应用概率统计 第 32 卷
第 4 期 2016 年 8 月
Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Aug., 2016, Vol. 32, No. 4, pp. 361-375
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2016.04.004

双因素误差成分的空间面板模型的参数估计 *

谢小义 胡锡健 张辉国 何伦志
(新疆大学数学与系统科学学院, 乌鲁木齐, 830046) (新疆大学经济研究所, 乌鲁木齐, 830046)

摘 要: 本文构造了比较一般化的双因素误差成分结构的空间面板数据模型, 其中误差成分的设定为个体效应也存在空间相关性. 基于广义矩估计方法, 通过构造最优的工具变量, 寻找合适的矩条件组和权重矩阵, 讨论了模型的参数估计问题, 并证明了估计量的相合性. 通过随机模拟分析估计量的有限样本性质, 结果表明加权矩估计量的渐近效果优于未加权矩估计量, 并且模型参数的可行的广义二阶段最小二乘估计量的估计效果很好.

关键词: 空间面板数据模型; 双因素误差成分; 广义矩
中图分类号: O212.1

§1. 引 言

对空间回归模型进行参数估计时, 若观测的维数很大, 因涉及大量的非线性算法, 极大似然(ML)方法的计算十分复杂. 基于此, Kelejian和Prucha [1]提出并使用广义矩方法(GMM)估计空间回归模型, 以降低计算复杂性. Kapoor等 [2]将广义矩方法推广到空间面板数据回归模型, 并详细地证明了估计量的一致性和补充了必要的假设条件. 从此, 利用GMM估计空间面板数据模型的文献大量出现 [3,4]. 随着研究的不断深入, 不光估计方法上存在更新, 模型形式的设定也在不断地发展变化, 存在很大的差异. 像文献[2,5], 它们的研究集中在仅含有个体效应的回归模型中, 其实还有既含个体效应又含时间效应的双因素误差成分的回归模型 [6,7], 且在区域经济增长理论中时间效应也可能很重要 [8], 甚至基于面板数据的双因素误差成分模型比传统计量经济回归模型能更加有效地分析转型经济的宏观经济问题 [9]. 正因如此, 近年来也出现了不少关于含有双因素误差成分的空间回归模型的研究 [8,10–12], 其中, Lee和Yu [8]是采用拟极大似然方法(QML)研究了含有双因素误差成分结构的空间面板模型的参数估计问题.

另外, 在静态空间面板数据模型的文献中, 对模型中误差成分的相关性的设定通常有两种情形. 其一假定空间相关性只存在于特异质成分中, 而不存在于个体效应中 [8,13,14]. 而另一种设定为空间自相关同时存在于个体效应成分与特异质成分中 [2]. 这两种设定意味着不同的空间溢出机制, 互不嵌套 [15].

*国家自然科学基金(41261087)、教育部青年基金(12XJJC910001)、新疆文科基地重大项目基金(XJEDU010615A01)、新疆自然科学基金(2015211C276)和新疆大学博士启动基金(BS130103)资助.
本文2014年8月11日收到, 2015年9月13日收到修改稿.

本文基于文献[8]研究的双因素误差成分模型, 将误差成分的相关性设定为空间相关性同时存在于个体效应成分和特异质成分中, 构造另一种不一样的双因素误差成分结构的空间面板数据模型. 基于广义矩估计方法, 并在矩估计中引入权重矩阵, 分四步对模型参数进行估计. 第一步是通过组内变化和组间变化消除模型中的时间和个体效应, 构造合适的工具变量, 得到回归参数的二阶段最小二乘(2SLS)估计量表达式; 第二步建立适当的矩条件组, 得到余下参数的矩估计量; 第三步运用加权矩阵对第二步得到的参数估计量进行修正; 最后基于获得的加权矩估计量, 得到回归参数的可行的广义二阶段最小二乘(FG2SLS)估计量表达式. 本文命题8和11, 证明了估计量的相合性. 最后进行大量的Monte Carlo模拟, 研究估计量的有限样本性质, 并比较了加权矩估计量和未加权矩估计量的渐近效果.

§2. 模型的设定

假设得到个体$i=1,2,\ldots,N$在时刻$t=1,2,\ldots,T$的观测值. 为记号简洁, 本文规定I_N、I_T分别表示N阶、T阶单位矩阵, l_N、l_T分别表示元素全是1的$N\times1$、$T\times1$维的矩阵, $\otimes$表示kronecker乘积, $\mathrm{tr}(A)$表示矩阵A的迹, $\mathrm{vec_D}(A)$表示由矩阵A的对角元素组成的列向量.

设定数据的生成模型为

$$y_t=x_t\beta+\lambda Wy_t+\kappa+\alpha_t l_N+v_t,\qquad t=1,2,\ldots,T, \tag{1}$$

$$\kappa=\rho M\kappa+\mu,\qquad v_t=\rho Mv_t+\epsilon_t, \tag{2}$$

其中y_t是被解释变量在t时刻的$N\times1$维观测值向量; x_t是解释变量在t时刻的$N\times k$维观测值矩阵(包括常数项列); β为相应的回归系数; μ为不随时间变化的$N\times1$维个体随机效应向量; α_t为在t时刻的不随个体变化的时间随机效应; ϵ_t表示在时刻t的既随时间又随个体而变化的$N\times1$维独立同分布特异质成分向量; M、W为空间权重连接矩阵; λ、ρ为空间自相关系数.

注记 1 双因素误差成分是指模型(1)、(2)中出现的个体随机效应μ和时间随机效应α_t, 其中μ仅随单元个体变化, 反映的是个体不可观测的能力, 譬如研究公司中领导的个人魅力或经验素质; α_t仅随时间变化, 反映所有未包含在回归模型中的发生在特定时期的影响, 譬如罢工对某年产量的影响.

为便于分析, 将模型(1)、(2)按照时间顺序合并可写成矩阵形式

$$\begin{aligned}&Y=X\beta+\lambda(I_T\otimes W)Y+U,\\&U=(I_T\otimes l_N)\alpha+U_1,\\&U_1=\rho(I_T\otimes M)U_1+(l_T\otimes I_N)\mu+\epsilon,\end{aligned} \tag{3}$$

其中$Y=[y_1',y_2',\ldots,y_T']'$, $X=[x_1',x_2',\ldots,x_T']'$, $\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_T]'$, $\epsilon=[\epsilon_1',\epsilon_2',\ldots,\epsilon_T']'$. 另外, 从实际角度出发, 也为方便本文估计量一致性的证明研究, 规定如下假设

假设 2 (a) W、M是对角元素均为零的行标准化矩阵. (b) 对任意的λ、$\rho\in(-1,1)$, $I_N-\lambda W$和$I_N-\rho M$非奇异.

假设 3 T固定, (a) 对任意$1\leqslant i\leqslant N$, $\mu_i\,(\in\mu)$是零均值独立同分布且具有有限方差σ_μ^2和有限4阶矩. (b) 对任意$1\leqslant t\leqslant T$, α_t是零均值独立同分布且具有有限方差σ_α^2和有限4阶矩. (c) 对于任意$1\leqslant i\leqslant N$, $1\leqslant t\leqslant T$, $\epsilon_{it}\,(\in\epsilon)$零均值独立同分布且具有有限方差$\sigma_\epsilon^2$和有限4阶矩. (d) μ_i、α_t和ϵ_{it}相互独立.

假设 4 矩阵X、Y列满秩, 且它们的元素的绝对值一致有界(即存在正实数k_1、k_2, 使得$\max\limits_{i,j}|X(i,j)|\leqslant k_1<\infty$, $\max\limits_{i,j}|Y(i,j)|\leqslant k_2<\infty$).

假设 5 矩阵W、M、$(I_N-\lambda W)^{-1}$和$(I_N-\rho M)^{-1}$的行、列元素的绝对值和一致有界(即对于矩阵元素a_{ij}, 存在正实数k_3、k_4, 使得$\max\limits_i\Big\{\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|\Big\}\leqslant k_3<\infty$, $\max\limits_j\Big\{\sum\limits_{i=1}^n|a_{ij}|\Big\}\leqslant k_4<\infty$).

注记 6 假设2和假设3是空间权重矩阵和误差成分μ, α, ϵ的正则性条件. 假设2的(a)部分意味截面上任何个体都不是它自身的邻居, 且规定所用邻居对它的总的影响的权重为1; (b)部分是说模型的设定是完备的, 即U可由误差成分μ, α, ϵ唯一地决定. 假设3中的第一句话意味着本文的大样本分析对应于T固定而$N\to\infty$的情形, 这一分析基础与微观计量经济学中大量的短面板数据(即N远大于T)的情形刚好一致. 假设4和假设5有助于得到本文估计量的一致性. 与假设4类似的正则性条件在计量经济学文献中比较常见[2]. 假设5限制了截面上个体的临近程度和个点误差项的相关程度, 与之类似的对相关性的限制条件也非常常见[1,2].

令$J_T=l_Tl_T'$, $J_N=l_Nl_N'$, $\overline{J}_T=l_Tl_T'/T$, $\overline{J}_N=l_Nl_N'/N$, $E_T=I_T-\overline{J}_T$, $E_N=I_N-\overline{J}_N$, 则有$E_Nl_N=0$, $(I_T\otimes E_N)U=(I_T\otimes E_N)U_1$. 可见这种转换可"过滤"模型(3)中时间效应$\alpha$的影响. 当$W$、$M$是行标准化矩阵时, $Wl_N=l_N$, $E_NWl_N=E_Nl_N=0$, $E_NW=E_NW(E_N+\overline{J}_N)=E_NW(E_N+l_Nl_N'/N)=E_NWE_N$. 让$(F_{N,N-1},l_N/\sqrt{N})$表示$E_N$的正交规范化矩阵, 其中$F_{N,N-1}$是将$E_N$的对应着特征值为1的正交基按列组成的矩阵. 则有$F_{N,N-1}F_{N,N-1}'=E_N$, $F_{N,N-1}'F_{N,N-1}=I_{N-1}$, $F_{N,N-1}'l_N=0$, $F_{N,N-1}'E_N=F_{N,N-1}'$. 通过上面的等式关系得$F_{N,N-1}'E_NW=F_{N,N-1}'E_NWE_N=F_{N,N-1}'W(F_{N,N-1}F_{N,N-1}')$. 同理可得到关于矩阵$M$的等式关系[8]. 于是将模型(3)等式两端同时乘上$(I_T\otimes F_{N,N-1}')(I_T\otimes E_N)$可变成

$$
\begin{aligned}
Y^* &= X^*\beta+\lambda(I_T\otimes W^*)Y^*+U^*,\\
U^* &= \rho(I_T\otimes M^*)U^*+U_2,\\
U_2 &= (l_T\otimes F_{N,N-1}')\mu+(I_T\otimes F_{N,N-1}')\epsilon,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

其中$Y^*=(I_T\otimes F'_{N,N-1})Y$, $X^*=(I_T\otimes F'_{N,N-1})X$, $U^*=(I_T\otimes F'_{N,N-1})U$, $W^*=F'_{N,N-1}W\cdot F_{N,N-1}$, $M^*=F'_{N,N-1}MF_{N,N-1}$.

§3. 参数估计

讨论参数$(\beta,\ \lambda,\ \rho,\ \sigma_\mu^2,\ \sigma_\alpha^2,\ \sigma_\epsilon^2)$的估计问题时, 我们将估计分为4个步骤. 第1步通过构造工具变量获得参数β, λ的二阶段最小二乘估计量. 第2步利用广义矩方法估计ρ, σ_μ^2, σ_ϵ^2. 第3步获得ρ, σ_μ^2, σ_ϵ^2的加权广义矩估计量. 第4步获得β, λ的可行的广义二阶段最小二乘估计量.

3.1 利用工具变量获得参数β,λ的估计

在假设2–5下, 针对模型(4)可得

$$
\begin{aligned}
&\Omega_{U_2}=\sigma_\mu^2(J_T\otimes I_{N-1})+\sigma_\epsilon^2(I_T\otimes I_{N-1})=\sigma_1^2(\overline{J}_T\otimes I_{N-1})+\sigma_\epsilon^2(E_T\otimes I_{N-1}),\\
&\Omega_{U_2}^{-1/2}=\frac{1}{\sigma_1}(\overline{J}_T\otimes I_{N-1})+\frac{1}{\sigma_\epsilon}(E_T\otimes I_{N-1})=\frac{1}{\sigma_1}Q_1+\frac{1}{\sigma_\epsilon}Q_2,\\
&\Omega_{U^*}=\mathsf{E}(U^*U^{*\prime})=[I_T\otimes(I_{N-1}-\rho M^*)]^{-1}\Omega_{U_2}[I_T\otimes(I_{N-1}-\rho M^{*\prime})]^{-1},\\
&\Omega_{U^*}^{-1/2}=\Omega_{U_2}^{-1/2}[I_T\otimes(I_{N-1}-\rho M^*)],
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中$Q_1=\overline{J}_T\otimes I_{N-1}$, $Q_2=E_T\otimes I_{N-1}$, $\sigma_1^2=T\sigma_\mu^2+\sigma_\epsilon^2$. 根据文献[4]的相关研究, 有

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(Y^*)&=(I_{N-1,T}-\lambda W_T^*)^{-1}X^*\beta=[I_T\otimes(I_{N-1}-\lambda F'_{N,N-1}WF_{N,N-1})^{-1}]X^*\beta\\
&=[I_T\otimes[F'_{N,N-1}(I_N-\lambda W)^{-1}F_{N,N-1}]]X^*\beta\\
&=\Big[I_T\otimes\Big(F'_{N,N-1}\sum_{k=0}\lambda^kW^kF_{N,N-1}\Big)\Big]X^*\beta,
\end{aligned}
$$

其中$I_{N-1,T}=I_T\otimes I_{N-1}$, $W_T^*=I_T\otimes W^*$, $W^0=I_N$. 而且最优工具变量来自

$$
\begin{aligned}
\Omega_{U^*}^{-1/2}W_T^*\mathsf{E}(Y^*)&=\Omega_{U_2}^{-1/2}(I_{N-1,T}-\rho M_T^*)W_T^*\Big[I_T\otimes\Big(F'_{N,N-1}\sum_{k=0}\lambda^kW^kF_{N,N-1}\Big)\Big]X^*\beta\\
&=\sum_{k=0}\lambda^k\Big(\frac{Q_1}{\sigma_1}+\frac{Q_2}{\sigma_\epsilon}\Big)(I_{N-1,T}-\rho M_T^*)[I_T\otimes(W^*F'_{N,N-1}W^kF_{N,N-1})]X^*\beta\\
&=\sum_{k=0}\lambda^k\Big(\frac{Q_1}{\sigma_1}+\frac{Q_2}{\sigma_\epsilon}\Big)(I_{N-1,T}-\rho M_T^*)[I_T\otimes(F'_{N,N-1}WE_NW^kF_{N,N-1})]X^*\beta\\
&=\sum_{k=0}\lambda^k\Big(\frac{Q_1}{\sigma_1}+\frac{Q_2}{\sigma_\epsilon}\Big)(I_{N-1,T}-\rho M_T^*)[I_T\otimes(F'_{N,N-1}W^{k+1}F_{N,N-1})]X^*\beta,
\end{aligned}
$$

其中$M_T^*=I_T\otimes M^*$. 故工具变量H可定义为

$$H=[Q_1G_0,Q_2G_0],\tag{6}$$

其中

$$G_0 = [X^*, W_T^* X^*, \dots, [I_T \otimes (F'_{N,N-1} W^{k+1} F_{N,N-1})] X^*, \dots, G_1],$$
$$G_1 = [M_T^* X^*, M_T^* W_T^* X^*, \dots, [I_T \otimes (F'_{N,N-1} M W^{k+1} F_{N,N-1})] X^*, \dots].$$

因$(E_T \otimes I_{N-1})U^* = [I_T \otimes (I_{N-1} - \rho M^*)^{-1}](E_T \otimes F'_{N,N-1})\epsilon$, 故将模型(4)等式两边同时乘以$E_T \otimes I_{N-1}$可转换成

$$(E_T \otimes I_{N-1})Y^* = (E_T \otimes I_{N-1})Z^*\delta + [I_T \otimes (I_{N-1} - \rho M^*)^{-1}](E_T \otimes F'_{N,N-1})\epsilon, \tag{7}$$

其中$Z^* = [X^*, W_T^* Y^*]$, $\delta = [\beta', \lambda]'$. 从文献[1]的研究可知, 工具变量矩阵$H$要由$[Q_1 G_0, Q_2 G_0]$中一系列相互独立的列组成, 且为有助于得到的估计量的一致性的证明, 对工具变量还需作如下假设.

假设 7 若ρ已知, 工具变量矩阵H应满足:

(a) $Q_{HH} = \lim\limits_{N\to\infty}(NT)^{-1}H'H$有界、非奇异和列满秩.

(b) $Z_Q = Q_2 Z^*$, 则$Q_{HZ_Q} = \underset{N\to\infty}{p\lim}(NT)^{-1}H'Z_Q$和$Q_{HMZ_Q} = \underset{N\to\infty}{p\lim}(NT)^{-1}H'M_T^* Z_Q$存在且有界、列满秩: 当$|\rho| < 1$时, $Q_{HZ_Q}(\rho) = \underset{N\to\infty}{p\lim}(NT)^{-1}H'[I_T \otimes (I_{N-1} - \rho M^*)]Z_Q$列满秩.

(c) 当$|\rho| < 1$时, $\Phi_1 = \lim\limits_{N\to\infty}(NT)^{-1}H'[E_T \otimes [F'_{N,N-1}(I_N - \rho M)^{-1}E_N(I_N - \rho M')^{-1} \cdot F_{N,N-1}]]H$是有界的、非奇异的.

根据模型(7), 定义参数δ的二阶段最小二乘估计量

$$\widehat{\delta} = (\widehat{\beta}', \widehat{\lambda})' = (Z_Q' P_H Z_Q)^{-1} Z_Q' P_H Q_2 Y^*, \tag{8}$$

其中$Z_Q = Q_2 Z^*$, $P_H = H(H'H)^{-1}H'$.

命题 8 在假设2–5和假设7下, 式(8)求出的$\widehat{\delta}$是δ的一致估计量.

证明: 依题意可得

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta} &= (Z_Q' P_H Z_Q)^{-1} Z_Q' P_H Q_2 Y^* \\
&= \delta + (Z_Q' P_H Z_Q)^{-1} Z_Q' P_H [I_T \otimes (I_{N-1} - \rho M^*)^{-1}](E_T \otimes F'_{N,N-1})\epsilon \\
&= \delta + [Z_Q' H(H'H)^{-1}H'Z_Q]^{-1} Z_Q' H(H'H)^{-1}H'[I_T \otimes (I_{N-1} - \rho M^*)^{-1}](E_T \otimes F'_{N,N-1})\epsilon \\
&= \delta + (NT)^{-1}[Q'_{HZ_Q} Q_{HH}^{-1} Q_{HZ_Q}]^{-1} Q'_{HZ_Q} Q_{HH}^{-1} H'[I_T \otimes (I_{N-1} - \rho M^*)^{-1}](E_T \otimes F'_{N,N-1})\epsilon \\
&= \delta + (NT)^{-1}[Q'_{HZ_Q} Q_{HH}^{-1} Q_{HZ_Q}]^{-1} Q'_{HZ_Q} Q_{HH}^{-1} H'[E_T \otimes F'_{N,N-1}(I_N - \rho M)^{-1}E_N]\epsilon,
\end{aligned}$$

从而

$$\sqrt{NT}(\widehat{\delta} - \delta) = [Q'_{HZ_Q} Q_{HH}^{-1} Q_{HZ_Q}]^{-1} Q'_{HZ_Q} Q_{HH}^{-1} \frac{1}{\sqrt{NT}} H'[E_T \otimes F'_{N,N-1}(I_N - \rho M)^{-1}E_N]\epsilon.$$

令$F_1 = H'[E_T \otimes F'_{N,N-1}(I_N - \rho M)^{-1}E_N]$, 由假设7可知$\lim\limits_{N\to\infty}(NT)^{-1}F_1F_1' = \Phi_1$是有界非奇异的. 根据文献[1]的附录中定理A.1的研究, 有$(NT)^{-1/2}F_1\epsilon \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathrm{N}(0, \sigma_\epsilon^2\Phi_1)$, 且

$$\sqrt{NT}(\widehat{\delta} - \delta) \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathrm{N}(0, \Psi),$$

其中$\Psi = \sigma_\epsilon^2[Q'_{HZ_Q}Q_{HH}^{-1}Q_{HZ_Q}]^{-1}Q'_{HZ_Q}Q_{HH}^{-1}\Phi_1 Q_{HH}^{-1}Q_{HZ_Q}[Q'_{HZ_Q}Q_{HH}^{-1}Q_{HZ_Q}]^{-1}$. □

3.2 参数ρ的广义矩估计

对于空间相关回归系数ρ的估计, 本文采用广义矩的估计方法. 根据矩估计的理论研究, 矩条件的数目不能太多或太少, 而适量的增加矩条件有利于估计效果的准确性. 于是本文在假设2–4下, 针对模型(4)讨论如下矩条件组

$$\begin{aligned}
&((N-1)(T-1))^{-1}\mathsf{E}[U_2'Q_2U_2]=\sigma_\epsilon^2, && (N-1)^{-1}\mathsf{E}[U_2'Q_1U_2]=\sigma_1^2,\\
&((N-1)(T-1))^{-1}\mathsf{E}[\overline{U}_2'Q_2\overline{U}_2]=\sigma_\epsilon^2\frac{\mathrm{tr}(M'E_NM)}{N-1}, && (N-1)^{-1}\mathsf{E}[\overline{U}_2'Q_1\overline{U}_2]=\sigma_1^2\frac{\mathrm{tr}(M'E_NM)}{N-1},\\
&((N-1)(T-1))^{-1}\mathsf{E}[\overline{U}_2'Q_2U_2]=\sigma_\epsilon^2\frac{\mathrm{tr}(M'E_N)}{N-1} && (N-1)^{-1}\mathsf{E}[\overline{U}_2'Q_1U_2]=\sigma_1^2\frac{\mathrm{tr}(M'E_N)}{N-1},
\end{aligned} \tag{9}$$

其中$\overline{U}_2 = M_T^*U_2$. 对于式(9), 因所有矩条件求解相似, 在此只求其中一个等式.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[\overline{U}_2'Q_2\overline{U}_2] &= \mathsf{E}[(Q_2\overline{U}_2)'Q_2\overline{U}_2] = \mathsf{E}[((E_T\otimes(M^*F'_{N,N-1}))\epsilon)'((E_T\otimes(M^*F'_{N,N-1}))\epsilon)]\\
&= \mathsf{E}[((E_T\otimes(F'_{N,N-1}ME_N))\epsilon)'((E_T\otimes(F'_{N,N-1}ME_N))\epsilon)]\\
&= \mathsf{E}[\epsilon'(E_T\otimes(E_NM'F_{N,N-1}F'_{n,n-1}ME_N))\epsilon]\\
&= \mathsf{E}[\epsilon'(E_T\otimes(E_NM'E_NME_N))\epsilon]\\
&= \sigma_\epsilon^2\mathrm{tr}(E_T\otimes(M'E_NME_N))\\
&= (T-1)\sigma_\epsilon^2\mathrm{tr}(M'E_NM).
\end{aligned}$$

令$\overline{U}^* = M_T^*U^*$, $\overline{\overline{U}}^* = M_T^*\overline{U}^*$. 则$U_2 = U^* - \rho\overline{U}^*$, $\overline{U}_2 = \overline{U}^* - \rho\overline{\overline{U}}^*$, 从而式(9)可变成

$$\begin{aligned}
&((N-1)(T-1))^{-1}\mathsf{E}[U^{*\prime}Q_2U^* + \rho^2\overline{U}^{*\prime}Q_2\overline{U}^* - 2\rho\overline{U}^{*\prime}Q_2U^*] = \sigma_\epsilon^2,\\
&((N-1)(T-1))^{-1}\mathsf{E}[\overline{U}^{*\prime}Q_2\overline{U}^* + \rho^2\overline{\overline{U}}^{*\prime}Q_2\overline{\overline{U}}^* - 2\rho\overline{\overline{U}}^{*\prime}Q_2\overline{U}^*] = \sigma_\epsilon^2\frac{\mathrm{tr}(M'E_NM)}{N-1},\\
&(T-1)^{-1}\mathsf{E}[\overline{U}^{*\prime}Q_2U^* + \rho^2\overline{\overline{U}}^{*\prime}Q_2\overline{U}^* - \rho(\overline{\overline{U}}^{*\prime}Q_2U^* + \overline{U}^{*\prime}Q_2\overline{U}^*)] = \sigma_\epsilon^2\mathrm{tr}(M'E_N),\\
&(N-1)^{-1}\mathsf{E}[U^{*\prime}Q_1U^* + \rho^2\overline{U}^{*\prime}Q_1\overline{U}^* - 2\rho\overline{U}^{*\prime}Q_1U^*] = \sigma_1^2,\\
&(N-1)^{-1}\mathsf{E}[\overline{U}^{*\prime}Q_1\overline{U}^* + \rho^2\overline{\overline{U}}^{*\prime}Q_1\overline{\overline{U}}^* - 2\rho\overline{\overline{U}}^{*\prime}Q_1\overline{U}^*] = \sigma_1^2\frac{\mathrm{tr}(M'E_NM)}{N-1},\\
&(N-1)^{-1}\mathsf{E}[\overline{U}^{*\prime}Q_1U^* + \rho^2\overline{\overline{U}}^{*\prime}Q_1\overline{U}^* - \rho(\overline{\overline{U}}^{*\prime}Q_1U^{*\prime} + \overline{U}^{*\prime}Q_1\overline{U}^*)] = \sigma_1^2\frac{\mathrm{tr}(M'E_N)}{N-1}.
\end{aligned} \tag{10}$$

令$$G=\begin{pmatrix} \frac{2\mathsf{E}\overline{U}^{*'}Q_2U^*}{(N-1)(T-1)} & \frac{-\mathsf{E}\overline{U}^{*'}Q_2\overline{U}^*}{(N-1)(T-1)} & 1 & 0 \\ \frac{2\mathsf{E}\overline{\overline{U}}^{*'}Q_2\overline{U}^*}{(N-1)(T-1)} & \frac{-\mathsf{E}\overline{\overline{U}}^{*'}Q_2\overline{\overline{U}}^*}{(N-1)(T-1)} & \frac{\mathrm{tr}(M'E_NM)}{N-1} & 0 \\ \frac{\mathsf{E}\overline{\overline{U}}^{*'}Q_2U^*+\mathsf{E}\overline{U}^{*'}Q_2\overline{U}^*}{(N-1)(T-1)} & \frac{-\mathsf{E}\overline{\overline{U}}^{*'}Q_2\overline{U}^*}{(N-1)(T-1)} & \frac{\mathrm{tr}(M'E_N)}{N-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2\mathsf{E}\overline{U}^{*'}Q_1U^*}{N-1} & \frac{-\mathsf{E}\overline{U}^{*'}Q_1\overline{U}^*}{N-1} & 0 & 1 \\ \frac{2\mathsf{E}\overline{\overline{U}}^{*'}Q_1\overline{U}^*}{N-1} & \frac{-\mathsf{E}\overline{\overline{U}}^{*'}Q_1\overline{\overline{U}}^*}{N-1} & 0 & \frac{\mathrm{tr}(M'E_NM)}{N-1} \\ \frac{\mathsf{E}\overline{\overline{U}}^{*'}Q_1U^*+\mathsf{E}\overline{U}^{*'}Q_1\overline{U}^*}{N-1} & \frac{-\mathsf{E}\overline{\overline{U}}^{*'}Q_1\overline{U}^*}{N-1} & 0 & \frac{\mathrm{tr}(M'E_N)}{N-1} \end{pmatrix},\ g=\begin{pmatrix} \frac{\mathsf{E}U^{*'}Q_2U^{*'}}{(N-1)(T-1)} \\ \frac{\mathsf{E}\overline{U}^{*'}Q_2\overline{U}^*}{(N-1)(T-1)} \\ \frac{\mathsf{E}\overline{\overline{U}}^{*'}Q_2U^{*'}}{(N-1)(T-1)} \\ \vdots \\ \frac{\mathsf{E}U^{*'}Q_1U^{*'}}{N-1} \\ \frac{\mathsf{E}\overline{U}^{*'}Q_1\overline{U}^*}{N-1} \\ \frac{\mathsf{E}\overline{\overline{U}}^{*'}Q_1U^{*'}}{N-1} \end{pmatrix},$$
则式(10)可写成
$$G[\rho,\rho^2,\sigma_\epsilon^2,\sigma_1^2]'-g=0.$$
去掉式(10)中的期望算子符号E, 同时将U^*用其估计值$\widehat{U}^*=Y^*-Z^*\widehat{\delta}_1$代替 [2], 得到$G$和$g$的估计矩阵$\widehat{G}$、$\widehat{g}$. 定义
$$\widehat{G}[\rho,\rho^2,\sigma_\epsilon^2,\sigma_1^2]'-\widehat{g}=\xi_{(\rho,\sigma_\epsilon^2,\sigma_1^2)},$$
其中$$\widehat{G}=\begin{pmatrix} \frac{2\widehat{\overline{U}}^{*'}Q_2\widehat{U}^*}{(N-1)(T-1)} & \frac{-\widehat{\overline{U}}^{*'}Q_2\widehat{\overline{U}}^*}{(N-1)(T-1)} & 1 & 0 \\ \frac{2\widehat{\overline{\overline{U}}}^{*'}Q_2\widehat{\overline{U}}^*}{(N-1)(T-1)} & \frac{-\widehat{\overline{\overline{U}}}^{*'}Q_2\widehat{\overline{\overline{U}}}^*}{(N-1)(T-1)} & \frac{\mathrm{tr}(M'E_NM)}{N-1} & 0 \\ \frac{\widehat{\overline{\overline{U}}}^{*'}Q_2\widehat{U}^*+\widehat{\overline{U}}^{*'}Q_2\widehat{\overline{U}}^*}{(N-1)(T-1)} & \frac{-\widehat{\overline{\overline{U}}}^{*'}Q_2\widehat{\overline{U}}^*}{(N-1)(T-1)} & \frac{\mathrm{tr}(M'E_N)}{N-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2\widehat{\overline{U}}^{*'}Q_1\widehat{U}^*}{N-1} & \frac{-\widehat{\overline{U}}^{*'}Q_1\widehat{\overline{U}}^*}{N-1} & 0 & 1 \\ \frac{2\widehat{\overline{\overline{U}}}^{*'}Q_1\widehat{\overline{U}}^*}{N-1} & \frac{-\widehat{\overline{\overline{U}}}^{*'}Q_1\widehat{\overline{\overline{U}}}^*}{N-1} & 0 & \frac{\mathrm{tr}(M'E_NM)}{N-1} \\ \frac{\widehat{\overline{\overline{U}}}^{*'}Q_1\widehat{U}^*+\widehat{\overline{U}}^{*'}Q_1\widehat{\overline{U}}^*}{N-1} & \frac{-\widehat{\overline{\overline{U}}}^{*'}Q_1\widehat{\overline{U}}^*}{N-1} & 0 & \frac{\mathrm{tr}(M'E_N)}{N-1} \end{pmatrix},\ \widehat{g}=\begin{pmatrix} \frac{\widehat{U}^{*'}Q_2\widehat{U}^{*'}}{(N-1)(T-1)} \\ \frac{\widehat{\overline{U}}^{*'}Q_2\widehat{\overline{U}}^*}{(N-1)(T-1)} \\ \frac{\widehat{\overline{\overline{U}}}^{*'}Q_2\widehat{U}^{*'}}{(N-1)(T-1)} \\ \vdots \\ \frac{\widehat{U}^{*'}Q_1\widehat{U}^{*'}}{N-1} \\ \frac{\widehat{\overline{U}}^{*'}Q_1\widehat{\overline{U}}^*}{N-1} \\ \frac{\widehat{\overline{\overline{U}}}^{*'}Q_1\widehat{U}^{*'}}{N-1} \end{pmatrix}.$$
通过解
$$\widehat{\theta}=(\widehat{\rho},\widehat{\sigma}_\epsilon^2,\widehat{\sigma}_1^2)=\arg\min_\theta \xi'_{(\rho,\sigma_\epsilon^2,\sigma_1^2)}\xi_{(\rho,\sigma_\epsilon^2,\sigma_1^2)}, \tag{11}$$
则得到参数ρ, σ_ϵ^2, σ_1^2的广义矩估计量$\widehat{\theta}=(\widehat{\rho},\widehat{\sigma}_\epsilon^2,\widehat{\sigma}_1^2)$. 定义矩阵$G$的前3行前3列的元素组成的矩阵为$G^0$, 后3行且去掉第3列后的元素组成的矩阵为$G^1$.

假设 9 $G^{0'}G^0$、$G^{1'}G^1$的最小特征值不一致逼近于零(即对$i=0$、1, 有$\lambda_{\min}(G^{i'}G^i)\geqslant\lambda_*>0$. λ_*的大小依赖参数ρ、σ_ϵ^2、σ_1^2).

注记 10 假设9是一个识别性条件, 排除可能存在的冗余矩条件. 譬如, 当矩条件组(9)中某个矩条件可以写成其它矩条件的线性组合, 则$G^{0'}G^0$不会是一个满秩矩阵, 因此它的最小特征值就是零, 与以上假设矛盾.

命题 11 在假设2–5以及假设7和假设9下，式(11)得到的矩估计量$(\widehat{\rho},\widehat{\sigma}_\epsilon^2,\widehat{\sigma}_1^2)$是$(\rho,\sigma_\epsilon^2,\sigma_1^2)$的一致估计量.

证明: $(F_{N,N-1},l_N/\sqrt{N})$为E_N的正交规范化矩阵, 且有$F_{N,N-1}F'_{N,N-1}=E_N$, $F'_{N,N-1}\cdot F_{N,N-1}=I_{N-1}$. 于是$F_{N,N-1}$每行元素的平方和等于$(N-1)/N$, 每列元素的平方和等于1. 利用数学归纳法, 可得矩阵$F_{N,N-1}$每行、每列元素的绝对值的和不大于2. 故存在实数k, 使得$\max\limits_i\Big\{\sum\limits_{j=1}^N|a_{ij}|\Big\}\leqslant k<\infty$, $\max\limits_j\Big\{\sum\limits_{i=1}^N|a_{ij}|\Big\}\leqslant k<\infty$, 从而$F_{N,N-1}$的行元素的绝对值和、列元素的绝对值和都一致有界. 根据文献[2]的附录A中Remark A.2知

1. $X^*=F'_{N,N-1}X$、$Y^*=F'_{N,N-1}Y$的元素的绝对值一致有界.
2. $(I_{N-1}-\rho M^*)^{-1}=F'_{N,N-1}(I_N-\rho M)^{-1}F_{N,N-1}$、$M^*=F'_{N,N-1}MF_{N,N-1}$、$W^*=F'_{N,N-1}WF_{N,N-1}$的行、列元素的绝对值和一致有界; W^*Y^*的元素的绝对值一致有界.
3. 式(5)中Ω_{U^*}的行、列元素的绝对值和一致有界.

由文献[2]的附录A中引理A.1、A.2、A.3及定理1可得$(\widehat{\rho},\widehat{\sigma}_\epsilon^2,\widehat{\sigma}_1^2)$是参数$(\rho,\sigma_\epsilon^2,\sigma_1^2)$的一致估计量. □

3.3 参数ρ的加权广义矩估计

根据广义矩估计的理论知识可知, 通过权重矩阵可以提高矩估计量的渐进效率, 且权重矩阵一般选用矩条件组的方差协方差矩阵的逆. 另外, 若$V=(v_1,v_2,\ldots,v_N)'$是随机向量, 且$v_i\,(i=1,2,\ldots,N)$均值为0, 方差为σ^2, A、B是$N\times N$的矩阵. 则

$$\mathsf{E}(V'AV)(V'BV)=(m_4-3\sigma^4)\mathrm{vec}'_{\mathrm{D}}(A)\mathrm{vec}_{\mathrm{D}}(B)+\sigma^4[\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)+\mathrm{tr}(A)(B+B')],$$

这里的m_4是v_i的4阶矩. 而$\mathsf{E}(V'AV)\mathsf{E}(V'BV)=\sigma^4\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$,

$$\mathsf{Cov}\,(V'AV,V'BV)=\mathsf{E}(V'AV)(V'BV)-\mathsf{E}(V'AV)E(V'BV).$$

当v_i服从正态分布时, $m_4-3\sigma^4=0$. 此时便有

$$\mathsf{Cov}\,(V'AV,V'BV)=\sigma^4\mathrm{tr}(A)(B+B'). \tag{12}$$

根据式(12), 计算矩条件组(9)中左边三个矩条件的协方差如下

$$\begin{aligned}\psi_{11}&=\mathsf{Cov}\,(U_2'Q_2U_2,U_2'Q_2U_2)=\mathsf{Cov}\,(\epsilon'(E_T\otimes E_N)\epsilon,\epsilon'(E_T\otimes E_N)\epsilon)\\&=2(n-1)(T-1)\sigma_\epsilon^4,\\\psi_{12}&=\mathsf{Cov}\,(U_2'Q_2U_2,\overline{U}_2'Q_2\overline{U}_2)=\mathsf{Cov}\,(\epsilon'(E_T\otimes E_N)\epsilon,\epsilon'[E_T\otimes(M'E_NM)]\epsilon)\\&=2(T-1)\mathrm{tr}(M'E_NM)\sigma_\epsilon^4,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{13} &= \mathsf{Cov}\,(U_2'Q_2U_2, \overline{U}_2'Q_2U_2) = \mathsf{Cov}\,(\epsilon(E_T\otimes E_N)\epsilon, \epsilon'[E_T\otimes(M'E_N)]\epsilon) \\
&= 2(T-1)\mathrm{tr}(M'E_N)\sigma_\epsilon^4.
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\begin{aligned}
\psi_{21} &= \mathsf{Cov}\,(\overline{U}_2'Q_2\overline{U}_2, U_2'Q_2U_2) = 2(T-1)\mathrm{tr}(M'E_NM)\sigma_\epsilon^4, \\
\psi_{22} &= \mathsf{Cov}\,(\overline{U}_2'Q_2\overline{U}_2, \overline{U}_2'Q_2\overline{U}_2) = 2(T-1)\mathrm{tr}(M'E_NMM'E_NM)\sigma_\epsilon^4, \\
\psi_{23} &= \mathsf{Cov}\,(\overline{u}_2'Q_2\overline{U}_2, \overline{U}_2'Q_2U_2) = 2(T-1)\mathrm{tr}(M'M'E_NM)\sigma_\epsilon^4, \\
\psi_{31} &= \mathsf{Cov}\,(\overline{U}_2'Q_2U_2, U_2'Q_2U_2) = 2(T-1)\mathrm{tr}(M'E_N)\sigma_\epsilon^4, \\
\psi_{32} &= \mathsf{Cov}\,(\overline{U}_2'Q_2U_2, \overline{U}_2'Q_2\overline{U}_2) = 2(T-1)\mathrm{tr}(M'M'E_NM)\sigma_\epsilon^4, \\
\psi_{33} &= \mathsf{Cov}\,(\overline{U}_2'Q_2U_2, \overline{U}_2'Q_2U_2) = (T-1)\mathrm{tr}(M'M'E_N+M'E_NM)\sigma_\epsilon^4.
\end{aligned}
$$

类似的可以得到矩条件组式(9)中右边三个矩条件的方差协方差的表达式.

令

$$
\Theta_1 = \frac{N}{((N-1)(T-1))^2}\begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{pmatrix}.
$$

通过以上计算可得矩条件组式(9)的方差协方差阵为

$$
\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{(T-1)\sigma_1^4}{\sigma_\epsilon^4}\Theta_1 \end{pmatrix}.
$$

显然, Θ式子中含有未知参数σ_ϵ^2, σ_1^2. 若用一致估计量$\widehat{\sigma}_\epsilon^2$, $\widehat{\sigma}_1^2$代替σ_ϵ^2, σ_1^2, 可得到Θ的一致估计$\widehat{\Theta}$.

定义ρ, σ_ϵ^2, σ_1^2的加权矩估计量$\widetilde{\theta}=(\widetilde{\rho},\widetilde{\sigma}_\epsilon^2,\widetilde{\sigma}_1^2)$为

$$
\widetilde{\theta} = (\widetilde{\rho},\widetilde{\sigma}_\epsilon^2,\widetilde{\sigma}_1^2) = \arg\min_{\theta} \xi'_{(\rho,\sigma_\epsilon^2,\sigma_1^2)}\widehat{\Theta}^{-1}\xi_{(\rho,\sigma_\epsilon^2,\sigma_1^2)}. \tag{13}
$$

根据文献[2]中定理2的研究, 在假设2–5以及假设7和假设9下, 当μ_i、α_t、ϵ_{it}都服从正态总体, 且Θ^{-1}的最小和最大特征值不一致逼近0和无穷大(即$0<\lambda_*\leqslant\lambda_{\min}(\Theta^{-1})\leqslant\lambda_{\max}(\Theta^{-1})\leqslant\lambda_{**}<\infty$)时, 式(13)得到的加权矩估计量$(\widetilde{\rho},\widetilde{\sigma}_\epsilon^2,\widetilde{\sigma}_1^2)$是参数$(\rho,\sigma_\epsilon^2,\sigma_1^2)$的一致估计量.

3.4　参数β,λ的可行的广义二阶段最小二乘估计

将式(7)左右两边同时乘以矩阵$[I_T\otimes(I_{N-1}-\rho M^*)]$, 得

$$
Y_1 = Z_1\delta + (E_T\otimes F'_{N,N-1})\epsilon, \tag{14}
$$

其中$Y_1=[E_T\otimes(I_{N-1}-\rho M^*)]Y^*$, $Z_1=[E_T\otimes(I_{N-1}-\rho M^*)]Z^*$. 对于式(14), 若$\rho$已知, 利用工具变量$H$能得到参数$\delta$的2阶段最小二乘(2sls)估计, 但$\rho$未知. 根据文献[1,4]的研究, 可用$\rho$的一致估计值代替真实值, 得到的$\delta$的估计值叫做可行的广义二阶段最小二乘估计(FG2SLS).

定义参数β, λ的可行的广义二阶段最小二乘估计为

$$\widetilde{\delta}_F=(\widetilde{\beta}'_F,\widetilde{\lambda}_F)'=(Z_1'P_HZ_1)^{-1}Z_1'P_H\widetilde{Y}_1, \tag{15}$$

其中$\widetilde{Z}_1=[E_T\otimes(I_{N-1}-\widetilde{\rho}M^*)]Z^*$, $\widetilde{Y}_1=[E_T\otimes(I_{N-1}-\widetilde{\rho}M^*)]Y^*$.

Mutl和Pfaffermayr[4]研究得到若$\widetilde{\rho}$是ρ的一致估计量, 则在以上假设下, 式(15)得到的参数估计量$\widetilde{\beta}_F$、$\widetilde{\lambda}_F$是相应参数的一致估计量.

最后, 由$\sigma_1^2=T\sigma_\mu^2+\sigma_\epsilon^2$, 以及

$$\begin{aligned}E(U'U)&=\mathsf{E}[\alpha'[I_T\otimes(l_N'l_N)]\alpha+\mu'[(l_T'l_T)\otimes((I_N-\rho M')^{-1}(I_N-\rho M)^{-1})]\mu\\&\quad+\epsilon'[I_T\otimes((I_N-\rho M')^{-1}(I_N-\rho M)^{-1})]\epsilon]\\&=NT\sigma_\alpha^2+T(\sigma_\mu^2+\sigma_\epsilon^2)\mathrm{tr}((I_N-\rho M')^{-1}(I_N-\rho M)^{-1}),\end{aligned}$$

可得

$$\widetilde{\sigma}_\alpha^2=\frac{1}{NT}\widetilde{U}_F'\widetilde{U}_F-\frac{c}{N}(\widetilde{\sigma}_\mu^2+\widetilde{\sigma}_\epsilon^2),\qquad \widetilde{\sigma}_\mu^2=\frac{\widetilde{\sigma}_1^2-\widetilde{\sigma}_\epsilon^2}{T}, \tag{16}$$

其中$\widetilde{U}_F=Y-[X\quad W_TY]\widetilde{\delta}_F$, $c=\mathrm{tr}[(I_N-\widetilde{\rho}M')^{-1}(I_N-\widetilde{\rho}M)^{-1}]$.

§4. Monte Carlo模拟分析

模拟实验分两部分进行. 首先模拟比较加权矩估计量和未加权矩估计量的渐近效果, 再模拟分析可行的广义二阶段最小二乘估计量$\widetilde{\beta}$、$\widetilde{\lambda}$和加权矩估计量$\widetilde{\sigma}_\mu^2$、$\widetilde{\sigma}_\epsilon^2$的有限样本性质, 数据生成采用模型(3). 为了计算方便, 只令$x=(x_1,x_2)$, 其中$x_1\sim\mathrm{N}(0,1)$, $x_2\sim\mathrm{N}(0,2)$, 相应的系数$\beta=(\beta_1,\beta_2)'=(3,5)'$. 设定$\sigma_\mu^2=\sigma_\alpha^2=\sigma_\epsilon^2=1$. 设定$W=M$, 另外它们的元素从第2行起到倒数第2行, 服从主对角线的左右两边的元素均为0.5, 其余均为0的规律. 即当$i=2,3,\ldots,N-1$时, $W(i,i-1)=W(i,i+1)=0.5$; 当$i=1$时, $W(1,N)=W(1,2)=0.5$; 当$i=N$时, $W(N,N-1)=W(N,1)=0.5$. 设定$G_0=(X^*,W^*X^*,W^*W^*X^*)$. 本文对每一种情形都进行1000次试验, 对每个参数估计量计算3个指标. 第一个指标为样本均值; 第二个指标为样本方差; 第3个指标为均方误平方根(RMSE), 定义为$[(\widehat{x}_{0.5}-x_0)^2+[(\widehat{x}_{0.75}-\widehat{x}_{0.25})/1.35]^2]^{1/2}$, 其中$x_0$是被估计参数的真值, $\widehat{x}_{0.5}$、$\widehat{x}_{0.25}$、$\widehat{x}_{0.75}$分别是x_0的估计量的1/2和上、下1/4分位数.

讨论加权矩估计量和未加权矩估计量的渐近效果时, 设定$(N,T)=(100,10)$, λ取$(0.6,-0.6)$ 2个值, ρ取$(0.9,0.6,0,-0.6,-0.9)$ 5个值, 模拟结果见表1. 讨论参数估计量的有限样本性质时, 设定$(N,T)\in\{(20,5),(100,10)\}$, λ分别取$(0.9,0,-0.9)$, ρ分别取$(0.9,0.6,0,-0.6,-0.9)$. 模拟结果见表2–4.

表1　加权和未加权矩估计量模拟值

初始值ρ		$\widehat{\rho}$	$\widehat{\sigma}_\mu^2$	$\widehat{\sigma}_\epsilon^2$	$\widetilde{\rho}$	$\widetilde{\sigma}_\mu^2$	$\widetilde{\sigma}_\epsilon^2$
$\lambda=0.6$							
$\rho=0.9$	Mean	0.9349	1.0324	0.9680	0.8970	1.0270	0.9976
	Std	0.0997	0.1084	0.1733	0.0175	0.0582	0.1685
$\rho=0.6$	Mean	0.5970	1.0044	0.9957	0.6009	0.9926	1.0079
	Std	0.0671	0.0876	0.1712	0.0229	0.0531	0.1656
$\rho=0.0$	Mean	-0.0167	1.0005	1.0002	-0.0001	0.9941	1.0147
	Std	0.0916	0.0508	0.1647	0.356	0.0504	0.1641
$\rho=-0.6$	Mean	-0.5882	1.0166	1.0217	-0.5970	1.0010	1.0249
	Std	0.0668	0.0855	0.1599	0.0221	0.0593	0.1520
$\rho=-0.9$	Mean	-1.096	1.2132	1.1364	-0.8959	1.0429	1.0375
	Std	0.1686	0.2905	0.2455	0.0107	0.0895	0.1617
$\lambda=-0.6$							
初始值ρ		$\widehat{\rho}$	$\widehat{\sigma}_\mu^2$	$\widehat{\sigma}_\epsilon^2$	$\widetilde{\rho}$	$\widetilde{\sigma}_\mu^2$	$\widetilde{\sigma}_\epsilon^2$
$\rho=0.9$	Mean	0.9349	1.0324	0.9680	0.8970	1.0270	0.9976
	Std	0.0997	0.1084	0.1733	0.0175	0.0582	0.1685
$\rho=0.6$	Mean	0.5970	1.0044	0.9957	0.6009	0.9926	1.0079
	Std	0.0671	0.0876	0.1712	0.0229	0.0531	0.1656
$\rho=0.0$	Mean	-0.0167	1.0005	1.0002	-0.0001	0.9941	1.0147
	Std	0.0916	0.0508	0.1647	0.356	0.0504	0.1641
$\rho=-0.6$	Mean	-0.5882	1.0166	1.0217	-0.5970	1.0010	1.0249
	Std	0.0668	0.0855	0.1599	0.0221	0.0593	0.1520
$\rho=-0.9$	Mean	-1.096	1.2132	1.1364	-0.8959	1.0429	1.0375
	Std	0.1686	0.2905	0.2455	0.0107	0.0895	0.1617

注: $\widehat{\rho}$、$\widehat{\sigma}_\mu^2$、$\widehat{\sigma}_\epsilon^2$为未加权矩估计量, $\widetilde{\rho}$、$\widetilde{\sigma}_\mu^2$、$\widetilde{\sigma}_\epsilon^2$为加权矩估计量.

观察表1, 不难发现加权矩估计量的模拟值的方差均小于未加权矩估计量的模拟值方差, 表明加权矩估计估计量比未加权矩估计量有更好的渐近效果. 符合矩估计理论.

观察表2–4, 比较表中所有显示Mean一行的估计值与相对应的真实值的大小, 发现两者偏差很小, 表明本文得到的估计量是可行的. 对照分析每张表的上、下2个部分, 发现对于参数β、λ而言, 上、下两部分的估计值(Mean)大体一致, 都十分接近真实值; 而对于参数ρ、σ_μ^2、σ_ϵ^2, 上部分的估计值更接近真实值, 要优于下部分的估计值. 特别是当ρ、λ的初始值的绝对值接近1 时, 下部分的估计量有些许偏差, 而上部分的仍非常接近真实值. 另外, 观察样本均值(Std)、均方误平方根(Rmse)两行, 发现上部分的这两个指标数据要比下部分相应的这两个指标数据要小, 前者大致上是后者的$1/4\sim 1/3$, 表明当样本量增加时, 得到的参数估计量有更好的估计效果.

表2 $\lambda=0.9$时各估计量的分析指标模拟值

初始值ρ		$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\lambda}$	$\widehat{\rho}$	$\widehat{\sigma}^2_\mu$	$\widehat{\sigma}^2_\alpha$	$\widehat{\sigma}^2_\epsilon$
$N=100,\ T=10$								
$\rho=0.9$	Mean	3.0070	5.0010	(0.9018)	$\underline{0.9050}$	0.9864	1.1171	1.0225
	Std	0.0315	0.0329	0.0101	0.0151	0.1480	2.7063	0.0618
	Rmse	0.0337	0.0358	0.0104	0.0178	0.1475	1.2242	0.0656
$\rho=0.6$	Mean	2.9999	4.9908	(0.9000)	$\underline{0.6023}$	1.0109	1.0047	1.0045
	Std	0.0322	0.0302	0.0042	0.0248	0.1709	0.5350	0.0520
	Rmse	0.0310	0.0312	0.0037	0.0246	0.1745	0.5162	0.0513
$\rho=0.0$	Mean	2.9949	5.0034	(0.9002)	$\underline{-0.0006}$	1.0294	1.0402	0.9965
	Std	0.0352	0.0360	0.0022	0.0287	0.1624	0.4882	0.0483
	Rmse	0.0396	0.0372	0.0026	0.0276	0.1468	0.4730	0.0485
$\rho=-0.6$	Mean	2.9948	5.0017	(0.9003)	$\underline{-0.6069}$	1.0070	1.0089	0.9947
	Std	0.0350	0.0414	0.0016	0.0236	0.1564	0.5462	0.0495
	Rmse	0.0400	0.0373	0.0015	0.039	0.1431	0.4794	0.0529
$\rho=-0.9$	Mean	2.9941	5.0030	(0.9001)	$\underline{-0.9025}$	1.0123	1.0026	1.0477
	Std	0.0331	0.0445	0.0015	0.0107	0.1881	0.7708	0.0615
	Rmse	0.04038	0.0390	0.0016	0.0107	0.2124	1.3771	0.0791
$N=20,\ T=5$								
初始值ρ		$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\lambda}$	$\widehat{\rho}$	$\widehat{\sigma}^2_\mu$	$\widehat{\sigma}^2_\alpha$	$\widehat{\sigma}^2_\epsilon$
$\rho=0.9$	Mean	3.0059	5.0175	(0.9082)	$\underline{0.9148}$	1.0524	2.9270	1.1993
	Std	0.1062	0.1046	0.0338	0.1187	0.5223	7.5494	0.3686
	Rmse	0.1129	0.1196	0.0300	0.0798	0.4860	1.8128	0.3715
$\rho=0.6$	Mean	2.9956	4.9967	(0.9003)	$\underline{0.5994}$	1.0052	0.9983	0.9491
	Std	0.1052	0.1140	0.0141	0.1020	0.4086	1.2918	0.1515
	Rmse	0.1073	0.1130	0.0149	0.1081	0.4120	1.2169	0.1661
$\rho=0.0$	Mean	2.9925	4.9900	(0.9003)	$\underline{-0.0033}$	0.9440	1.0743	0.9403
	Std	0.1182	0.1237	0.0122	0.1487	0.3583	0.7559	0.1666
	Rmse	0.1070	0.1174	0.0124	0.1332	0.3681	0.6764	0.1949
$\rho=-0.6$	Mean	3.0068	5.0117	(0.8997)	$\underline{-0.6255}$	0.9458	0.8533	0.9761
	Std	0.1255	0.1573	0.0099	0.0907	0.3846	0.7484	0.1718
	Rmse	0.1242	0.1789	0.0091	0.1024	0.4016	0.8533	0.1892
$\rho=-0.9$	Mean	3.0090	5.0012	(0.8994)	$\underline{-0.9098}$	1.0970	0.7789	1.4804
	Std	0.1427	0.1446	0.0054	0.0921	0.5955	1.9908	0.4827
	Rmse	0.1401	0.1338	0.0039	0.0473	0.6268	1.0000	0.5648

注: $\widetilde{\beta}_1$、$\widetilde{\beta}_2$、$\widetilde{\lambda}$为可行的广义二阶段最小二乘估计量, $\widetilde{\rho}$、$\widetilde{\sigma}^2_\mu$、$\widetilde{\sigma}^2_\epsilon$为加权矩估计量.

参 考 文 献

[1] Kelejian H H, Prucha I R. A generalized spatial two-stage least squares procedure for estimating a spatial autoregressive model with antoregressive disturbances [J]. *J. Real Estate Financ. Econ.*, 1998, **17(1)**: 99–121.

表3　$\lambda=0$时各估计量的分析指标模拟值

$N=100,\ T=10$								
初始值ρ		$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\lambda}$	$\widehat{\rho}$	$\widehat{\sigma}_\mu^2$	$\widehat{\sigma}_\alpha^2$	$\widehat{\sigma}_\epsilon^2$
$\rho=0.9$	Mean	3.0013	5.0068	(0.0058)	$\underline{0.9012}$	1.0400	1.3927	1.0485
	Std	0.0367	0.0468	0.0122	0.0135	0.1918	2.2791	0.0717
	Rmse	0.0378	0.0463	0.0113	0.0127	0.2120	1.9149	0.0777
$\rho=0.6$	Mean	3.0050	5.0017	(-0.0009)	$\underline{0.5973}$	0.9716	1.0007	1.0064
	Std	0.0327	0.0407	0.0087	0.0253	0.1437	0.5816	0.0610
	Rmse	0.0307	0.0342	0.0076	0.0218	0.1427	0.5568	0.0702
$\rho=0.0$	Mean	2.9976	5.0023	(-0.0011)	$\underline{0.0045}$	1.0134	1.0162	0.9995
	Std	0.0324	0.0406	0.0083	0.0343	0.1631	0.4714	0.0523
	Rmse	0.0304	0.0341	0.0088	0.0346	0.1339	0.4546	0.0543
$\rho=-0.6$	Mean	3.0091	4.9859	(0.0007)	$\underline{-0.6009}$	1.0008	1.0216	1.0026
	Std	0.0336	0.0409	0.0098	0.0285	0.1388	0.4774	0.0492
	Rmse	0.0377	0.0356	0.0088	0.0301	0.1301	0.4806	0.0498
$\rho=-0.9$	Mean	3.0095	5.0001	(-0.0073)	$\underline{-0.9051}$	1.0258	0.9688	1.0720
	Std	0.0374	0.0448	0.0111	0.0270	0.1648	1.7445	0.0811
	Rmse	0.0374	0.0411	0.0117	0.0136	0.1693	1.3224	0.0848
$N=20,\ T=5$								
初始值ρ		$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\lambda}$	$\widehat{\rho}$	$\widehat{\sigma}_\mu^2$	$\widehat{\sigma}_\alpha^2$	$\widehat{\sigma}_\epsilon^2$
$\rho=0.9$	Mean	2.9550	4.9971	(0.0748)	$\underline{0.9112}$	1.1525	2.6358	1.4305
	Std	0.1181	0.2035	0.0430	0.1141	0.5457	5.0916	0.5035
	Rmse	0.0974	0.1773	0.0447	0.0711	0.5080	2.6046	0.5068
$\rho=0.6$	Mean	2.9952	4.9771	(-0.0031)	$\underline{0.6145}$	0.9798	0.9029	0.9870
	Std	0.0978	0.1401	0.0361	0.1053	0.4198	1.0927	0.1858
	Rmse	0.1052	0.1324	0.0290	0.1005	0.4230	1.2840	0.1769
$\rho=0.0$	Mean	2.9942	5.0024	(-0.0028)	$\underline{-0.0094}$	0.9950	1.0242	0.9255
	Std	0.1183	0.11101	0.0281	0.1169	0.4079	0.8983	0.1545
	Rmse	0.1050	0.1163	0.0304	0.1165	0.4547	0.5877	0.1764
$\rho=-0.6$	Mean	2.9915	4.9932	(-0.0088)	$\underline{-0.6036}$	0.9854	0.8916	0.9750
	Std	0.1323	0.1393	0.0379	0.0954	0.4095	0.7291	0.1699
	Rmse	0.1243	0.1336	0.0364	0.0801	0.4114	0.9555	0.1910
$\rho=-0.9$	Mean	3.0019	4.9876	(0.0049)	$\underline{-0.8788}$	1.1254	2.8607	1.6295
	Std	0.1276	0.2344	0.0565	0.0939	0.6286	4.4707	0.7246
	Rmse	0.0979	0.2344	0.0539	0.0734	0.4333	3.5079	0.7755

注: $\widetilde{\beta}_1$、$\widetilde{\beta}_2$、$\widetilde{\lambda}$为可行的广义二阶段最小二乘估计量, $\widetilde{\rho}$、$\widetilde{\sigma}_\mu^2$、$\widetilde{\sigma}_\epsilon^2$为加权矩估计量.

[2] kapoor M, Kelejian H H, Prucha I R. Panel data models with spatially correlated error components [J]. *J. Econometrics*, 2007, **140(1)**: 97–130.

[3] Badinger H, Egger P. Estimation of spatial autoregressive M-way error component panel data models [J]. *Ann. Regional Sci.*, 2011, **47(2)**: 269–310.

表4　$\lambda=-0.9$时各估计量的分析指标模拟值

初始值ρ		$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\lambda}$	$\widehat{\rho}$	$\widehat{\sigma}^2_\mu$	$\widehat{\sigma}^2_\alpha$	$\widehat{\sigma}^2_\epsilon$
$N=100,\ T=10$								
$\rho=0.9$	Mean	3.0031	4.9934	(-0.9008)	0.9054	1.0006	0.9316	1.0668
	Std	0.0371	0.0392	0.0014	0.0414	0.1851	1.8306	0.0736
	Rmse	0.0363	0.0321	0.0013	0.0130	0.1896	1.2757	0.0958
$\rho=0.6$	Mean	3.0036	4.9998	(-0.8999)	0.5924	1.0022	0.9469	0.9982
	Std	0.0340	0.0460	0.0016	0.0219	0.1309	0.4981	0.0503
	Rmse	0.0310	0.0467	0.0017	0.0279	0.1419	0.5010	0.0557
$\rho=0.0$	Mean	2.9925	5.0037	(-0.8994)	-0.0067	1.0194	1.0614	0.9942
	Std	0.0319	0.0361	0.0018	0.0357	0.1487	0.3931	0.0469
	Rmse	0.0326	0.0348	0.0019	0.0345	0.1505	0.3750	0.0455
$\rho=-0.6$	Mean	2.9939	4.9936	(-0.9003)	-0.5983	1.0067	0.9963	0.9953
	Std	0.0330	0.0292	0.0044	0.0249	0.1401	0.4907	0.0442
	Rmse	0.0291	0.0278	0.0041	0.0268	0.1376	0.5268	0.00423
$\rho=-0.9$	Mean	3.0014	5.0044	(-0.9007)	-0.9026	1.0525	1.0398	1.0354
	Std	0.0291	0.0312	0.0092	0.0172	0.1547	2.4776	0.0605
	Rmse	0.0292	0.0332	0.0120	0.0175	0.1574	1.1385	0.0652
$N=20,\ T=5$								
初始值ρ		$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\beta}_2$	$\widehat{\lambda}$	$\widehat{\rho}$	$\widehat{\sigma}^2_\mu$	$\widehat{\sigma}^2_\alpha$	$\widehat{\sigma}^2_\epsilon$
$\rho=0.9$	Mean	2.9921	4.9823	(-0.9008)	0.9261	1.1785	2.1386	1.3822
	Std	0.1302	0.1436	0.0057	0.1052	0.6773	0.5684	0.3678
	Rmse	0.1276	0.1365	0.0051	0.0658	0.5389	1.0008	0.3551
$\rho=0.6$	Mean	2.9976	4.9790	(-0.9012)	0.6096	1.0845	0.7047	0.9473
	Std	0.1028	0.1083	0.0056	0.0933	0.4243	0.8159	0.1718
	Rmse	0.1065	0.1204	0.0061	0.0790	0.4334	0.9352	0.1630
$\rho=0.0$	Mean	2.9983	5.0117	(-0.9002)	-0.0061	0.9774	1.0536	0.9618
	Std	0.112	0.1548	0.0064	0.1216	0.3108	0.7013	0.2578
	Rmse	0.10791	0.1330	0.0065	0.1306	0.3203	0.7249	0.1660
$\rho=-0.6$	Mean	2.9938	4.9988	(-0.9007)	-0.5955	0.9736	0.8902	0.9830
	Std	0.1191	0.1075	0.0106	0.0952	0.4086	0.8783	0.1946
	Rmse	0.1288	0.1076	0.0102	0.0807	0.4141	0.9598	0.1828
$\rho=-0.9$	Mean	3.0009	4.9861	(-0.9084)	-0.8746	1.2371	3.8429	1.4290
	Std	0.1332	0.0915	0.0281	0.1135	0.6978	2.5884	0.5727
	Rmse	0.1275	0.0956	0.0328	0.0867	0.6323	3.2715	0.5164

注: $\widetilde{\beta}_1$、$\widetilde{\beta}_2$、$\widetilde{\lambda}$为可行的广义二阶段最小二乘估计量, $\widetilde{\rho}$、$\widetilde{\sigma}^2_\mu$、$\widetilde{\sigma}^2_\epsilon$为加权矩估计量.

[4] Mutl J, Pfaffermayr, M. The Hausman test in a Cliff and Ord panel model [J]. *Econom. J.*, 2011, **14(1)**: 48–76.

[5] Baltagi B H, Song S H, Koh W. Testing panel data regression models with spatial error correlation [J]. *J. Econometrics*, 2003, **117(1)**: 123–150.

[6] Baltagi B. *Econometric Analysis of Panel Data* [M]. New York: Wiley, 1995.

[7] Hahn J, Moon H R. Reducing bias of MLE in a dynamic panel model [J]. *Econometric Theory*, 2006, **22(3)**: 499–512.

[8] Lee L F, Yu J H. Estimation of spatial autoregressive panel data models with fixed effects [J]. *J. Econometrics*, 2010, **154(2)**: 165–185.

[9] 白仲林, 郭小力, 霍建新. 面板数据双因素误差回归模型序列相关和随机效应的联合LM检验 [J]. 统计与信息论坛, 2010, **25(4)**: 3–8.

[10] Wu J H, Zhu L X. Testing for serial correlation and random effects in a two-way error component regression model [J]. *Econ. Model.*, 2011, **28(6)**: 2377–2386.

[11] Platoni S, Sckokai P, Moro D. A note on two-way ECM estimation of SUR systems on unbalanced panel data [J]. *Economet. Rev.*, 2012, **31(2)**: 119–141.

[12] Kouassi E, Mougoué M, Sango J, et al. Testing for heteroskedasticity and spatial correlation in a two way random effects model [J]. *Comput. Statist. Data Anal.*, 2014, **70**: 153–171.

[13] Anselin L. *Spatial Econometrics: Methods and Models* [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1988.

[14] Su L J, Yang Z L. QML estimation of dynamic panel data models with spatial errors [J]. *J. Econometrics*, 2015, **185(1)**: 230–258.

[15] 张征宇, 朱平芳. 空间动态面板模型拟极大似然估计的渐近效率改进 [J]. 数量经济技术经济研究, 2009, **26(5)**: 145–157.

Estimation of Spatial Panel Data Models with Two-Way Error Component

XIE Xiaoyi HU Xijian ZHANG Huiguo

(*College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Xinjiang, 830046, China*)

HE Lunzhi

(*Institute of Economic Research, Xinjiang University, Xinjiang, 830046, China*)

Abstract: In this paper, we construct a generalized spatial panel data model with two-way error components where the spatial correlation also exist in the individual effects. Based on the methods of the generalized moment estimate and the two-step least square estimate, we look for the best instrumental variable, fit generalized moments and the weighted matrix to discuss the estimator of the parameters, and prove the consistent of the estimators. Monte Carlo experiments show that the weighted generalized moment estimators are better than the unweighted generalized moment estimators, and the estimate effect of feasible generalized two stages least squares estimators is good.

Keywords: spatial panel data model; two-way error component; generalized moment

2010 Mathematics Subject Classification: 62N02