应用概率统计　第二卷
第一期　1986 年 2 月

Chinese Journal of Applied Probability
and Statistics Vol. 2. No. 1. Feb., 1986

Schrödinger 方程的解的概率表示

李志阐　宋仁明
(河北大学)

设 $\{x(t),\ t\geqslant 0\}$ 是 $R^d(d\geqslant 1)$ 中的 Brown 运动，$P_x(\cdot)$ 是自 x 出发的 Brown 运动所产生的 Wiener 测度，$E_x(\cdot)$ 表示关于 P_x 的积分，D 是 R^d 中的一个给定的有界区域，τ_D 是 Brown 运动 $x(t)$ 首出 D 的时刻，q 是 D 内的一个给定的有界 Hölder 连续函数．为了简单起见，我们令

$$e(t)=\exp\left(\int_0^t q(x(s))ds\right);\quad t\geqslant 0.$$

在本文中，我们还假定 $E_x(e(\tau_D))$ 在 D 内不恒为无穷．

对定义在 D 的边界 ∂D 上的一个可测函数 φ，文 [2] 证明了如下的事实：如果 $E_x(e(\tau_D)|\varphi(x(\tau_D))|)$ 在 D 内不恒为无穷，则函数

$$u(x)=E_x(e(\tau_D)\varphi(x(\tau_D))),\quad x\in D,\tag{1}$$

是方程

$$(\Delta+2q)f=0\tag{2}$$

在 D 内的一个解．本文打算研究相反的问题：即给定方程 (2) 在区域 D 内的一个解 u，问什么时候 u 可以表成 (1) 的形式？

在本文中我们用 S 表示方程 (2) 在 D 内的解的全体，并令

$$S_1=\{u\in S:\ u \text{ 在 } D \text{ 内有界}\},$$
$$S_2=\{u\in S:\ \exists u_n\in S_1,\ \text{使 } u_n\uparrow u\},$$
$$S_3=\{u\in S:\ \exists u_i\in S_2,\ \alpha_i\in R^1,\ i=1,\ 2,\ \text{使 } u=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2\}.$$

下面的定理 1 就是本文的主要定理．

定理 1　设 $u\in S$，则下面三个条件是等价的：

(i) 存在一个定义在 ∂D 上的可测函数 φ，使得对任意 $x\in D$，

$$u(x)=E_x(e(\tau_D)\varphi(x(\tau_D)));$$

(ii) $u\in S_3$;

(iii) 对任意 $x\in D$，$\lim\limits_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))$ 存在 $(\text{a.s.}P_x)$ 且

$$u(x)=E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))).$$

欲证此定理，需要先证明几个引理．

引理 1　定义在 D 内的函数 u 是方程 (2) 在 D 内的一个解的充要条件是 u 满足下面两个条件：

本文 1985 年 3 月 11 日收到．

(i) u 在 D 内局部有界;

(ii) 对 D 的任一相对紧开子集 D_0, 都有

$$u(x)=E_x(e(\tau_{D_0})u(x(\tau_{D_0}))),\ x\in D_0.$$

此引理是[2]中定理 2.1 和定理 2.3 的直接推论,这里就不再给出证明了.

引理 2 设 $u_n\in S$, 且 $u_n\uparrow u$. 则或者 $u\in S$ 或者 u 在 D 内恒为无穷.

证明 设 u 在 D 在内不恒为无穷. 不失一般性, 可以假设 u_n 和 u 均为非负的. 由引理 1 和[2]中的定理 1.1 易知 u 是局部有界的. 对 D 的任意相对紧开子集 D_0, 由单调收敛定理和引理 1 知,对任意 $x\in D_0$,

$$E_x(e(\tau_{D_0})u(x(\tau_{D_0})))=\lim_n E_x(e(\tau_{D_0})u_n(x(\tau_{D_0})))=\lim_n u_n(x)=u(x).$$

由引理 1, $u\in S$.

引理 3 设 $u\in S$, 且 u 在 D 内有下界. 则对任意 $x\in D$, $\lim\limits_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))$存在(a.s.$P_x$)且

$$u(x)\geqslant E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))).$$

证明 由于 u 在 D 内有下界,所以存在 $M\geqslant 0$, 使得 $u\geqslant -M$. 由[2]知 $E_x(e(\tau_D)\cdot M)$是方程(2)在 D 内的一个解,因此 $f(x)=u(x)+E_x(e(\tau_D)\cdot M)$也是方程(2)在 D 内的一个解. 由于 $E_x(e(\tau_D))$有正下界, 只要 M 充分大就可设 f 是非负的. 由于 q 是有界的, 所以存在 $\alpha>0$ 使 $|q|\leqslant\alpha$. 由引理 1 和 f 的非负性可得,对 D 的任意紧子集 K.

$$f(x)\geqslant E_x(e^{-\alpha\tau_k}f(x(\tau_k))).$$

显然 $\lim\limits_{t\downarrow 0}E_x(e^{-\alpha t}f(x(t)),t<\tau_D)=f(x)$,因此由[1]中的推论 2.5.3 知 f 关于 Q_D^t(这里 Q_D^t 是灭于 D 外的 Brown 运动的转移半群)是 α 过份的. 由[1]中的定理 2.12 知 $\lim\limits_{t\uparrow\tau_D}f(x(t))$存在(a. s. P_x),从而利用[2]中的定理 1.3 可得,对任意 $x\in D$,

$$\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))=\lim_{t\uparrow\tau_D}f(x(t))-M$$

存在 (a. s. P_x).

设 D_n 是 D 的相对紧开子集且 $D_n\uparrow D$. 由引理 1 和 Fatou 引理,对任意 $x\in D$,

$$f(x)\geqslant E_x(\lim_n e(\tau_{D_n})f(x(\tau_{D_n})))=E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}f(x(t)))$$

从而

$$u(x)\geqslant E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))).$$

定理 1 的证明: (iii)⇒(i)是显然的.

(i)⇒(ii). 对 $x\in\partial D$ 及 $n\geqslant 1$, 令

$$\varphi_n^+(x)=\varphi^+(x)\wedge n,\quad \varphi_n^-(x)=\varphi^-(x)\wedge n,$$

则 $\varphi_n^+(x)$, $\varphi_n^-(x)$ 都是 ∂D 上的非负有界函数, 而且当 $n\to\infty$ 时 $\varphi_n^+(x)\uparrow\varphi^+(x)$, $\varphi_n^-(x)\uparrow\varphi^-(x)$. 因此由单调收敛定理,对任意 $x\in D$,

$$E_x(e(\tau_D)\varphi_n^+(x(\tau_D)))\uparrow E_x(e(\tau_D)\varphi^+(x(\tau_D))),$$
$$E_x(e(\tau_D)\varphi_n^-(x)\tau_D)))\uparrow E_x(e(\tau_D)\varphi^-(x(\tau_D))).$$

因 φ_n^+, φ_n^- 有界, 由[2]中定理 1.2, $E_x(e(\tau_D)\varphi_n^+(x(\tau_D)))\in S_1$, $E_x(e(\tau_D)\varphi_n^-(x(\tau_D)))\in S_1$. 因此

$$E_x(e(\tau_D)\varphi^+(x(\tau_D)))\in S_2,$$
$$E_x(e(\tau_D)\varphi^-(x(\tau_D)))\in S_2,$$

于是 $E_x(e(\tau_D)\varphi(x(\tau_D)))=E_x(e(\tau_D)\varphi^+(x(\tau_D)))-E_x(e(\tau_D)\varphi^-(x(\tau_D)))\in S_3.$

(ii)⇒(iii). 当 $u\in S_1$ 时，由引理 3, 对任意 $x\in D$, 极限 $\lim\limits_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))$ 存在(a.s. P_x)且

$$u(x)\geqslant E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))).$$

又因这时还有 $-u\in S_1$, 所以同理有

$$-u(x)\geqslant -E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))).$$

所以当 $u\in S_1$ 时条件(iii)成立.

设 $u\in S_2$, 则存在 $u_n\in S_1$, 使得 $u_n\uparrow u$, 从而 u 在 D 内有下界. 由引理 3, 对任意 $x\in D$, $\lim\limits_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))$ 存在(a.s. P_x)且

$$u(x)\geqslant E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))).$$

另一方面，因 $u_n\in S_1$, 所以对任意 $x\in D$,

$$u_n(x)=E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u_n(x(t))),$$

令 $n\to\infty$, 得

$$u(x)=\lim_n E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u_n(x(t)))\leqslant E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))).$$

因此当 $u\in S_2$ 时条件(iii)也成立.

由 S_3 的定义立即可证; 当 $u\in S_3$ 时，条件(iii)也成立.

利用定理 1 我们可以证明:

定理 2 设 $u\in S$. 若存在 $u_1\in S_3$, 使得对任意 $x\in D$,

$$u_1(x)\leqslant u(x),$$

则对任意 $x\in D$, $\lim\limits_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))$ 存在(a.s. P_x)且

$$u(x)\geqslant E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))).$$

证明 令 $f=u-u_1$, 则 f 是方程(2)在 D 内的一个非负解. 由引理 3, 对任意 $x\in D$, $\lim\limits_{t\uparrow\tau_D}f(x(t))$ 存在(a.s. P_x)且

$$f(x)\geqslant E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}f(x(t))).$$

由定理 1, 对任意 $x\in D$, $\lim\limits_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))=\lim\limits_{t\uparrow\tau_D}f(x(t))+\lim\limits_{t\uparrow\tau_D}u_1(x(t))$ 存在(a.s. P_x)且

$$\begin{aligned}u(x)=f(x)+u_1(x)&\geqslant E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}f(x(t)))+E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u_1(x(t)))\\&=E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))).\end{aligned}$$

定理 3 设 $u\in S$. 若存在 u_1, $u_2\in S_3$, 使得对任意 $x\in D$,

$$u_1(x)\leqslant u(x)\leqslant u_2(x),$$

则 $u\in S_3$.

证明 由 $u_1\leqslant u$ 及定理 2 得，对任意 $x\in D$, $\lim\limits_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))$ 存在(a.s. P_x)且

$$u(x)\geqslant E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))).$$

另一方面，由 $-u_2\leqslant -u$ 及定理 2 得，对任意 $x\in D$,

$$-u(x)\geqslant -E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))).$$

由定理1可知 $u\in S_3$.

定理4 设 $u_n\in S_3$ 且 $u_n\uparrow u$, 则或者 $u\in S_3$ 或者 u 在 D 内恒为无穷.

证明 设 $u\not\equiv\infty$, 则由引理2, $u\in S$. 因此 $u-u_n\in S$ 且 $u-u_n\downarrow 0$. 对每个 $n\geqslant 1$, 因 $u-u_n\geqslant 0$, 由定理2和定理1, 对任意 $x\in D$,

$$u(x)-u_n(x)\geqslant E_x(e(\tau_D)[\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))-\lim_{t\uparrow\tau_D}u_n(x(t))])$$
$$=E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t)))-u_n(x),$$

于是可得, 对任意 $x\in D$,

$$u(x)\geqslant E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))).$$

另一方面, 对任意 $n\geqslant 1$ 和 $x\in D$,

$$u_n(x)=E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u_n(x(t)))\leqslant E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))),$$

令 $n\to\infty$ 得
$$u(x)\leqslant E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))).$$

因此, 对任意 $x\in D$,

$$u(x)=E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))).$$

由定理1, $u\in S_3$.

下面我们来讨论方程(2)的随机 Dirichlet 问题解的存在性和唯一性.

设 φ 是定义在 ∂D 上的一个可测函数. 所谓方程(2)关于 φ 的随机 Dirichlet 问题, 就是寻求 $u\in S$, 使对任意 $x\in D$, 都有

$$\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))=\varphi(x(\tau_D)),\quad \text{a. s. } P_x.$$

定理5 设 φ 是定义在 ∂D 上的一个可测函数, 且对任意 $x\in D$, $E_x(e(\tau_D)|\varphi(x(\tau_D))|)<\infty$. 那么 $E_x(e(\tau_D)\varphi(x(\tau_D)))$ 是方程(2)关于 φ 的随机 Dirichlet 问题在 S_3 内的唯一解.

证明 由[2]中定理2.1, $u(x)\triangleq E_x(e(\tau_D)\varphi(x(\tau_D)))\in S$. 再由定理1知 $u\in S_3$. 下面我们来证明, 对任意 $x\in D$,

$$\lim_{t\uparrow\tau_D}u(x(t))=\varphi(x(\tau_D)),\quad \text{a.s. } P_x. \tag{3}$$

对 $x\in D$, 令
$$u_1(x)=E_x(e(\tau_D)\varphi^+(x(\tau_D))),$$
$$u_2(x)=E_x(e(\tau_D)\varphi^-(x(\tau_D))).$$

欲证(3), 只需证明: 对任意 $x\in D$,

$$\lim_{t\uparrow\tau_D}u_1(x(t))=\varphi^+(x(\tau_D)),\quad \text{a.s. } P_x, \tag{4}$$

$$\lim_{t\uparrow\tau_D}u_2(x(t))=\varphi^-(x(\tau_D)),\quad \text{a.s. } P_x. \tag{5}$$

我们先证(4). 对 $n\geqslant 1$ 及 $x\in\partial D$, 令

$$\varphi_n^+(x)=\varphi^+(x)\wedge n.$$

则由[4]中的命题3.1知, 对任意的 $n\geqslant 1$ 及 $x\in D$,

$$\lim_{t\uparrow\tau_D}E_{x(t)}(e(\tau_D)\varphi_n^+(x(\tau_D)))=\varphi_n^+(x(\tau_D)),\quad \text{a.s. } P_x.$$

因此

$$\lim_{t\uparrow\tau_D}u_1(x(t))=\lim_{t\uparrow\tau_D}\lim_{n}E_{x(t)}(e(\tau_D)\varphi_n^+(x(\tau_D)))\geqslant\lim_{t\uparrow\tau_D}E_{x(t)}(e(\tau_D)\varphi_n^+(x(\tau_D)))$$
$$=\varphi_n^+(x(\tau_D))\quad \text{a.s. } P_x,$$

令 $n\to\infty$ 得
$$\lim_{t\uparrow\tau_D} u_1(x(t))\geqslant\varphi^+(x(\tau_D)),\ \text{a.s. } P_x.$$
由定理 1 我们知道，对任意 $x\in D$,
$$u_1(x)=E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D} u_1(x(t))),$$
因此，
$$E_x(e(\tau_D)\lim_{t\uparrow\tau_D} u_1(x(t)))=E_x(e(\tau_D)\varphi^+(x(\tau_D))).$$
从而我们得到(4).

同理我们可以证明(5)也成立，所以(3)成立．这样我们就证明了 u 是方程(2)关于 φ 的随机 Dirichlet 问题在 S_3 内的一个解．解的唯一性是定理 1 的直接推论．

参 考 文 献

[1] Blumenthal, R. M., Getoor, R. K., *Markov Processes and Potential Theory*. Academic Press, New York, 1968.

[2] Chung, K. L., Rao, K. M., Feynman-Kac Functional and the Schrödinger Equation. *Seminar on Stochastic Processes*, Birkhäuser Boston, 1981.

[3] Chung, K. L., *Lectures from Markov Processes to Brownian Motion*. Springer-Verlag, New York, 1982.

[4] Falkner, N., Feynman-Kac Functionals and Positive Solutions of $\frac{1}{2}\Delta u+qu=0$. *Z. Wahrs. verw. Gebiete* **65** (1983), 19—33.

[5] 李志阐，随机 Dirichlet 问题的解的唯一性．数学年刊，**5** (**A**) (1984), 109—112.

[6] 李志阐，Dirichlet 问题的推广．数学物理学报，**4** (1984), 287—296.

[7] Poit, S. C., Stone, C. J., *Brownian Motion and Classical Potential Theory*. Academic Press, New York, 1978.

PROBABILISTIC REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF SCHRÖDINGER EQUATIONS

LI ZHICHAN SONG RENMING

(*Hebei University*)

In this paper, two equivalent conditions for a solution u in a domain D of the Schrödinger equation $(\Delta+2q)u=0$ to be expressed in the form
$$u(x)=E_x\Big(\exp\Big(\int_0^{\tau_D} q(x(s))\,dS\Big)\varphi(x(\tau_D))\Big),\quad x\in D$$
(where $x(t)$ is a Brownian motion, τ_D is the exit time of D, φ is a measurable function on ∂D) are given, and the existence and uniqueness of solution of the stochastic Dirichlet problem for the Schrödinger equation is proved.