: Reinsurance, dependent rate of interest, ruin probability, discrete time model.

AMS Subject Classification: 60J25.