应用概率统计　第三十一卷
第一期　2015年2月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol.31 No.1 Feb. 2015

指数–伽马模型下在险价值度量的贝叶斯估计 *

章　溢[1]　周东琼[2]　温利民[1,3★]

([1]江西师范大学数学与信息科学学院, 南昌, 330022; [2]江西科技学院理科教学部, 南昌, 330098)

([3]江西财经大学信息管理学院, 南昌, 330013)

摘　要

VaR风险度量在金融、保险中有重要的应用. 本文建立了贝叶斯模型, 在某种损失函数下研究了VaR风险度量的贝叶斯估计. 证明了指数–伽马分布下贝叶斯估计的强相合性和渐近正态性, 最后利用数值模拟的方法验证了不同样本容量下估计的收敛速度.

关键词: 在险价值度量, 贝叶斯估计, 损失函数, 强相合性, 渐近正态性.

学科分类号: O211.9.

§1.　引　　言

众所周知, 高收益总是伴随高风险. 风险的本质就是不确定性, 由于投资组合的回报率是不确定的, 因此任何投资都具有风险. 概率论与数理统计就是处理这种不确定性(风险)的学科. 在概率统计中, 一般用随机变量来描述风险(不确定性). 假定风险随机变量X具有某个概率分布$F_X(x)$. 风险度量为从空间$\chi=\{X: X \text{ 为非负随机变量}\}$到$R$的一个实函数.

在实际的风险管理中, 在险价值(Value at Risk, 简记为VaR)是一种重要的风险度量方法. 参考Gelman等(1995), Szegö (2005), Denuit等(2005)等. VaR (Value at Risk)一般被称为“风险价值”或“在险价值”, 指在一定的置信水平下, 某一金融资产(或证券组合)在未来特定的一段时间内的最大可能损失. 在正常的市场情况下, VaR是非常有用的风险度量工具, 在金融风险管理中有重要的应用, 参考胡经生等(2005), Puccetti等(2013)等. 事实上, 从数学的角度看, 风险X的VaR实际上就是X的α分位数: $\mathrm{VaR}_\alpha(X)=F_X^{-1}(\alpha)$.

但是, 在实际运用中, 由于风险随机变量X的分布依赖于某些风险参数θ. 这里风险参数θ一般表示风险X的某些特征, 例如在汽车第三者责任保险中, θ表示被保险人的性别, 年龄, 驾龄, 职业等与索赔风险X相关的量. 由于风险的非齐次性, 一般假设θ为不可观测的随机变量, 见王伟等(2010), Pan等(2008), Wu和Zhou (2006), Wen等(2011)等. 这时, 风险X在θ给定下的条件概率分布为$F_X(x|\theta)$. 由于VaR风险度量依赖于风险参数θ, 因而也是未知

*国家自然科学基金(71361015)、江西省自然科学基金(20142BAB201013)、江西省教育厅基金(GJJ13217)、中国博士后面上资助(2013M540534)和特别资助(2014T70615)以及江西省博士后择优项目(05ZR14046)资助.

★通讯作者, E-mail: wlmjxnu@163.com.

本文2014年4月3日收到, 2014年9月1日收到修改稿.

doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2015.01.005

的. 一般地, 我们对风险X的状况具有若干年的观测值. 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是风险X在θ给定下的若干观测值, 我们的目标是基于这些样本信息和θ的某些先验信息对VaR进行估计或进行进一步的统计推断.

在以往的文献中, 对VaR的估计有多种方法, 例如历史模拟法、蒙特卡罗模拟法等. 陈燕君(2011)对这些计算方法进行了较详尽的比较和分类, 并且讨论了各种方法的特点. 相关的研究可参考谢佳利等(2008), 杨昕(2011)等. 然而, 这些方法仅仅利用了样本容量的信息, 忽略了风险参数θ的先验分布的重要信息.

本文将在贝叶斯框架下建立VaR的估计模型, 充分利用已有信息对VaR风险度量进行估计, 并验证估计的大样本性质. 本文后面的章节安排如下. 第二节给出VaR风险度量的定义及相关性质, 并给出贝叶斯模型的基本假设和需要解决的问题. 第三节给出VaR度量的贝叶斯估计, 并讨论相应的性质. 第四节在指数–伽马模型下讨论VaR的贝叶斯估计及其相合性和渐近正态性. 最后一节给出VaR度量的数值模拟, 验证这些估计的收敛速度, 并给出全文的结论.

§2. VaR风险度量

随着金融市场的发展, 人们面临的风险越来越复杂, 风险是未来损失的不确定性. 如何对风险进行较准确的度量成为金融风险管理的重要课题. 在险价值VaR (Value-at-Risk)的出现使得对金融资产组合在一定时期内给定置信度下的最大可能损失进行量化成为了可能. 目前, VaR成为金融风险管理系统中度量金融风险的最常用方法之一.

定义 2.1 设风险X的分布函数为$F_X(x)$, 给定一个置信水平$\alpha \in (0,1)$, 则风险X的VaR定义为X的α分位数, 记为$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$或x_α, 即

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \in R : F_X(x) \geq \alpha\}. \tag{2.1}$$

注意到$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$其实就是$F_X(x)$的广义逆在$100\alpha\%$处的值, VaR就是不超过给定概率α的最大损失. 在实际运用中, 一般取$\alpha = 0.95$或$\alpha = 0.99$.

注记 1 根据VaR的定义, 对任意的$0 < \alpha < 1$, 都存在唯一的$-\infty < \mathrm{VaR}_\alpha(X) < \infty$, 满足$\mathsf{P}(X < \mathrm{VaR}_\alpha(X)) \leq \alpha$以及$F_X(\mathrm{VaR}_\alpha(X)) \geq \alpha$. 另外, 对任意$x \in R$, 有$\mathrm{VaR}_\alpha(X) \leq x \Longleftrightarrow F_X(x) \geq \alpha$成立.

注记 2 $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$关于α是左连续的增函数. 如果$F_X(x)$是连续且严格递增函数, 则$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$是方程$F_X(x) = \alpha$的唯一解.

在实际运用中, 由于风险一般是未知的, 因而其分布函数$F_X(x)$也是未知的. 然而, 每份风险将呈现不同的特征, 例如在房屋财产保险中, 房屋的建筑结构, 地理位置, 楼层以及房屋时使用情况等. 这些特征有些是可以观测的, 而有些是无法观测的. 将所有这些

风险特征的综合用随机变量θ来刻画, 在风险管理中θ被称为风险参数. 由于对风险参数有一定的认识, 在概率统计中假设这些认识形成某个先验分布$\pi(\theta)$. 这时在θ给定条件下, 风险X的条件分布记为$F_X(x|\theta)$. 我们的目标是通过观测到的样本信息$X_1, X_2, \ldots, X_n$以及已有的先验信息$\pi(\theta)$对风险X的VaR风险度量进行估计.

为此, 我们提出下面的假设.

假设 2.1 影响风险X的所有因素综合用随机变量θ来刻画, 称θ为风险参数, 假设θ服从先验分布(密度) $\pi(\theta)$.

假设 2.2 给定θ时, $X_1, X_2, \ldots, X_n$为X的独立同分布样本, 具有共同的概率分布函数$F_X(x|\theta)$, 以及密度函数$f(x|\theta)$.

为方便, 记$\underline{X_n} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$表示样本. 由于$X$的VaR风险度量此时依赖于风险参数$\theta$, 因此称之为条件VaR风险度量, 并记为$V_\alpha(\theta)$, 即有

$$V_\alpha(\theta) = F_X^{-1}(\alpha|\theta).$$

§3. 一般模型下VaR的贝叶斯估计

在前面的假设下, 我们的目的是对$V_\alpha(\theta)$提出合适的估计. 注意到, 若取损失函数

$$L(X, p) = (X - p)[\alpha - I(X < p)], \tag{3.1}$$

则在给定θ下, $V_\alpha(\theta)$是风险X的最优预测(由于风险X是随机变量, 此时一般称对X进行预测, 但在不混淆的情况下也称为估计, 下同).

命题 3.1 若给定风险参数θ, 并取损失函数(3.1), 则风险X的最优预测为$V_\alpha(\theta)$, 即有

$$V_\alpha(\theta) = \arg\min_{p(\theta)\in R} \mathsf{E}[L(X, p(\theta))|\theta]. \tag{3.2}$$

证明: 令$\Psi = \mathsf{E}[L(X, p(\theta))|\theta]$. 由于在求上面的最小化数学期望中$\theta$是给定的, 因此不妨记$p(\theta) = p$, 并把条件期望看成无条件期望. 因此有

$$\begin{aligned}
\Psi &= \mathsf{E}[(X - p)[\alpha - I(X < p)]|\theta] \\
&= (\alpha - 1)\int_0^p (x - p)\mathrm{d}F_X(x|\theta) + \alpha\int_p^{+\infty} (x - p)\mathrm{d}F_X(x|\theta) \\
&= (\alpha - 1)\int_0^p x\mathrm{d}F_X(x|\theta) - (\alpha - 1)pF_X(p|\theta) \\
&\quad + \alpha\int_p^{+\infty} x\mathrm{d}F_X(x|\theta) - \alpha p[1 - F_X(p|\theta)].
\end{aligned}$$

对Ψ中关于p求导, 并令导数为零, 则得到下面的方程:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial p} &= (\alpha-1)pf(p|\theta)-(\alpha-1)F_X(p|\theta)-(\alpha-1)pf(p|\theta)\\ &\quad -\alpha pf(p|\theta)-\alpha[1-F_X(p|\theta)]+\alpha pf(p|\theta)=0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

经过一些数学上的化简得到

$$F_X(p|\theta)-\alpha=0. \tag{3.4}$$

因此有

$$p=p(\theta)=F_X^{-1}(\alpha|\theta)=V_\alpha(\theta). \qquad \square$$

注记 3 损失函数(3.1)是分位数回归模型中常用的一种损失函数, 在数理统计中也称为检验函数. 一般地, 在分位数回归中, 记

$$\rho_\tau(u)=u(\tau-I(u<0)). \tag{3.5}$$

若有样本$\{(x_i,y_i)|_{i=1}^n\}$, 且满足下面的线性模型

$$\begin{cases} y_i=x_i\beta+\varepsilon_i,\\ \mathsf{E}\varepsilon_i=0, \qquad \mathsf{Var}\,(\varepsilon_i)=\sigma^2,\end{cases}$$

则求解下面的最小化问题

$$\min_{\beta\in R^P}\sum_{i=1}^n\rho_\tau(y_i-x_i\beta), \tag{3.6}$$

得到β的分位数回归估计, 这里$\tau\in(0,1)$为已知的一个概率(本文记α). 关于检验函数(3.5)及相关分位数回归的研究可参考Koenker (2005), Zou和Yuan (2008), Kai等(2010)等.

根据命题3.1, 条件风险度量$V_\alpha(\theta)$是风险X在损失函数(3.1)的最优预测. 由于$V_\alpha(\theta)$依赖于不可观测的风险参数θ, 因而也是未知的, 需要根据已有的信息来估计(预测). 由于我们有风险X的n个观测值$\underline{X_n}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)'$. 我们的目标是通过结合样本$\underline{X_n}$和先验分布信息, 得到未来风险$X_{n+1}$ (或风险X)的最优预测.

为此, 定义样本的可测函数类

$$\Gamma=\{g(X_1,\ldots,X_n): \text{其中}g(X_1,\ldots,X_n)\text{是}\underline{X_n}\text{的可测函数}\}.$$

并给出下面的引理.

引理 3.1 在贝叶斯模型的假设下, 最小化问题

$$\min_{g\in\Gamma}\mathsf{E}[L(X,g(\underline{X_n}))]$$

的解与

$$\min_{g\in\Gamma}\mathsf{E}[L(X,g(\underline{X_n}))|\underline{X_n}]$$

的解是等价的.

证明: 为了符号的方便, 记$R(g)=\mathsf{E}[L(X,g(\underline{X_n}))]$, $R(g|\underline{x_n})=\mathsf{E}[L(X,g(\underline{x_n}))|\underline{X_n}=\underline{x_n}]$, $g^*=\arg\min\limits_{g\in\Gamma}R(g)$, 以及$g^{**}=\arg\min\limits_{g\in\Gamma}R(g|\underline{x_n})$. 由Foutou引理有

$$\begin{aligned}R(g^*)&=\min_{g\in\Gamma}\int\mathsf{E}[L(X,g(\underline{x_n}))|\underline{X_n}=\underline{x_n}]u(\underline{x_n})\mathrm{d}\underline{x_n}\\&\geq\int\min_{g\in\Gamma}\mathsf{E}[L(X,g(\underline{x_n}))|\underline{X_n}=\underline{x_n}]u(\underline{x_n})\mathrm{d}\underline{x_n}\\&=\int R(g^{**}|\underline{x_n})u(\underline{x_n})\mathrm{d}\underline{x_n}=R(g^{**})\geq\min_{g\in\Gamma}R(g)\\&=R(g^*),\end{aligned}$$

其中$u(\underline{x_n})$表示$\underline{x_n}$的边际密度. 另一方面, 从上面的式子可得

$$\int(R(g^*|\underline{x_n})-R(g^{**}|\underline{x_n}))u(\underline{x_n})\mathrm{d}\underline{x_n}=0.\tag{3.7}$$

而由g^{**}的定义知$R(g^*|\underline{x_n})-R(g^{**}|\underline{x_n})\geq 0$. 因此有

$$R(g^*|\underline{x_n})=R(g^{**}|\underline{x_n})=\min_{g\in\Gamma}R(g|\underline{x_n}).\qquad\square\tag{3.8}$$

根据引理3.1, 容易得到下面的定理.

定理 3.1 记$\Pi(x|\underline{X_n})$为给定样本$\underline{X_n}$下X_{n+1}的预测分布函数. 则在损失函数(3.1)下, 求解最小化问题

$$\min_{g\in\Gamma}\mathsf{E}[L(X_{n+1},g(\underline{X_n}))]=\min_{g\in\Gamma}\mathsf{E}[(X_{n+1}-g(\underline{X_n}))(\alpha-I(X_{n+1}<g(\underline{X_n})))],\tag{3.9}$$

得到未来风险X_{n+1}的最优估计(预测)为X_{n+1}的预测分布$\Pi(x|\underline{X_n})$在α处的分位数, 即

$$g(\underline{X_n})=\Pi^{-1}(\alpha|\underline{X_n}),\tag{3.10}$$

其中$\Pi(x|\underline{X_n})=\mathsf{P}(X_{n+1}\leq x|\underline{X_n})$为$X_{n+1}$的预测分布函数.

证明: 令

$$G=\mathsf{E}[(X-g(\underline{X_n}))(\alpha-I(X<g(\underline{X_n})))|\underline{X_n}].$$

根据引理3.1, 求解(3.9)等价于求解G的最小值. 由于在$\underline{X_n}$给定下, $g(\underline{X_n})$是一个固定的常数, 记为g. 因此有

$$G=(\alpha-1)\int_0^g(x-g)\mathrm{d}\Pi(x|\underline{X_n})+\alpha\int_g^{+\infty}(x-g)\mathrm{d}\Pi(x|\underline{X_n}).\tag{3.11}$$

对G关于g求导并令导数为零, 得到下面的正规方程:

$$\frac{\partial G}{\partial g}=\Pi(g|\underline{X_n})-\alpha=0,\tag{3.12}$$

解得$g=g(\underline{X_n})=\Pi^{-1}(\alpha|\underline{X_n})$. $\square$

注记 4 注意到给定样本$\underline{X_n}=\underline{x_n}$下, X_{n+1}的预测分布函数对应的密度函数为

$$\pi(x|\underline{X_n})=\frac{\displaystyle\int\pi(\theta)f(x|\theta)\prod_{i=1}^{n}f(x_i|\theta)\mathrm{d}\theta}{\displaystyle\int\pi(\theta)\prod_{i=1}^{n}f(x_i|\theta)\mathrm{d}\theta}. \tag{3.13}$$

显然, 预测分布在α处的分位数$\Pi^{-1}(\alpha|\underline{X_n})$的表达非常复杂, 一般没有显示表达式. 但在某些特殊情况下, 能求解出$\Pi^{-1}(\alpha|\underline{X_n})$具体的表达式.

注记 5 定理3.1是通过最小化损失函数(3.1)的条件期望得到在险价值的一个贝叶斯估计(预测). 这种通过最小化某种测度对应的损失函数方法在保费定价中有重要的应用. 例如Bühlmann (1967)在平方损失函数下构建了净保费的信度估计, Gerber (1980)在指数加权损失函数下构建了Esscher保费的信度估计, Wen等(2009)在广义加权损失函数下讨论了广义加权保费的贝叶斯估计和信度估计等.

注记 6 注意到在贝叶斯模型的假设2.1-2.2下, 另外一种预测未来风险X_{n+1}的VaR的方法是: 首先根据贝叶斯定理, 用θ的后验均值$\mathsf{E}(\theta|X_1,\ldots,X_n)$估计$\theta$, 进而根据$V_\alpha(\theta)=F_X^{-1}(\alpha|\theta)$得到$V_\alpha(\theta)$的估计, 并用该估计来预测未来风险$X_{n+1}$的在险价值. 但是, 由于后验均值对应的是平方损失, 由此得到在险价值的贝叶斯估计不再具有定理3.1中的最优性.

§4. 指数–伽马模型下在险价值度量的贝叶斯估计

为了说明VaR风险度量的最优预测(3.10)的计算及其性质, 我们考虑下面的指数–伽马模型.

设风险参数θ服从Gamma分布, 具有密度函数$\pi(\theta)=[\beta^\lambda/\Gamma(\lambda)]\theta^{\lambda-1}\mathrm{e}^{-\beta\theta}$, $\theta>0$, 而在θ给定下, 风险X_i, $i=1,\ldots,n,n+1$具有指数分布, 其共同的条件密度为$f(x|\theta)=\theta\mathrm{e}^{-\theta x}$, $x>0$. 此时容易计算得到

$$\int\pi(\theta)\prod_{i=1}^{n}f(x_i|\theta)\mathrm{d}\theta=\int\frac{\beta^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\theta^{\lambda+n-1}\mathrm{e}^{-(\beta+n\overline{x})\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\beta^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(n+\lambda)}{(\beta+n\overline{x})^{n+\lambda}}$$

以及

$$\int\pi(\theta)f(x|\theta)\prod_{i=1}^{n}f(x_i|\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\beta^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{(\beta+n\overline{x}+x)^{n+\lambda+1}},$$

因此有

$$\pi(x|\underline{x_n})=\frac{(n+\lambda)(\beta+n\overline{x})^{n+\lambda}}{(\beta+n\overline{x}+x)^{n+\lambda+1}}. \tag{4.1}$$

可以看出$\pi(x|\underline{x_n})$是Pareto分布, 其分布函数为

$$\Pi(x|\underline{x_n})=\int_0^x\frac{(n+\lambda)(\beta+n\overline{x})^{n+\lambda}}{(\beta+n\overline{x}+s)^{n+\lambda+1}}\mathrm{d}s=1-\Big(\frac{\beta+n\overline{x}}{\beta+n\overline{x}+x}\Big)^{n+\lambda}. \tag{4.2}$$

令$\Pi(x|\underline{x_n})=\alpha$, 则

$$\Pi^{-1}(\alpha|\underline{x_n})=(\beta+n\overline{x})[(1-\alpha)^{-1/(n+\lambda)}-1]. \tag{4.3}$$

因此条件VaR的贝叶斯估计为

$$\widehat{V_\alpha(\theta)}=(\beta+n\overline{X})[(1-\alpha)^{-1/(n+\lambda)}-1]. \tag{4.4}$$

为了更好的讨论指数–伽马模型下估计(4.4)的统计性质, 给出下面的引理.

引理 4.1 设$\gamma\in(0,1)$, 则下面的极限成立

$$\lim_{x\to+\infty}x(1-\gamma^{1/x})=\ln\frac{1}{\gamma}. \tag{4.5}$$

进一步地, 有

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\Big[x(1-\gamma^{1/x})-\ln\frac{1}{\gamma}\Big]=0. \tag{4.6}$$

证明: 根据极限的换元法和罗比达法则有

$$\lim_{x\to+\infty}x(1-\gamma^{1/x})=\lim_{x\to0^+}\frac{(1-\gamma^x)}{x}=\lim_{x\to0^+}[-\gamma^x\ln(\gamma)]=\ln\frac{1}{\gamma}.$$

类似地, 两次利用极限的罗比达法则, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\Big[x(1-\gamma^{1/x})-\ln\frac{1}{\gamma}\Big]&=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-1}(1-\gamma^x)-\ln(1/\gamma)}{\sqrt{x}}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{(1-\gamma^x)-x\ln(1/\gamma)}{x^{3/2}}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{-\gamma^x\ln\gamma-\ln(1/\gamma)}{(3/2)x^{1/2}}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{2(\gamma^x-1)\ln(1/\gamma)}{3x^{1/2}}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{4\gamma^x\ln\gamma\ln(1/\gamma)}{3x^{-1/2}}\\&=0.\qquad\square\end{aligned}$$

下面我们考虑估计(4.4)的强相合性和渐近正态性.

命题 4.1 若风险参数θ服从Gamma(λ,β)分布, 且在θ给定下, 风险X_i, $i=1,\ldots,n$, $n+1$相互独立并且都服从指数分布$f(x|\theta)=\theta\mathrm{e}^{-\theta x}$, $x>0$. 则VaR度量的贝叶斯估计(4.4)是$V_\alpha(\theta)$的强相合估计.

证明: 注意到, 在指数–伽马模型下, 条件VaR风险度量为

$$V_\alpha(\theta)=\frac{1}{\theta}\ln\Big(\frac{1}{1-\alpha}\Big). \tag{4.7}$$

根据(4.5), 令$\alpha = 1-\gamma$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} n\big(1-(1-\alpha)^{1/n}\big) = \ln\frac{1}{1-\alpha}.$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty} n\big((1-\alpha)^{-1/(n+\lambda)}-1\big) = \lim_{n\to\infty}\frac{n\big(1-(1-\alpha)^{1/(n+\lambda)}\big)}{(1-\alpha)^{1/(n+\lambda)}} = \ln\frac{1}{1-\alpha}.$$

根据强大数定律, 则

$$\overline{X} \to \mathsf{E}(X|\theta) = \frac{1}{\theta}, \qquad \text{a.s.},$$

因此

$$\begin{aligned}\widehat{V_\alpha(\theta)} &= (\beta+n\overline{X})\big[(1-\alpha)^{-1/(n+\lambda)}-1\big]\\ &= \Big(\frac{\beta}{n}+\overline{X}\Big)\big\{n\big[(1-\alpha)^{-1/(n+\lambda)}-1\big]\big\}\\ &\to \frac{1}{\theta}\ln\Big(\frac{1}{1-\alpha}\Big)\\ &= V_\alpha(\theta). \qquad \square\end{aligned}$$

命题 4.2 若风险参数θ服从Gamma(λ,β)分布, 且在θ给定下, 风险X_i, $i=1,\ldots,n$, $n+1$相互独立服从指数分布$f(x|\theta)=\theta\mathrm{e}^{-\theta x}$, $x>0$. 则VaR度量的贝叶斯估计(4.4)是渐近正态性的, 即有

$$\sqrt{n}(\widehat{V_\alpha(\theta)}-V_\alpha(\theta)) \xrightarrow{L} N\Big(0,\Big(\frac{\ln(1-\alpha)}{\theta}\Big)^2\Big).$$

证明: 根据(4.6), 取$\alpha=1-\gamma$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\Big[n\big(1-(1-\alpha)^{1/(n+\lambda)}\big)-\ln\frac{1}{(1-\alpha)}\Big]=0. \tag{4.8}$$

由独立同分布的中心极限定理, 有

$$\sqrt{n}\Big(\overline{X}-\frac{1}{\theta}\Big) \xrightarrow{L} N\Big(0,\frac{1}{\theta^2}\Big). \tag{4.9}$$

记$Y \triangleq N(0,1/\theta^2)$, 注意到

$$\sqrt{n}\Big(\Big(\overline{X}+\frac{\beta}{n}\Big)-\frac{1}{\theta}\Big)-\sqrt{n}\Big(\overline{X}-\frac{1}{\theta}\Big)=\frac{\beta}{\sqrt{n}}\xrightarrow{\mathsf{P}}0, \tag{4.10}$$

则根据Slustky定理, 有

$$\sqrt{n}\Big(\Big(\overline{X}+\frac{\beta}{n}\Big)-\frac{1}{\theta}\Big)\xrightarrow{L} Y.$$

进而, 由于$\beta/n+\overline{X}\to 1/\theta$, a.s., 因此得到

$$\begin{aligned}&\sqrt{n}\Big(\Big(\frac{\beta}{n}+\overline{X}\Big)\frac{n\big[(1-\alpha)^{-1/(n+\lambda)}-1\big]}{\ln[1/(1-\alpha)]}-\frac{1}{\theta}\Big)-\sqrt{n}\Big(\Big(\overline{X}+\frac{\beta}{n}\Big)-\frac{1}{\theta}\Big)\\=&\Big(\frac{\beta}{n}+\overline{X}\Big)\sqrt{n}\Big\{\frac{n\big[(1-\alpha)^{-1/(n+\lambda)}-1\big]}{\ln[1/(1-\alpha)]}-1\Big\}\\=&\Big(\frac{\beta}{n}+\overline{X}\Big)\frac{\sqrt{n}\{n\big[(1-\alpha)^{-1/(n+\lambda)}-1\big]-\ln[1/(1-\alpha)]\}}{\ln[1/(1-\alpha)]}\\\to&\ 0.\end{aligned}$$

根据Slustky定理得到

$$\sqrt{n}\Big(\Big(\frac{\beta}{n}+\overline{X}\Big)\frac{n\big[(1-\alpha)^{-1/(n+\lambda)}-1\big]}{\ln[1/(1-\alpha)]}-\frac{1}{\theta}\Big)\xrightarrow{L}Y,$$

进而,

$$\begin{aligned}&\sqrt{n}\Big(\Big(\frac{\beta}{n}+\overline{X}\Big)n\big[(1-\alpha)^{-1/(n+\lambda)}-1\big]-\frac{1}{\theta}\ln\Big(\frac{1}{1-\alpha}\Big)\Big)\\=&\ln\Big(\frac{1}{1-\alpha}\Big)\sqrt{n}\Big(\Big(\frac{\beta}{n}+\overline{X}\Big)\frac{n\big[(1-\alpha)^{-1/(n+\lambda)}-1\big]}{\ln[1/(1-\alpha)]}-\frac{1}{\theta}\Big)\\\xrightarrow{L}&\ Y\ln\Big(\frac{1}{1-\alpha}\Big),\end{aligned}$$

即有

$$\sqrt{n}(\widehat{V_\alpha(\theta)}-V_\alpha(\theta))\xrightarrow{L}N\Big(0,\Big(\frac{\ln(1-\alpha)}{\theta}\Big)^2\Big).\qquad\Box$$

注记 7 命题4.1与4.2分别给出了指数–伽马模型下在险价值度量贝叶斯估计的强相合性和渐近正态性. 在一般的贝叶斯模型下, 由于VaR的贝叶斯估计(3.10)没有显示表达式, 因此估计的大样本性质很难证明. 然而, 在正规条件下, 后验分布是相合的, 即有

$$\pi(\theta|\underline{X_n})\to P_\theta,\qquad \text{a.s.},\tag{4.11}$$

其中P_θ为θ处的退化分布, 可参考Barron等(1999), Walker (2004)等. 因此在一定条件下, 有

$$\Pi(x|\underline{X_n})=\int F_X(x|\theta)\pi(\theta|\underline{X_n})\mathrm{d}\theta\to F_X(x|\theta),\qquad \text{a.s.},$$

进而有

$$\widehat{V_\alpha(\theta)}=\Pi^{-1}(\alpha|\underline{X_n})\to F_X^{-1}(x|\theta)=V_\alpha(\theta).$$

关于这些等式的严格证明超出本文考虑的范围.

§5. 数值模拟

为了从数值上验证VAR风险度量的贝叶斯估计的大样本性质及收敛的速度. 我们对指数–伽马模型下VaR的贝叶斯估计进行数值模拟. 取$\alpha = 0.95$, $\lambda = 2$, $\beta = 4$, 对不同的θ和样本容量n, 在10000次重复下, 计算估计的平均值和均方标准差, 得到下表.

表1 指数–伽马模型下VaR风险度量的贝叶斯估计($\alpha = 0.95$)

θ	$n = 20$					$n = 100$				
	$V_\alpha(\theta)$	$\widehat{V_\alpha(\theta)}$	SE_1	V_n	SE_2	$V_\alpha(\theta)$	$\widehat{V_\alpha(\theta)}$	MSE		
$\theta = 0.3$	9.9858	10.2797	2.1844	8.6377	2.8983	9.9858	10.0592	0.9952	9.6912	1.4054
$\theta = 0.6$	4.9929	5.4476	1.1906	4.3346	1.4575	4.9929	5.0872	0.5022	4.8381	0.7014
$\theta = 0.9$	3.3286	3.8198	0.8808	2.8883	0.9744	3.3286	3.4304	0.3456	3.2309	0.4728
$\theta = 1.2$	2.4964	3.0081	0.7429	2.1524	0.7433	2.4964	2.5999	0.2717	2.4148	0.3540
$\theta = 1.5$	1.9972	2.5318	0.6877	1.7349	0.6399	1.9972	2.1054	0.2277	1.9356	0.2820

上表中$\widehat{V_\alpha(\theta)}$和$V_n$分别表示在险价值度量的贝叶斯估计以及样本$\alpha$分位数($V_n$没有利用任何先验信息), 而$\mathrm{SE}_1$和$\mathrm{SE}_2$分别是它们的均方标准差, 从表中可以看出, 一般有$\mathrm{SE}_1 < \mathrm{SE}_2$, 特别当样本容量增加时, 贝叶斯估计$\widehat{V_\alpha(\theta)}$一致比$V_n$好. 另外, 从贝叶斯估计本身来看, 当样本容量较小时, 估计的均方误差都很小(例如$n = 20$, $\theta = 1.2$时, 均方误差的仅为$0.7429^2 = 0.5519$), 满足实际使用的需要.

参 考 文 献

[1] Gelman, A., Carlin, J.B., Stern, H.S. and Rubin, D.B., *Bayesian Data Analysis*, Chapman and Hall, New York, 1995.

[2] Szegö, G., Measures of risk, *European Journal of Operational Research*, **163(1)**(2005), 5–19.

[3] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R., *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*, John Wiley & Sons, 2005.

[4] 胡经生, 王荣, 丁成, VaR方法及其拓展模型在投资组合风险管理中的应用研究, 数量经济技术经济研究, **22(5)**(2005), 141–150.

[5] Puccetti, G., Wang, B. and Wang, R., Complete mixability and asymptotic equivalence of worst-possible VaR and ES estimates, *Insurance: Mathematics and Economics*, **53(3)**(2013), 821–828.

[6] 王伟, 温利民, 章溢, Esscher保费原理下信度估计的比较, 华东师范大学学报 (自然科学版), **2010(3)**(2010), 126–133.

[7] Pan, M.L., Wang, R.M. and Wu, X.Y., On the consistency of credibility premiums regarding Esscher principle, *Insurance: Mathematics and Economics*, **42(1)**(2008), 119–126.

[8] Wu, X.Y. and Zhou, X., A new characterization of distortion premiums via countable additivity for comonotonic risks, *Insurance: Mathematics and Economics*, **38(2)**(2006), 324–334.

[9] Wen, L.M., Wang, W. and Wang, J.L., The credibility premiums for exponential principle, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **27(11)**(2011), 2217–2228.

[10] 陈燕君, 基于VaR的汇率风险度量方法文献综述, 经济研究导刊, **2011(24)**(2011), 74–75.

[11] 谢佳利, 杨善朝, 梁鑫, VaR样本分位数估计的偏差改进, 数量经济技术经济研究, **25(12)**(2008), 139–148.

[12] 杨昕, 对数收益率的偏斜Logistic分布与VaR估计, 数理统计与管理, **30(3)**(2011), 548–553.

[13] Koenker, R., *Quantile Regression*, Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

[14] Zou, H. and Yuan, M., Composite quantile regression and the oracle model selection theory, *The Annals of Statistics*, **36(3)**(2008), 1108–1126.

[15] Kai, B., Li, R. and Zou, H., Local composite quantile regression smoothing: an efficient and safe alternative to local polynomial regression, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B* (*Statistical Methodology*), **72(1)**(2010), 49–69.

[16] Bühlmann, H., Experience rating and credibility, *ASTIN Bulletin*, **4(3)**(1967), 199–207.

[17] Gerber, H.U., Credibility for Esscher premium, *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker*, **3**(1980), 307–312.

[18] Wen, L.M., Wu, X.Y. and Zhao, X.B., The credibility premiums under generalized weighted loss functions, *Journal of Industrial and Management Optimization*, **5(4)**(2009), 893–910.

[19] Barron, A., Schervish, M.J. and Wasserman, L., The consistency of posterior distributions in nonparametric problems, *The Annals of Statistics*, **27(2)**(1999), 536–561.

[20] Walker, S.G., Modern Bayesian asymptotics, *Statistical Science*, **19(1)**(2004), 111–117.

Bayesian Estimation of Value at Risk Measure under Exponential-Gamma Models

Zhang Yi[1] Zhou Dongqiong[2] Wen Limin[1,3]

([1]*School of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang, 330022*)

([2]*Science Teaching Department in Jiangxi University of Technology, Nanchang, 330098*)

([3]*School of Information Management, Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang, 330013*)

VaR measure has important applications in finance and insurance practice. In this paper, the Bayesian models are established. Under some loss function, the Bayeian estimate of VaR is derived. In addition, we prove the strongly consistency and asymptotic normality for the Bayesian estimation of VaR under exponential-Gamma model. Finally, the numerical simulation is done to verify the convergence rate of the estimate of VaR with different sample sizes.

Keywords: Value at risk measure, Bayesian estimation, loss function, strong consistency, asymptotic normality.

AMS Subject Classification: 62G35.