多类型粒子模型的图表示*

祝 东 进
(安徽师范大学数学系, 安徽芜湖, 241000)

摘 要

本文利用图表示法构造出一类具有有限程的变相速率和不同扩散速率的多类型粒子模型, 刻划出了该粒子模型的演化规律.

关键词: 多类型粒子模型, 图表示, 演化.
学科分类号: O211.62.

§1. 引 言

无穷粒子系统是一类重要的马尔可夫过程, 它有着深刻的物理背景. 基本问题之一是无穷粒子系统的存在性问题, 对无穷粒子系统存在性的研究有许多方法, 诸如半群方法, 鞅方法, 图表示法等 (参见 [1][5][6]). 图表示法的优点是直观, 并且能深刻揭示微观粒子模型的演化规律, 困难在于寻找合适的过程 (如 Poisson 过程, 均匀分布等) 来表述它. 对相空间非紧的模型 (如反应扩散过程) 的构造用图表示法似乎还无从下手, 故而用图表示法构造无穷粒子系统, 进而刻划其演化规律还有待进一步研究. 本文研究的粒子模型的相空间为 $\{0,1,2\}^{Z^d}$, 其变化速率如下:

(i) 变相速率: $c_i(x,\xi)=h_i(\xi(x),\xi(x+y_1),\cdots,\xi(x+y_N))$, 这里 N 为一个固定的自然数, $y_1,\cdots,y_N\in Z^d$ 已取定, h_i 为有界函数, $x\in Z^d$, $i=0,1,2$;

(ii) 扩散速率: $\forall x,y\in Z^d$, $\|x-y\|=1$, 若 x 位置上的值与 y 位置上的值的和等于 i, 则 x 位置上的值与 y 位置上的值以速率 a_i 交换, $i=1,2,3$, 换句话说, 0与1, 0与2, 1与2分别以速率 a_1,a_2,a_3 互换 (在紧邻位置上).

写成形式母元就是

$$\begin{aligned}Lf(\xi)=&\sum_{i=0}^{2}\sum_{x}c_i(x,\xi)[f(\xi^{x,i})-f(\xi)]\\&+\sum_{i=1}^{3}\sum_{x,y,\|x-y\|=1}a_i\mathbf{1}_{\{\xi(x)+\xi(y)=i\}}[f(\xi^{x,y})-f(\xi)]\\\triangleq&L_1f(\xi)+L_2f(\xi),\end{aligned}$$

这里

$$\xi^{x,i}(y)=\begin{cases}\xi(y), & y\neq x\\ i, & y=x\end{cases},\qquad \xi^{x,y}(z)=\begin{cases}\xi(z), & z\neq x,y\\ \xi(x), & z=y\\ \xi(y), & z=x\end{cases},$$

$\|x\|=\sum_{i=1}^{d}|x_i|$, $a_i\geq 0$, $i=1,2,3$.

下面利用图表示法构造出一个马氏过程, 并证明它的无穷小母元就是 L.

*国家自然科学基金资助项目 (基金号 19971025).
本文2000年7月3日收到, 2000年9月29日收到修改稿.

§2. 多类型粒子模型的图表示

记 $c^* = \sup\limits_{\xi,x}\sum\limits_i c_i(x,\xi) < +\infty$, $\lambda = (a_1+a_2+a_3)$, 设 $\{T_n^x\}_{n\geq 1}$ 是具有速率 c^* 的 Poisson 过程 (即 $T_0^x = 0$, $\{T_n^x - T_{n-1}^x\}_{n\geq 1}$ i.i.d, 其共同分布为参数等于 c^* 的指数分布), $x \in Z^d$, 又设 $\{U_n^x\}_{n\geq 1}$ 是独立同分布随机变量列, 且 $U_n^x \sim U(0,1)$, $x\in Z^d$, $n\geq 1$, 再设 $\{S_n^{x,y}\}_{n\geq 1}$ 是具有速率 λ 的 Poisson 过程, $x,y\in Z^d$, $\|x-y\|=1$, 最后设 $\{V_n^{x,y}\}_{n\geq 1}$ 是独立同分布随机变量列, 且

$$V_n^{x,y} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \dfrac{a_1}{a_1+a_2+a_3} & \dfrac{a_2}{a_1+a_2+a_3} & \dfrac{a_3}{a_1+a_2+a_3} \end{pmatrix}, \qquad x,y\in Z^d,\ \|x-y\|=1,\ n\geq 1.$$

并设这些过程相互独立. 令 ${}^n r_i^x = c_i(x,\xi_{T_n^x-})$, ${}^n p_{-1}^x = 0$, ${}^n p_i^x = \sum\limits_{j\leq i} {}^n r_j^x / c^*$, $i=0,1,2$, 过程的演化规则如下:

(1) 在时刻 T_n^x, 若 $U_n^x \in ({}^n p_{i-1}^x, {}^n p_i^x)$, 且 $\xi_{T_n^x-}(x)\neq i$, 则 $\xi_{T_n^x}(x) = i$, $i=0,1,2$, 其它情形保持不变,

(2) 在时刻 $S_n^{x,y}$, 若 $V_n^{x,y} = i$, 且 $\xi_{S_n^{x,y}-}(x)+\xi_{S_n^{x,y}-}(y) = i$, $\xi_{S_n^{x,y}-}(x)\neq\xi_{S_n^{x,y}-}(y)$, 则 $\xi_{S_n^{x,y}}(x) = \xi_{S_n^{x,y}-}(y)$, $\xi_{S_n^{x,y}}(y) = \xi_{S_n^{x,y}-}(x)$, 其它情形保持不变.

因为有无穷多个 Poisson 过程, 从而第一到达时刻为零. 我们必须证明由我们的构造方法可以计算出随着时间的演化过程变化的结果. 设 t_0 为一个充分小的正数 (t_0 的选取参看下面的引理). 若存在 x, 使得 $T_1^x < t_0$, 则在 x 与 y 之间画一条无向弧线, $y\in x+\mathcal{N}$; 若存在 x,y, $\|x-y\|=1$, $S_1^{x,y}<t_0$, 则在 x 与 y 之间画一条无向弧线. $T_1^x < t_0$ 意味着 x 位置上的值在 t_0 之前可能发生变化, 而 $S_1^{x,y}<t_0$ 意味着 x 位置上的值与 y 位置上的值在 t_0 之前可能发生交换. 我们将证明如下重要引理.

引理 若 t_0 充分小, 则以概率 1, 随机图中的每个连接部分的个数有限.

假若引理已证明, 则随机图中的每个连接部分存在第一个跳跃点, 按照我们给出的规则, 不同的连接部分在 t_0 之前无任何影响, 从而我们可构造过程到时刻 t_0. 注意到 t_0 与初始态无关, 重复上述步骤我们可构造过程到任何时刻.

下面我们分三步来完成引理的证明.

设 $\mathcal{N}^* = \{y_1,\cdots,y_N,-y_1,\cdots,-y_N\}$, 我们称 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 是一条长为 n 的路径, 若 $x_m - x_{m-1}\in\mathcal{N}^*$, $1\leq m\leq n$; 称这条路径是不缠绕的, 若 $x_i\neq x_j$, $0\leq i<j\leq n$. 又记 $R = \max\limits_{1\leq i\leq N}\|y_i\|_2$, 这里 $\|x\|_2 = [(x^{(1)})^2+\cdots+(x^{(d)})^2]^{\frac{1}{2}}$.

(1) 若 0 连接 z, $\|z\|_2 > M$, 则存在一条从 0 出发长度超过 $\dfrac{M}{R}$ 的不缠绕的路径.

事实上, 0 连接 z, 从而从 0 到 z 有一条路径, 去掉这条路径中的圈子 (缠绕部分), 就得到一条不缠绕的路径. 注意到 R 的定义, 我们知每一步的步长 $\leq R$, 又 $\|z\|_2 > M$, 故这条不缠绕的路径至少有 $\dfrac{M}{R}$ 步.

(2) 若 x,y,z,w 不同, 则"(x,y) 之间有弧线"与"(z,w) 之间有弧线"相互独立.

事实上, x 与 y 之间是否出现弧线由 T_n^x 或 T_n^y 或 $S_n^{x,y}$ 来决定, 而 z 与 w 之间是否出现弧线是由 T_n^z 或 T_n^w 或 $S_n^{z,w}$ 来决定的, 但这些 Poisson 过程是相互独立的, 从而 (2) 成立.

(3) 设 $A = \{$随机图中在 t_0 之前出现从 x 出发的长为 $2n-1$ 的不缠绕的路径$\}$, 则

$$\mathsf{P}(A) \leq [K^2(1-e^{-(2c^*+\lambda)t_0})]^n.$$

事实上, 记 $K = 2(N+d)$, 从路径的构造知, 在每一个位置路径的方向至多有 K 种可能性选择, 故从 x 出发的长为 $2n-1$ 的不缠绕的路径的条数小于等于 K^{2n-1}. 另一方面, 由 (2) 知任一条长为 $2n-1$ 的不缠绕的路径的边 $(x_0,x_1),(x_2,x_3),\cdots,(x_{2n-2},x_{2n-1})$ 之间是相互独立的, (x_i,x_{i+1}) 之间在 t_0 之前无弧线的概率分以下三种情形计算:

(i) $\|x_i - x_{i+1}\|\neq 1$, $x_i - x_{i+1}\in\mathcal{N}^*$, 此时

$$\mathsf{P}((x_i,x_{i+1})\text{ 之间在 } t_0 \text{ 之前无弧线}) = \mathsf{P}(T_1^{x_i}\geq t_0, T_1^{x_{i+1}}\geq t_0) = e^{-2c^*t_0};$$

(ii) $\|x_i - x_{i+1}\| = 1$, $x_i - x_{i+1} \notin \mathcal{N}^*$, 此时

$$\mathsf{P}((x_i, x_{i+1})\text{之间在}\, t_0 \,\text{之前无弧线}) = \mathsf{P}(S_1^{x_i, x_{i+1}} \geq t_0) = e^{-\lambda t_0};$$

(iii) $\|x_i - x_{i+1}\| = 1$, $x_i - x_{i+1} \in \mathcal{N}^*$, 此时

$$\mathsf{P}((x_i, x_{i+1})\text{之间在}\, t_0 \,\text{之前无弧线}) = \mathsf{P}(T_1^{x_i} \geq t_0, T_1^{x_{i+1}} \geq t_0, S_1^{x_i, x_{i+1}} \geq t_0) = e^{-(2c^*+\lambda)t_0}.$$

综合之

$$\mathsf{P}((x_i, x_{i+1})\text{之间在}\, t_0 \,\text{之前有弧线}) \leq 1 - e^{-(2c^*+\lambda)t_0},$$

故

$$\mathsf{P}(A) \leq K^{2n-1}(1 - e^{-(2c^*+\lambda)t_0})^n \leq [K^2(1 - e^{-(2c^*+\lambda)t_0})]^n.$$

因为K, c^*, λ都是固定的正数, 所以我们可选t_0充分小使得$K^2(1 - e^{-(2c^*+\lambda)t_0}) \leq \frac{1}{2}$.
故

$$\mathsf{P}(\text{从}\, x \,\text{出发在}\, t_0 \,\text{之前出现长度为}\, 2n-1 \,\text{不缠绕的路径}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

从而引理得证. □

推论1 若初态ξ_0平移不变, 则ξ_t亦然.

事实上, 只要注意到构造过程所用的Poisson过程是平移不变的, 推论1显然成立. □

从过程的构造中我们知ξ_t是马氏过程, 由此可在有界可测函数集上定义算子族$\{T_t\}_{t\geq 0}$

$$T_t f(\xi) = \mathsf{E}^\xi f(\xi_t),$$

这里E^ξ表示从ξ出发的过程的期望, 由马氏性即知$\{T_t\}_{t\geq 0}$为半群算子. 事实上, 我们还可得到更强的结论.

推论2 $\{T_t\}_{t\geq 0}$是Feller半群, 即若f为连续函数, 则$T_t f$亦然.

证明: 由引理及过程的构造知, 若$\xi_0^n \to \xi_0$(等价于对任一固定的x, $\xi_0^n(x) \to \xi_0(x)$), 则$\xi_t^n \to \xi_t$ a.e., 因f是连续函数, 故$f(\xi_t^n) \to f(\xi_t)$ a.e., 又$\{0,1,2\}^{Z^d}$紧(在弱拓扑意义之下), 所以连续函数有界. 由控制收敛定理知$\mathsf{E}f(\xi_t^n) \to \mathsf{E}f(\xi_t)$, 亦即$T_t f$为连续函数. □

下面介绍本文的主要结果并对它进行证明.

定理 对任意柱函数f, 有$\frac{d}{dt}S(t)f(\xi)|_{t=0} = Lf(\xi)$.

证明: 因为f为柱函数, 故存在K, 使得$f(\xi)$仅仅依赖ξ在$[-K,K]^d$上的取值, 记$R = \max\{|y_i|, 1 \leq i \leq N\}$, $\triangle_1 = [-K-R, K+R]^d$, $\triangle_2 = [-K-R-1, K+R+1]^d$, $C = \sup|f|$, $l = |\triangle_1| - 1$, $m = \#\{(x,y): x, y \in \triangle_2, \|x-y\| = 1\}$, $U(x) = \{y \in Z^d : \|y-x\| = 1\}$, 注意到$f(\xi)$仅仅依赖于$\xi$在$[-K,K]^d$上的取值, 又$[-K,K]^d \subset \triangle_1$, 故$f(\xi)$也仅依赖于$\xi$在$\triangle_1$上的取值, 如果在$\triangle_1$上$\xi_t = \xi$, 则$f(\xi_t) = f(\xi)$, 从而

$$\begin{aligned}
\frac{S(t)f(\xi) - f(\xi)}{t} &= \int \frac{f(\xi_t) - f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi = \int_{\{\text{在}\, \triangle_1 \,\text{上}\, \xi_t \neq \xi\}} \frac{f(\xi_t) - f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi \\
&= \int_{\{\xi_t \,\text{与}\, \xi \,\text{恰在}\, \triangle_1 \,\text{中的一个坐标上不相等}\}} \frac{f(\xi_t) - f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi \\
&\quad + \int_{\{\xi_t \,\text{与}\, \xi \,\text{至少在}\, \triangle_1 \,\text{中的二个坐标上不相等}\}} \frac{f(\xi_t) - f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi \\
&= \sum_{x \in \triangle_1} \int_{\{\xi_t(x) \neq \xi(x), \xi_t(y) = \xi(y), y \in \triangle_1 \setminus \{x\}\}} \frac{f(\xi_t) - f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi \\
&\quad + \int_{\{\exists x, y \in \triangle_1, x \neq y, \xi_t(x) \neq \xi(x), \xi_t(y) \neq \xi(y)\}} \frac{f(\xi_t) - f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi \\
&\triangleq \mathrm{I} + \mathrm{II},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \sum_{x\in\triangle_1}\sum_{i\neq\xi(x)}\int_{\{\xi_t(x)=i,\xi_t(y)=\xi(y),y\in\triangle_1\setminus\{x\}\}}\frac{f(\xi_t)-f(\xi)}{t}d\mathsf{P}^\xi \\
&= \sum_{x\in\triangle_1}\sum_{i\neq\xi(x)}[f(\xi^{x,i})-f(\xi)]\mathsf{P}^\xi(\xi_t(x)=i,\xi_t(y)=\xi(y),y\in\triangle_1\setminus\{x\})/t \\
&= \sum_{x\in\triangle_1}\sum_{i\neq\xi(x)}[f(\xi^{x,i})-f(\xi)]\mathsf{P}^\xi(T_1^x\le t,\xi_t(x)=i,\xi_t(y)=\xi(y),y\in\triangle_1\setminus\{x\})/t \\
&\quad+\sum_{x\in\triangle_1}\sum_{i\neq\xi(x)}[f(\xi^{x,i})-f(\xi)]\mathsf{P}^\xi(T_1^x> t,\xi_t(x)=i,\xi_t(y)=\xi(y),y\in\triangle_1\setminus\{x\})/t \\
&\triangleq \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.
\end{aligned}
$$

由过程的演化规则知, 当 $i\neq\xi(x)$ 时

$$\{T_1^x>t,\xi_t(x)=i\}\subset\{\exists u\in U(x),S_1^{x,u}\le t\},$$

从而

$$\{T_1^x>t,\xi_t(x)=i\}=\{T_1^x>t,\xi_t(x)=i,\exists u\in U(x),S_1^{x,u}\le t\},$$

进而

$$
\begin{aligned}
&\{T_1^x>t,\xi_t(x)=i,\xi_t(y)=\xi(y),y\in\triangle_1\setminus\{x\}\} \\
\subset&\{T_1^x>t,\xi_t(x)=i,\exists u\in U(x),S_1^{x,u}\le t,\xi_t(u)=\xi(u)\} \\
=&\{T_1^x>t,\xi_t(x)=i,\exists u\in U(x),S_1^{x,u}\le t,\xi_t(u)=\xi(u),T_1^u\le t\} \\
&\cup\{T_1^x>t,\xi_t(x)=i,\exists u\in U(x),S_1^{x,u}\le t,\xi_t(u)=\xi(u),T_1^u> t\} \\
\subset&\{\exists u\in U(x),S_1^{x,u}\le t,T_1^u\le t\} \\
&\cup\left(\{\exists u\in U(x),S_1^{x,u}\le t\}\cap\{\exists z\in U(u)\setminus\{x\},S_1^{u,z}\le t\}\right).
\end{aligned}
$$

由 Poisson 过程的独立性得

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}(T_1^x>t,\xi_t(x)=i,\xi_t(y)=\xi(y),y\in\triangle_1\setminus\{x\}) \\
\le&C_1(1-e^{-\lambda t})(1-e^{-c^*t})+C_2(1-e^{-\lambda t})^2,
\end{aligned}
$$

从而

$$0\le|\mathrm{I}_2|\le\frac{C_1(1-e^{-\lambda t})(1-e^{-c^*t})}{t}+\frac{C_2(1-e^{-\lambda t})^2}{t},$$

故

$$\lim_{t\downarrow0}\mathrm{I}_2=0.$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_1=&\sum_{x\in\triangle_1}\sum_{i\neq\xi(x)}[f(\xi^{x,i})-f(\xi)]\mathsf{P}(T_1^x\le t,\xi_t(x)=i,T_1^y>t,y\in\triangle_1\setminus\{x\}, \\
&\forall z,w\in\triangle_2,\|z-w\|=1,S_1^{z,w}>t,T_2^x>t)/t \\
&+\sum_{x\in\triangle_1}\sum_{i\neq\xi(x)}[f(\xi^{x,i})-f(\xi)]\mathsf{P}(T_1^x\le t,\xi_t(x)=i,\xi_t(y)=\xi(y),y\in\triangle_1\setminus\{x\}, \\
&\text{且}\ \exists y\in\triangle_1\setminus\{x\},T_1^y\le t\ \text{或}\ \exists z,w\in\triangle_2,\|z-w\|=1,S_1^{z,w}\le t\ \text{或}\ T_2^x\le t) \\
\triangleq&\mathrm{I}_{11}+\mathrm{I}_{12},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{I}_{12}|\le&\frac{2C}{t}\sum_{x\in\triangle_1}\sum_{i\neq\xi(x)}\mathsf{P}(\{T_1^x\le t,\exists y\in\triangle_1\setminus\{x\},T_1^y\le t\}\cup\{T_1^x\le t,\exists z,w\in\triangle_2, \\
&\|z-w\|=1,S_1^{z,w}\le t\}\cup\{T_2^x\le t\}) \\
\le&\frac{1}{t}[C_1(1-e^{-\lambda t})^2+C_2(1-e^{-\lambda t})(1-e^{-c^*t})+C_3(1-e^{-c^*t}-c^*te^{-c^*t})],
\end{aligned}
$$

故

$$\lim_{t\downarrow 0} \mathrm{I}_{12}=0.$$

$$\begin{aligned}
t\,\mathrm{I}_{11}=&\sum_{x\in\triangle_1}\sum_{i\neq\xi(x)}[f(\xi^{x,i})-f(\xi)]\mathsf{P}\big(T_1^x\le t,T_2^x>t,T_1^y>t,y\in\triangle_1\setminus\{x\},\\
&\forall z,w\in\triangle_2,\|z-w\|=1,S_1^{z,w}>t,U_1^x\in({}^1p_{i-1}^x\,{}^1p_i^x)\big)\\
=&\sum_{x\in\triangle_1}\sum_{i\neq\xi(x)}[f(\xi^{x,i})-f(\xi)]\mathsf{P}\Big(T_1^x\le t,T_2^x>t,T_1^y>t,y\in\triangle_1\setminus\{x\},\forall z,w\in\triangle_2,\\
&\|z-w\|=1,S_1^{z,w}>t,U_1^x\in\Big(\frac{\sum\limits_{j\le i-1}c_j(x,\xi_{T_1^x-})}{c^*},\frac{\sum\limits_{j\le i}c_j(x,\xi_{T_1^x-})}{c^*}\Big)\Big)\\
=&\sum_{x\in\triangle_1}\sum_{i\neq\xi(x)}[f(\xi^{x,i})-f(\xi)]\mathsf{P}\Big(T_1^x\le t,T_2^x>t,T_1^y>t,y\in\triangle_1\setminus\{x\},\\
&\forall z,w\in\triangle_2,\|z-w\|=1,S_1^{z,w}>t,U_1^x\in\Big(\frac{\sum\limits_{j\le i-1}c_i(x,\xi)}{c^*},\frac{\sum\limits_{j\le i}c_i(x,\xi)}{c^*}\Big)\Big)\\
=&\sum_{x\in\triangle_1}\sum_{i\neq\xi(x)}[f(\xi^{x,i})-f(\xi)]c_i(x,\xi)(c^*)^{-1}\mathsf{P}(T_1^x\le t,T_2^x>t)\prod_{y\in\triangle_1\setminus\{x\}}\mathsf{P}(T_1^y>t)\\
&\times\prod_{\substack{z,w\in\triangle_2\\ \|z-w\|=1}}\mathsf{P}(S_1^{z,w}>t)\\
=&\sum_{x\in\triangle_1}\sum_{i\neq\xi(x)}[f(\xi^{x,i})-f(\xi)]c_i(x,\xi)(c^*)^{-1}c^*te^{-c^*t}(e^{-c^*t})^l(e^{-\lambda t})^m\\
=&\sum_{x\in\triangle_1}\sum_{i\neq\xi(x)}c_i(x,\xi)[f(\xi^{x,i})-f(\xi)]t(e^{-c^*t})^{l+1}(e^{-\lambda t})^m,
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow 0}\mathrm{I}=\lim_{t\downarrow 0}\mathrm{I}_{11}&=\sum_{x\in\triangle_1}\sum_{i\neq\xi(x)}c_i(x,\xi)[f(\xi^{x,i})-f(\xi)]\\
&=\sum_{i=0}^{2}\sum_x c_i(x,\xi)[f(\xi^{x,i})-f(\xi)]\triangleq L_1f(\xi).
\end{aligned}$$

由于

$\{\xi_t$ 与 ξ 至少在 $\triangle_1$ 中的二个坐标上不相等$\}$

$=\{\xi_t$ 与 ξ 恰在 $\triangle_1$ 中的二个坐标上不相等$\}$

$\cup\{\xi_t$ 与 ξ 至少在 $\triangle_1$ 中的三个坐标上不相等$\}$

$=\{\xi_t$ 与 ξ 恰在 $\triangle_1$ 中的二个紧邻坐标上不相等$\}$

$\cup\{\xi_t$ 与 ξ 恰在 $\triangle_1$ 中的二个不紧邻坐标上不相等$\}$

$\cup\{\xi_t$ 与 ξ 至少在 $\triangle_1$ 中的三个坐标上不相等$\}$

$=\{\exists x,y\in\triangle_1,\|x-y\|=1,\xi_t(x)\neq\xi(x),\xi_t(y)\neq\xi(y),\xi_t(z)=\xi(z),z\in\triangle_1\setminus\{x,y\}\}$

$\cup\{\exists x,y\in\triangle_1,\|x-y\|>1,\xi_t(x)\neq\xi(x),\xi_t(y)\neq\xi(y)\}$,

故

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}=&\sum_{\substack{x,y\in\triangle_1\\ \|x-y\|=1}}\int_{\{\xi_t(x)\neq\xi(x),\xi_t(y)\neq\xi(y),\xi_t(z)=\xi(z),z\in\triangle_1\setminus\{x,y\}\}}\frac{f(\xi_t)-f(\xi)}{t}d\mathsf{P}^{\xi}\\
&+\sum_{\substack{x\neq y\in\triangle_1\\ \|x-y\|\neq 1}}\int_{\{\xi_t(x)\neq\xi(x),\xi_t(y)\neq\xi(y)\}}\frac{f(\xi_t)-f(\xi)}{t}d\mathsf{P}^{\xi}\\
\triangleq&\,\mathrm{II}_1+\mathrm{II}_2,
\end{aligned}$$

$$|\mathrm{II}_2| \le \frac{2C}{t} \sum_{\substack{x\neq y\in\Delta_1\\ \|x-y\|\neq 1}} \mathsf{P}(\xi_t(x)\neq\xi(x), \xi_t(y)\neq\xi(y))$$

$$\le \frac{2C}{t} \sum_{\substack{x\neq y\in\Delta_1\\ \|x-y\|\neq 1}} \mathsf{P}\big((\{T_1^x \le t\} \cup \{\exists z\in U(x)\cap\Delta_2, S_1^{x,z}\le t\})$$

$$\cap (\{T_1^y \le t\} \cup \{\exists z\in U(y)\cap\Delta_2, S_1^{y,z}\le t\})\big)$$

$$\le \frac{C_1(1-e^{-c^*t})^2 + C_2(1-e^{-c*t})(1-e^{-\lambda t}) + C_3(1-e^{-\lambda t})^2}{t},$$

所以

$$\lim_{t\downarrow 0} \mathrm{II}_2 = 0.$$

$$\mathrm{II}_1 = \sum_{\substack{x,y\in\Delta_1\\ \|x-y\|=1}} \int_{\{\xi_t(x)\neq\xi(x),\xi_t(y)\neq\xi(y),\forall z\in\Delta_1\setminus\{x,y\},T_1^z>t;\forall p,q\in\Delta_2,\|p-q\|=1,(p,q)\notin\{(x,y),(y,x)\}, S_1^{p,q}>t\}} \frac{f(\xi_t)-f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi$$

$$+ \sum_{\substack{x,y\in\Delta_1\\ \|x-y\|=1}} \int_{\{\xi_t(x)\neq\xi(x),\xi_t(y)\neq\xi(y),\xi_t(z)=\xi(z),z\in\Delta_1\setminus\{x,y\}\}\cap(\{\exists z\in\Delta_1\setminus\{x,y\},T_1^z\le t\} \cup\{\exists p,q\in\Delta_2,\|p-q\|=1,(p,q)\notin\{(x,y),(y,x)\},S_1^{p,q}\le t\})} \frac{f(\xi_t)-f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi$$

$$\triangleq \mathrm{II}_{11} + \mathrm{II}_{12},$$

$$|\mathrm{II}_{12}| \le \frac{2C}{t} \sum_{\substack{x,y\in\Delta_1\\ \|x-y\|=1}} \Big[\mathsf{P}\big(\{S_1^{x,y}\le t \text{ 或 } T_1^x \le t \text{ 或 } T_1^y\le t\} \cap (\{\exists z\in\Delta_1\setminus\{x,y\}, T_1^z\le t\}$$

$$\cup \{\exists p,q\in\Delta_2, \|p-q\|=1, (p,q)\notin\{(x,y),(y,x)\}, S_1^{p,q}\le t\})\big)$$

$$+ \mathsf{P}\Big(\bigcup_{\substack{z_1\neq y\\ \|z_1-x\|=1}} \bigcup_{\substack{z_2\neq x\\ \|z_2-y\|=1}} \{S_1^{x,z_1}\le t, S_1^{y,z_2}\le t\}\Big)\Big]$$

$$\le \frac{C_1(1-e^{-c^*t})^2 + C_2(1-e^{-c^*t})(1-e^{-\lambda t}) + C_3(1-e^{-\lambda t})^2}{t},$$

所以

$$\lim_{t\downarrow 0} \mathrm{II}_{12} = 0.$$

$$\mathrm{II}_{11} = \sum_{\substack{x,y\in\Delta_1\\ \|x-y\|=1}} \int_{\{\xi_t(x)\neq\xi(x),\xi_t(y)\neq\xi(y);T_1^z>t,z\in\Delta_1;p,q\in\Delta_2,\|p-q\|=1,(p,q)\notin\{(x,y),(y,x)\}, S_1^{p,q}>t\}} \frac{f(\xi_t)-f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi$$

$$+ \sum_{\substack{x,y\in\Delta_1\\ \|x-y\|=1}} \int_{\{\xi_t(x)\neq\xi(x),\xi_t(y)\neq\xi(y);T_1^z>t,z\in\Delta_1\setminus\{x,y\};p,q\in\Delta_2,\|p-q\|=1,(p,q)\notin\{(x,y),(y,x)\}, S_1^{p,q}>t\}\cap\{T_1^x\le t \text{ 或 } T_1^y\le t\}} \frac{f(\xi_t)-f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi$$

$$\triangleq \mathrm{II}_{111} + \mathrm{II}_{112},$$

$$
\begin{aligned}
|\Pi_{112}| \leq & \frac{2C}{t} \sum_{\substack{x,y\in\triangle_1\\ \|x-y\|=1}} [\mathsf{P}(\{T_1^x \leq t \text{ 且存在 } z \in U(y), S_1^{y,z} \leq t \\
& + \mathsf{P}(T_1^y \leq t \text{ 且存在 } z \in U(x), S_1^{x,z} \leq t) + \mathsf{P}(T_1^x \leq t, T_1^y \leq t)] \\
\leq & \frac{C_1(1-e^{-c^*t})(1-e^{-\lambda t}) + C_2(1-e^{-c^*t})^2}{t},
\end{aligned}
$$

所以

$$
\lim_{t\downarrow 0} \Pi_{112} = 0.
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_{111} = & \sum_{\substack{x,y\in\triangle_1\\ \|x-y\|=1}} \int_{\{\xi_t(x)\neq\xi(x),\xi_t(y)\neq\xi(y);T_1^z>t,z\in\triangle_1;p,q\in\triangle_2,\|p-q\|=1,(p,q)\notin\{(x,y),(y,x)\},} \\
& {}_{S_1^{p,q}>t;S_2^{x,y}>t\}} \frac{f(\xi_t)-f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi \\
& + \sum_{\substack{x,y\in\triangle_1\\ \|x-y\|=1}} \int_{\{\xi_t(x)\neq\xi(x),\xi_t(y)\neq\xi(y);T_1^z>t,z\in\triangle_1;p,q\in\triangle_2,\|p-q\|=1,(p,q)\notin\{(x,y),(y,x)\},} \\
& {}_{S_1^{p,q}>t;S_2^{x,y}\leq t\}} \frac{f(\xi_t)-f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi \\
\triangleq & \Pi_{1111} + \Pi_{1112},
\end{aligned}
$$

$$
|\Pi_{1112}| \leq \frac{2C}{t} \sum_{\substack{x,y\in\triangle_1\\ \|x-y\|=1}} \mathsf{P}(S_2^{x,y} \leq t) = \frac{C(1-e^{-\lambda t}-\lambda t e^{-\lambda t})}{t},
$$

所以

$$
\lim_{t\downarrow 0} \Pi_{1112} = 0.
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_{1111} = & \sum_{\substack{x,y\in\triangle_1\\ \|x-y\|=1}} \int_{\{\xi_t(x)\neq\xi(x),\xi_t(y)\neq\xi(y);T_1^z>t,z\in\triangle_1;S_1^{p,q}>t,p,q\in\triangle_2,\|p-q\|=1,(p,q)\notin\{(x,y),(y,x)\},} \\
& {}_{S_2^{x,y}>t;S_1^{x,y}\leq t\}} \frac{f(\xi_t)-f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi \\
= & \sum_{\substack{x,y\in\triangle_1\\ \|x-y\|=1}} \sum_{i=1}^{3} \int_{\{\xi_t(x)\neq\xi(x),\xi_t(y)\neq\xi(y);T_1^z>t,z\in\triangle_1;S_1^{p,q}>t,p,q\in\triangle_2,\|p-q\|=1,(p,q)\notin\{(x,y),(y,x)\},} \\
& {}_{S_2^{x,y}>t;S_1^{x,y}\leq t;V_1^{x,y}=i\}} \frac{f(\xi_t)-f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi \\
= & \sum_{\substack{x,y\in\triangle_1\\ \|x-y\|=1}} \sum_{i=1}^{3} \int_{\{\xi_t(x)=\xi(y),\xi_t(y)=\xi(x),\cdots\}} \mathbf{1}_{\{\xi(x)\neq\xi(y)\}} \mathbf{1}_{\{\xi(x)+\xi(y)=i\}} \frac{f(\xi_t)-f(\xi)}{t} d\mathsf{P}^\xi \\
= & \sum_{\substack{x,y\in\triangle_1\\ \|x-y\|=1}} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{1}_{\{\xi(x)+\xi(y)=i\}} [f(\xi^{x,y})-f(\xi)] \mathsf{P}(\xi_t(x)=\xi(y),\xi_t(y)=\xi(x),\cdots)/t \\
= & \sum_{\substack{x,y\in\triangle_1\\ \|x-y\|=1}} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{1}_{\{\xi(x)+\xi(y)=i\}} [f(\xi^{x,y})-f(\xi)] \frac{a_i}{a_1+a_2+a_3} (e^{-c^*t})^{l+1} (e^{-\lambda t})^{m-2} \\
& (e^{-\lambda t}+\lambda t e^{-\lambda t}) \lambda t e^{-\lambda t}/t \\
= & \sum_{\substack{x,y\in\triangle_1\\ \|x-y\|=1}} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{1}_{\{\xi(x)+\xi(y)=i\}} [f(\xi^{x,y})-f(\xi)] a_i (e^{-c^*t})^{l+1} (e^{-\lambda t})^m (1+\lambda t),
\end{aligned}
$$

所以

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow 0} \mathrm{II} &= \lim_{t\downarrow 0} \mathrm{II}_{1111} \\
&= \sum_{\substack{x,y\in\triangle_1 \\ \|x-y\|=1}} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{1}_{\{\xi(x)+\xi(y)=i\}}[f(\xi^{x,y})-f(\xi)]a_i \\
&= \sum_{x,y,\|x-y\|=1} \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{1}_{\{\xi(x)+\xi(y)=i\}}[f(\xi^{x,y})-f(\xi)] \\
&= L_2 f(\xi),
\end{aligned}$$

故

$$\frac{d}{dt} S(t)f(\xi)|_{t=0} = Lf(\xi).$$

从而定理得证. □

致谢 感谢导师严士健教授和陈木法教授的指导和帮助, 感谢审稿人有益的修改意见.

参 考 文 献

[1] Chen, M.F., *From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems*, World Scientific., Singapore, 1992.
[2] Cox, J.T., Greven, A., Ergodic theorems for infinite systems of locally interacting diffusion, *Ann. Probab.*, **2**(1994), 833–853.
[3] Durrett, R., The lectures on particle systems, 1993.
[4] Durrett, R., Neuhauser, C., Particle systems and reaction-diffusion equations, *Ann. Probab.*, **1**(1994), 289–333.
[5] Harris, T.E., Nearest neighbor Markov interaction process on multidimensional lattices, *Adv. in Math.*, **9**(1972), 66–89.
[6] Liggett, T.M., *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, New York ,1985.
[7] Spitzer, F., Infinite systems with locally interacting components, *Ann. Probab.*, **9**(1981), 349–364.
[8] 祝东进, 无穷粒子系统的宏观方程, 北京师范大学博士学位论文, 1996.

The Graphical Representation of a Multitype Model

ZHU DONGJIN
(*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu, 241000*)

In this paper, a multitype model with the finite range translation invariant filp rates and the different diffusion rates is constructed by the graphical representation. Furthermore, the evolution of the multitype model is portraied.