

美军标指数方程的来龙去脉

陶波

(中国科学院系统科学研究所, 北京, 100080)

谢蕴芬 宋娅美

(国营4326厂, 凯里, 556011)

美国 MIL-C-39003F 标准规定钽电容器的加速因子由下述指数方程确定:

$$\tau = \tau_{a \sim r} = A \exp\left(B \frac{V_a}{V_r}\right), \quad (1)$$

其中 V_r 为额定电压, V_a 为加速电压, A, B 为经验系数:

$$A = 7.03412025 \times 10^{-9}, \quad B = 18.77249321. \quad (2)$$

我们手头有估计 A, B 所依据的 6 个厂家 6 种型号钽电容器的寿命试验数据, 以及一些计算的中间结果. 沿着这一线索, 寻本求源, 弄清楚了美军标 (MIL) 中 A, B 的估计方法. 下面叙述这个方法, 并提出几点看法.

1. 分组数据的拟合 MIL 假定钽电容器的寿命服从下述形式的 Weibull 分布:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{(t-\gamma)^\beta}{\alpha}\right),$$

因而其特征寿命为 $\theta = \alpha^{1/\beta} + \gamma$. 分别用 θ_r 和 θ_a 记电压 V_r 和 V_a 下的特征寿命, 则 $\tau_{a \sim r} = \theta_r / \theta_a$, 代入 (1), 再取对数, 得

$$\ln \theta_r - \ln \theta_a = \ln A + B \frac{V_a}{V_r}.$$

记 $x = V_a / V_r$, $y = \ln \theta_a$, $a = \ln \theta_r - \ln A$ 和 $b = -B$, 则

$$y = a + bx. \quad (3)$$

MIL 取同一厂家同一型号的钽电容器作为一组, 做恒定应力加速寿命试验. 试验在 $V_a / V_r = 1.0, \dots, 2.5$ 等 9 个应力水平下进行. MIL 数据给出了相应的特征寿命估计值 θ . 因而可将 (3) 看作一元线性回归方程, 分别对每一试验组, 根据 x 和 y 的数据估计回归系数 a, b .

在 MIL 数据中, 对于一个试验组, 并不是每一应力水平都有数据. 而且, 有些数据明显地不合理. 例如, 当电压加大时, 特征寿命反而增大. 这样的数据一般应该剔除. 我们要求经剔除后, 做线性回归的有效数据至少有 3 对, 不足 3 对的试验组只好舍弃.

对于绝大多数试验组, 我们的计算结果都与 MIL 的中间结果完全吻合. 少数差异的产生很可能是因为 MIL 对数据的工程调整.

2. 拟合平均加速因子 因为当 $V_a = V_r$ 时 $\tau = 1$, 所以由(1)有 $A = e^{-B}$, 再代入(1), 得到

$$\tau = \exp \left[B \left(\frac{V_a}{V_r} - 1 \right) \right]. \quad (4)$$

将每一试验组估计出的 $B = -b$ 分别代入(4), 即可对任意给定的应力水平 V_a/V_r 算出该组加速因子 τ 的估计值. 然后求出所有组 τ 值的平均值 $\bar{\tau}$. MIL 取 $V_a/V_r = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4$, 再注意到 $V_a/V_r = 1$ 时 $\tau = 1$, 于是得到表1的5对数据.

表 1

V_a/V_r	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
$\bar{\tau}$	1	5.4910	42.7128	443.9189	5518.78

在(1)式两边取对数, 并记 $y = \ln \tau$, $x = V_a/V_r$ 和 $a = \ln A$, 则有

$$y = a + Bx. \quad (5)$$

利用表1的数据解线性回归(5), 即得到回归系数 a, B (记为 B_{reg}).

3. 系数 A, B 的敲定 上述计算结果, 即 B_{reg} 与 $A = e^a$, 又与 MIL 的结果完全吻合, 可见我们摸索出的方法就是 MIL 所采用的方法. 但这一结果与 MIL 指数方程的经验系数(2)并不相同. 那么, (2)是怎么得到的? 几经周折, 我们终于发现, 系数(2)是由表1居中的一对数据(1.2, 42.7128)确定的: 将这对数据代入(4), 即

$$42.7128 = e^{B(1.2-1)},$$

其解即(2)中 B 值 B_{mil} , 再利用 $A = e^{-B}$ 算出 A . 这大概是专家们嫌 B_{reg} 确定的加速因子太大, 所作的一种工程调整吧.

4. 与逆幂律比较 根据逆幂律, 特征寿命可表为 $\theta = 1/dV^c$, 从而

$$\tau = \frac{\theta_r}{\theta_a} = \left(\frac{V_a}{V_r} \right)^c. \quad (6)$$

从(6)式出发, 也可做与 MIL 方法类似的计算, 最终得到 c 和 τ 的估计.

表2~表3列出了分别用两种加速方程(指数方程和逆幂律)对 MIL 数据计算的部分结果. 我们看到, 对于逆幂律, 各试验组回归变量的相关系数 R_I 大都小于指数方程相应的相关系数 R_E , 而由逆幂律确定的加速因子 τ_I 又比指数方程确定的相应的 τ_E 大许多. 恐怕这就是 MIL 舍逆幂律取指数方程的道理.

5. 使用指数方程的一点注意 设 θ_0, θ_1 和 θ_2 分别是电压为 V_0, V_1 和 V_2 时的特征寿命. 于是, 对于逆幂律,

$$\tau_{V_2 \sim V_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\theta_0}{\theta_1} = \frac{\left(\frac{V_2}{\theta_0} \right)^c}{\left(\frac{V_1}{\theta_0} \right)^c} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^c,$$

表 2

	指数方程		逆幂律		指数方程		逆幂律
	B	R _E	R _I		B	R _E	R _I
2.2/20				47/20			
#1	7.96	.9550	.9895	#1	12.89	.8750	.8349
#2	11.01	.9982	.9418	#2	18.11	.9997	.9997
#5	11.45	.9855	.9743	#3	14.21	.9976	.9902
#6	9.66	.9990	.9960	#5	15.56	.9915	.9147
				#6	16.76	.9613	.9362
1/50				150/15			
#1	10.90	.9906	.9959	#1	7.78	.9401	.9115
#2	10.05	.8692	.8510	#2	20.91	.9891	.9792
#5	13.53	.9483	.9362	#4	16.07	.9929	.9833
				#6	26.14	.9519	.9292
6.8/35				47/35			
#1	17.11	.9924	.9941	#1	17.32	.9873	.9946
#2	20.09	.9560	.8953	#2	20.59	.9988	.9964
#4	11.26	.9041	.8700	#3	14.29	.8701	.8947
#5	28.16	.9617	.9512	#4	23.59	.9126	.8372
#6	18.34	.9501	.9378	#5	14.15	.8509	.8062
				#6	24.34	.9709	.9725

表 3

指数方程				逆幂律			
B _{reg}	21.6243	B _{mit}	18.7724	C _{reg}	49.9492	C	48.0920
V _a /V _r	τ _E	V _a /V _r	τ _E	V _a /V _r	τ _I	V _a /V _r	τ _I
1.0	1.0000 × 10 ⁰	1.0	1.0000 × 10 ⁰	1.0	1.0000 × 10 ⁰	1.0	1.0000 × 10 ⁰
1.1	8.6922 × 10 ⁰	1.1	6.5354 × 10 ⁰	1.1	1.1682 × 10 ²	1.1	9.7871 × 10 ¹
1.2	7.5554 × 10 ¹	1.2	4.2712 × 10 ¹	1.2	9.0165 × 10 ³	1.2	6.4266 × 10 ³
1.3	6.5674 × 10 ²	1.3	2.7914 × 10 ²	1.2192	2.0000 × 10 ⁴	1.2286	2.0000 × 10 ³
1.4	5.7085 × 10 ³	1.4	1.8243 × 10 ³				
1.4579	2.0000 × 10 ⁴	1.5	1.1922 × 10 ⁴				
		1.5275	2.0000 × 10 ⁴				

即当额定电压由 V_0 改变为 V_1 时, 参数 c 保持不变. 而指数方程不具有这一性质, 其参数 B ($A = e^{-B}$) 将随着额定电压的改变而变化. 这是因为, 不难证明,

$$\frac{\exp \left[B \left(\frac{V_2}{V_0} - 1 \right) \right]}{\exp \left[B \left(\frac{V_1}{V_0} - 1 \right) \right]} \neq \exp \left[B \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) \right],$$

除非 $V_1 = V_0 = V_2$ 或 $B = 0$.

所以, 首先, 在估计指数方程的参数时, 必须要求所涉及的额定电压 V_r 不变. 特别, MIL 方法也只有在这一要求被满足时才有意义. 其次, 在利用所得指数方程计算加速因子时, 应保持 V_r 的值与估计参数时的 V_r 值相同. 也就是说, 当额定电压改变时, 必须重新估计指数方程的参数.

6. 一孔之见 不难看出, MIL 方法的着眼点在于平均加速因子. 这是统计中一种典型的思想和方法. 但是, 我们发现, 表 2 和表 3 所列 27 个试验组的 B 值 (在我们手头的 MIL 数据的复制件中缺型号 150/15 的中间结果, 这一型号的 4 个 B 值由我们计算补充, 其余 23 个为 MIL 数据中的全部分组 B 值.) 中, 竟有 20 个小于 B_{mil} . 因为加速因子 τ 是 B 的单调增加函数, 所以, 按照 MIL 标准, 27 个试验数据中有 20 个组的加速因子将被提高!

我们认为, 至少在大多数场合, 对可靠度的估计不宜太冒, 宁可稍保守一点. 而且就统计方法而言, 也不必只局限于各组加速因子的平均值. 例如, 可以采用加速因子的中位数, 这相当于在估计 B 时, 采用 27 个 B 值的中位数 B_{med} , 也可用 27 个 B 值的平均值 B_{mean} 等, 如果 B 的这些估计值以及由它们确定的加速因子 (见表 4) 也呈现在 MIL 专家面前, 也许专家们会作出更为稳妥, 而又不失有充分的统计依据的选择.

表 4

$B_{med} 15.5559$				$B_{mean} 16.0090$			
V_a/V_r	τ	V_a/V_r	τ	V_a/V_r	τ	V_a/V_r	τ
1.0	1.0000×10^0	1.4	5.0389×10^2	1.0	1.0000×10^0	1.4	6.0402×10^2
1.1	4.7378×10^0	1.5	2.3873×10^3	1.1	4.9575×10^0	1.5	2.9944×10^3
1.2	2.2447×10^1	1.6	1.1311×10^4	1.2	2.4576×10^1	1.6	1.4845×10^4
1.3	1.0635×10^2	1.6366	2.0000×10^4	1.3	1.2184×10^2	1.6186	2.0000×10^4

参 考 文 献

[1] 美国 MIL-C-39003F 标准