寿命分布类，可靠性，指数分布

应用概率统计 第八卷
第三期 1992 年 8 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics Vol. 8 No. 3 Aug. 1992

综合报告

13

312-323

寿 命 分 布 类 研 究

0213.2

程 侃
(中国科学院应用数学研究所，北京，100080)

何宗福
(西安空军工程学院，西安，710038)

摘 要

本文简要地叙述了一维寿命分布类引入的实际背景，基本性质，并着重介绍寿命分布与指数分布或几何分布的贴近性研究及寿命分布类的可靠度界等问题．许多结果是新近获得的．

§1. 引 言

60 年代中开始，在可靠性数学理论的研究中引入了具有某种共性的寿命分布类，例如失效率单调的类、新比旧要好的类等．同时，对这些类的共性进行了探讨．这些类的引进在不同程度上反映了老化或劣化现象，具有很强的直观背景

设非负随机变量 X 表示部件或系统的寿命，相应的分布函数为 $F(t)=P(X<t)$，$t>0$. 记 $\bar{F}=1-F$. 用 X_t 表示 $X\geqslant t$ 的条件下部件的剩余寿命，$F_t(\cdot)$ 表示其剩余寿命分布，显然，$\forall x\geqslant 0$

$$\bar{F}_t(x)=P(X-t\geqslant x|X\geqslant t)=\bar{F}(t+x)/\bar{F}(t),\qquad t\geqslant 0. \tag{1}$$

时刻 t 的平均剩余寿命为

$$\mu(t)=EX_t=\int_0^\infty \bar{F}_t(x)dx=\int_t^\infty \bar{F}(x)dx/\bar{F}(t). \tag{2}$$

直观上有多种表示劣化或磨损的说法．例如，随 t 增大，t 以后系统的剩余寿命减小或平均减小．数学上可表为 X_t 对 t 随机减小，或 EX_t 对 t 减小．若从“新比旧好”这个角度来描述老化现象，则 $\forall x, y\geqslant 0$ 有

$$P(X\geqslant x+y|X\geqslant x)\leqslant P(X\leqslant y).$$

而“新比旧平均要好”则可表为

$$\int_0^\infty P(X\geqslant x+y|X\geqslant x)dy\leqslant\int_0^\infty P(X\geqslant y)dy.$$

基于上述考虑，下面给出寿命分布类的定义．

定义 1 设非负随机变量 X 相应的分布函数为 $F(t)$

* 本文得到国家自然科学基金的资助．
本文 1990 年 12 月 24 日收到

1) 若对固定的 $x\geqslant 0$, $\bar{F}_t(x)\downarrow$ 对 $t\geqslant 0$, 则称 F（或 X）为失效率递增的，记作 F（或 X）$\in$ IFR.

2) 若 $-\frac{1}{t}\log \bar{F}(t)\uparrow$ 对 $t>0$, 则称 F 为失效率平均递增，记作 $F\in$ IFRA.

3) 若 $\bar{F}(x+y)\leqslant \bar{F}(x)\bar{F}(y)$, $\forall x, y\geqslant 0$, 则称 F 为新比旧好的分布，记作 $F\in$ NBU.

4) 设 $EX=\mu<\infty$. 若 $\frac{1}{\mu}\int_t^\infty \bar{F}(x)dx\leqslant \bar{F}(t)$, $\forall t\geqslant 0$, 则称 F 为新比旧平均要好的分布，记成 $F\in$ NBUE.

5) 设 $EX=\mu<\infty$. 若 $\mu(t)\downarrow$ 对 t, 则称 F 为平均剩余寿命递减的分布，记成 $F\in$ DMRL.

6) 设 $EX=\mu<\infty$. 若 $\forall k>0$,

$$\left\{\frac{1}{t}\int_0^t\left[\frac{1}{\mu(x)}\right]^k dx\right\}^{\frac{1}{k}}\geqslant \frac{1}{\mu}, \quad \forall t>0$$

则称 F 为 k 阶新比旧调和平均好的分布，记作 $F\in k$-HNBUE. 若满足

$$\int_0^t \log\frac{\mu}{\mu(x)}dx\geqslant 0, \quad \forall t\geqslant 0$$

则称 F 为 0 阶新比旧调和平均好的分布，记作 $F\in$ 0-HNBUE.

若上述单调关系反向，则分别得其对偶类 DFR, DFRA, NWU, NWUE, IMRL, k-HNWUE, 0-HNWUE.

注记

a. 若 F 有密度函数 f, 则 F 相应的失效率为 $\lambda(t)=f(t)/\bar{F}(t)$. 因而此时 $F\in$ IFR 等价于 $\lambda(t)\uparrow$ 对 $t\geqslant 0$, 以及 $F\in$ IFRA 等价于 $\frac{1}{t}\int_0^t\lambda(x)dx\uparrow$ 对 $t\geqslant 0$.

b. 1-HNBUE(1-HNWUE) 简记为 HNBUE(HNWUE), 称为新比旧调和平均好（差）的类.

c. 离散寿命分布类. 若把寿命相应的随机变量 X 限定于仅取正整数，可得离散寿命类的定义. 记 $\mathcal{N}=\{1, 2, \cdots\}$, $\mathcal{N}_0=\{0, 1, 2, \cdots\}$,

$$P(X=k)=f(k), \quad k\in\mathcal{N},$$

$$F(k)=P(X<k)=\sum_{i=0}^{k-1}f(i), \ k\in\mathcal{N} \text{（约定}F(0)=0\text{）}.$$

$$\bar{F}(k)=1-F(k)=P(X\geqslant k).$$

记 X 的数学期望为 μ, 则

$$\mu=\sum_{k=1}^\infty \bar{F}(k).$$

按定义必有 $1\leqslant\mu\leqslant\infty$. 我们不讨论平凡的情形. 以下总设 $1<\mu<\infty$. 记

$$\bar{G}(k)=\frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^\infty \bar{F}(n+k), k\in\mathcal{N}_0. \tag{3}$$

下面给出离散寿命类的定义.

定义 2 设 X 为如上定义的离散寿命分布，则称

1) X 属于离散失效率递增的类，若

$$\lambda(k)=f(k)/\bar{F}(k)\uparrow, \quad \forall k\in\mathcal{N}.$$

记成 X(或 F)$\in$(D)IFR.

2) $X\in$(D)IFRA, 若 $[\bar F(k)]^{\frac{1}{k}}\downarrow$ 对 $k\in\mathcal{N}$.

3) $X\in$(D)NBU, 若 $\bar F(m+n)\leqslant\bar F(m)\bar F(n)$, $\forall m, n\in\mathcal{N}$.

4) 设 $\mu=EX<\infty$, 称 $X\in$(D)NBUE, 若 $\forall k\in\mathcal{N}_0$,

$$\bar G(k)\leqslant\bar F(k)$$

$\bar G$ 由(3)给定.

5) 设 $\mu<\infty$, 称 $X\in$(D)DMRL, 若

$$m(k)=E(X-k\mid X\geqslant k)=\mu\bar G(k)/\bar F(k)\downarrow \text{对 } k\in\mathcal{N}.$$

6) 设 $\mu<\infty$, 称 $X\in$(D)HNBUE, 若 $\forall k\in\mathcal{N}_0$,

$$\bar G(k)\leqslant(1-1/\mu)^k.$$

上述单调性或不等号反向时即得相应的离散对偶寿命类.

由定义1不难得出如下的真包含关系

$$\begin{array}{l}\mathrm{IFR}\begin{array}{l}\nearrow \mathrm{IFRA}\to\mathrm{NBU}\searrow\\ \searrow \mathrm{DMRL}\nearrow\end{array}\mathrm{NBUE}\to 0\text{-}\mathrm{HNBUE}\to \underset{(0<k<1)}{k\text{-}\mathrm{HNBUE}}\to\mathrm{HNBUE}\\ \to\underset{(k>1)}{k\text{-}\mathrm{HNBUE}}\to\infty\text{-}\mathrm{HNBUE}.\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\mathrm{DFR}\begin{array}{l}\nearrow \mathrm{DFRA}\to\mathrm{NWU}\searrow\\ \searrow \mathrm{IMRL}\nearrow\end{array}\mathrm{NWUE}=\infty\text{-}\mathrm{HNWUE}\to \underset{(k>1)}{k\text{-}\mathrm{HNWUE}}\\ \to\mathrm{HNWUE}\to\underset{(0<k<1)}{k\text{-}\mathrm{HNWUE}}\to 0\text{-}\mathrm{HNWUE}.\end{array}$$

寿命分布类的文献可以从 Barlow and Proschan 的书([8], [9]), Bryson and Siddique ([19]), Klefsjö([35]), Basu and Ebrahimi ([10])中找到. 近期的可见 Deshpande 等([28]). 限于篇幅，本文不讨论多维寿命分布类. 基本同样的原因，我们只列出了基本的文献.

寿命类性质的研究大体上可以分为如下几个方面:

1.1 可靠性运算下的封闭性.

这里所谓的可靠性运算是指: 卷积、混合、及组成关联系统. 若记 $\mathscr{H}$ 为某一寿命类. 即讨论

a) 若 F, $G\in\mathscr{H}$, $H=F*G$. 问 $H\in\mathscr{H}$?

这里
$$H(t)=\int_{[0,t]}G(t-x)dF(x).$$

b) 若 $F_a\in\mathscr{H}$, $\forall a\in\Gamma$. $G(a)$是 Γ 上的分布. 问

$$F(t)=\int_\Gamma F_a(t)dG(a)\in\mathscr{H}?$$

c) 若 $F_i\in\mathscr{H}$, $i=1,\cdots,n$. 由 n 个具有寿命分布 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 的部件组成的关联系统. 若记其寿命分布为 F. 问 $F\in\mathscr{H}$?

对于上面引入的绝大多数寿命类, 这些问题都已经解决, 为方便起见, 列表如下:

	IFR (DFR)	IFRA (DFRA)	NBU (NWU)	DMRL (IMRL)	NBUE (NWUE)	HNBUE (HNWUE)
卷 积	✓ ×	✓ ×	✓ ×	× ×	✓ ×	✓ ×

混　合	×✓	×✓	××	×✓	××	×✓
组成关联系统	××	✓×	✓×	××	××	××

1.2　冲击模型下的封闭性.

设系统在冲击环境下工作. 用计数过程 $N(t)$ 记 $(0, t]$ 中系统所受到的冲击次数. 设系统在受到前 k 次冲击后仍生存的概率为 $\bar{F}(k)$. $k=0, 1, \cdots$, $\bar{F}(k)$ 满足

$$1=\bar{F}(0)\geqslant\bar{F}(1)\geqslant\cdots.$$

若记系统的寿命为 Z, 则系统在时刻 t 仍正常的概率为

$$\bar{Z}(t)=P\{Z\geqslant t\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(t)=k\}P\{Z\geqslant t\mid N(t)=k\}=\sum P\{N(t)=k\}\bar{F}(k).$$

这里研究的问题是: 若 $\{\bar{F}(k), k=0, 1, \cdots\}\in(\mathrm{D})\mathscr{H}$, $\mathscr{H}$ 为某个寿命类, $(\mathrm{D})\mathscr{H}$ 表示相应的离散寿命类, 问 $Z\in\mathscr{H}$? 也就是说研究离散分布的类性质是否被连续的寿命分布 $Z(t)$ 继承下来的问题.

最早的工作是 Esary 等([30])开始的. 他们对 $N(t)$ 是 Poisson 过程进行了讨论, 其后对计数过程 $N(t)$ 作了多种推广. A-Hameed 和 Proschan([4], [5])讨论了 $N(t)$ 是非时齐 Poisson 过程及非平稳纯生过程的情形. Block 和 Savits([14])考虑了相邻冲击的时间间隔有 NBU, NBUE 分布及其对偶类的情形. Klefsjö([34], [35])分别讨论了纯生冲击过程的 IFRA, DMRL 等性质及冲击间隔有 HNBUE 分布的情形. Neuts([39]) 研究了冲击间隔有 PH 分布的情形. Shanthikumar 和 Sumita([41], [42])作了进一步的推广.

1.3　弱收敛的封闭性

在寿命类中, 讨论依分布收敛的封闭性及收敛到指数分布的充要条件是很有意义的.

设 $\mathscr{H}$ 是某个寿命类, $\mathscr{H}^{LD}$ 表示 $\mathscr{H}$ 中元素列依分布收敛的极限所成之类.

Barlow 和 Proschan([9])得到了

$$\mathrm{IFRA}=\{\mathrm{IFRA}\}^{LD}.$$

Basu 和 Simons([11])考虑了 IFR 类中的分布, 在适当正则化后弱收敛到均值为 1 的指数分布的充要条件及封闭性. Basu 和 Bhattacharjee([12])对 HNBUE 类进行了讨论, 得到了弱收敛下的封闭性及收敛到指数分布的充要条件.

1.4　寿命类的 LS 变换刻画

Vinogradov([44])利用分布的 LS 变换的性质给出了 IFR 类的特征刻画. Block 和 Savits([15])给出了 IFRA, DMRL, NBU, NBUE 及其对偶的 LS 刻画. Klefsjö([35])给出了 HNBUE 及 HNWUE 的刻画.

设 F 是一个寿命分布, 相应的 LS 变换为

$$\Phi(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\,dF(t),\quad s\geqslant0$$

令

$$\beta_n(s)=(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{d^n}{ds^n}\left\{\frac{1-\Phi(s)}{s}\right\},\ s\geqslant0,\ n=1, 2, \cdots,$$

$$\bar{\alpha}_0(s)=1,$$

$$\bar{\alpha}_{n+1}(s)=s^{n+1}\beta_n(s),\ n=1, 2, \cdots.$$

记 $\bar{\alpha}(s)=\{\bar{\alpha}_n(s), n=0, 1, \cdots\}$. 不难证明对固定的 $s\geqslant0$, $\bar{\alpha}_n(s)\downarrow$ 对 $n=0, 1, 2\cdots$. 因此, $\bar{\alpha}(s)$ 可以看成取非负整数的离散随机变量的生存函数.

由于寿命分布 F 可对应于 $\bar{\alpha}(s)$，自然可以研究这样的问题：若 $F\in\mathscr{H}$，$\mathscr{H}$ 为某一寿命类，问 $\bar{\alpha}(s)$ 是否属于相应的离散寿命类 $(\mathrm{D})\mathscr{H}$．或者，讨论其逆命题．这方面的主要结论是

定理1 若 F 是寿命分布，$F(0)=0$．则

$$F\in\mathscr{H}\Leftrightarrow\bar{\alpha}(s)\in(\mathrm{D})\mathscr{H},\quad \forall s\geqslant 0$$

其中 $\mathscr{H}$ 为 IFR, IFRA, NBU, NBUE, DMRL, HNBUE 或其对偶类中的任意一个．

1.5 寿命分布类的 TTT 变换刻画

试验总时间(Total Time on Test, TTT)这个统计量在50年代初被 Epstein 和 Sobel ([29])用于指数分布总体的参数估计和检验中．Barlow 和 Campo([6])进一步引入了试验总时间变换这个概念．其后 TTT 变换这一工具得到了广泛的应用．例如，在寿命数据的统计分析时帮助选择总体的分布；用来确定数据按年龄更换策略中的最佳更换时间；与计量经济学概念之间的联系及应用；以及用 TTT 变换给出寿命类的刻画．文献见 Barlow 和 Davis([7])，Bergman([13])，Klefsjö([36]，[37])．

记 F 是一个寿命分布．令

$$F^{-1}(t)=\inf\{x:F(x)>t\},\quad 0\leqslant t<1$$

约定 $F^{-1}(1)=+\infty$．

定义3 称

$$H_F^{-1}(t)=\int_0^{F^{-1}(t)}\bar{F}(x)dx,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

为 TTT 变换．简记为 $H^{-1}(t)$．称

$$\phi_F(t)=H_F^{-1}(t)/H_F^{-1}(1),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

为正则化 TTT 函数，简称 ST 函数．简记为 $\phi(t)$．

当 F 的均值 $\mu<\infty$ 时，显然 $H_F^{-1}(1)=\mu$．且 $\phi_F(t)\leqslant 1$，$\forall 0\leqslant t\leqslant 1$．用 TTT 变换刻画寿命分布类时有如下结果．

定理2 设 F 是一个寿命分布，

1) $F\in$ IFR 当且仅当 ϕ 是[0, 1]上的凹函数

2) 若 F 非退化，则 $F\in$ DFR 当且仅当 ϕ 是[0, 1]的凸函数．

3) 若 $F\in$ IFRA(DFRA)，则 $\phi(t)/t\downarrow(\uparrow)$ 对 $0<t<1$．

4) $F\in$ NBUE(NWUE)当且仅当 $\phi(t)\geqslant t(\leqslant t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$．

5) $F\in$ DMRL(IMRL)当且仅当 $[1-\phi(t)]/(1-t)\downarrow(\uparrow)$ 对 $0\leqslant t\leqslant 1$．

注记

a．在3)中，$\phi(t)/t\downarrow$ 对 $0<t<1$ 不能保证 $F\in$ IFRA．

b．对离散寿命分布可以相仿定义其 TTT 变换．

1.6 寿命分布与指数分布的贴近性研究

在可靠性理论以及其它的应用概率模型中，与 Poisson 过程密切相关的指数分布占有极重要的地位．其原因主要有两个方面．一是许多实际现象，例如某些电子元器件的寿命分布，事件相继发生的时间间隔等可用指数分布来描述．二是含有指数分布结构的问题数学上便于处理，往往能获得解析解．但是，指数分布毕竟有很大的局限性，许多随机现象不能用它来描述．因此，有必要研究某一寿命类中分布与指数分布间的差异问题．近年来此问题的研究很活跃．我们将在§2中比较详细地进行介绍．

1.7 寿命分布类的可靠度界

在许多实际问题中，我们往往不能知道寿命分布的确切形式，而仅知道它是属于某个寿命

分布类，例如新比旧好的类．一个理论与应用上都有意义的问题是：对于该分布类中的任一分布 F，其可靠度函数 $\bar{F}(=1-F)$ 的上、下界是什么？即试图求出 $0\leqslant V(t)\leqslant U(t)\leqslant 1$，使得

$$V(t)\leqslant \bar{F}(t)\leqslant U(t),\quad \forall t\geqslant 0.$$

这类问题在§3中加以讨论．

§2．寿命分布的贴近性研究

设 $\mathscr{H}$ 是某一个寿命类；$\forall F\in\mathscr{H}$，$\mu=\mu(F)<\infty$ 为 F 相应的均值．记

$$E(t)=1-e^{-t/\mu},\quad t\geqslant 0 \tag{4}$$

为均值 μ 的指数分布．F 与指数分布的贴近性可以提成：$\forall F\in\mathscr{H}$，求

$$d(F,\ E)=\sup_{t>0}|\bar{F}(t)-e^{-t/\mu}|. \tag{5}$$

我们希望求出这个最小上界，或者至少给出其非平凡的上界．

首先，要找一个合适的量来度量 F 与指数分布之间的差异．注意到如下几个简单的事实：

a）对一个有均值 μ 的指数分布(4)，其二阶矩 $\mu_2=2\mu^2$．因此，若令

$$\rho=1-\frac{\mu_2}{2\mu^2} \tag{6}$$

则 $\rho=0$．但是，$\rho=0$ 不是指数分布的充要条件．例如：若取

$$P(X=0)=P(X=2)=0.5,$$

则有 $\rho(X)=0$．这里 $\rho(X)$ 表示相应于 X 的 ρ 值．

不过，若我们把范围限于某个寿命类，则有下面的充要条件．

b）$\forall F\in$ HNBUE(或 HNWUE)，则 $\rho=0$ 当且仅当 F 是一个指数分布．（见 Basu 和 Bhattacharjee([12]))．

c）若 $F\in$ HNBUE，则 $\mu_2(F)<\infty$．对 $F\in$ HNWUE，我们假定 $\mu_2(F)<\infty$．此时进一步有

$$\rho=\begin{cases}1-\dfrac{\mu_2}{2\mu^2},\ 0\leqslant\rho\leqslant 0.5,\ 若\ F\in \text{HNBUE}\\[2mm] \dfrac{\mu_2}{2\mu^2}-1,\ 0\leqslant\rho<\infty,\ 若\ F\in\text{HNWUE}.\end{cases}$$

d）若 X 是一个寿命，即 X 为非负随机变量，则 $\rho(X)=\rho(cX)$，这里 $c>0$ 为任一常数．这表明 ρ 值在尺度变换下不变．因此，除非特别说明，下面的讨论中都假定 $\mu=1$．

由 a)，b)知，在相当大的寿命类(如 HNBUE 或 HNWUE)中，我们可以用 $\rho(F)$ 来度量 F 与指数分布之间的差异．一般讲 $\rho(F)$ 越大，F 与指数分布之间的差异越大．

基于上述 a)—d)，我们的问题可重新叙述如下．设 $F\in\mathscr{H}$，$\mu=\mu(F)=1$，记

$$d(F,\ E)=\sup_{t>0}|\bar{F}(t)-e^{-t}|. \tag{7}$$

我们希望获得由 ρ 的简单函数表出的 $d(F,\ E)$．或者，至少得到 $d(F,\ E)$ 的非平凡的上界．

我们列出近年来获得的一些结果．

2.1 NBUE 及 NWUE 类

对 $F\in$ NBUE，Brown 和 Ge([17])利用 Fourier 分析的方法得到

$$d(F,\ E)\leqslant A\sqrt{\rho},\ A=\frac{4}{\pi}\sqrt{6}=3.1187\cdots$$

Solovyev([43])利用分析与概率方法得到

$$d(F,\ E)\leqslant\sqrt{2\rho}\leqslant 1.$$

Cheng 及 He([20]), Daley([27])独立地得到紧的界

$$d^*(F,\ E)=1-e^{-\sqrt{2\rho}}\leqslant 1-e^{-1}. \tag{8}$$

在(8)式的证明中,Cheng 及 He([20])中利用了一个基本的引理.

引理 1 设 F 是任意的均值为 1 的寿命分布. $\forall t\geqslant 0$ 记

$$G(t)=\int_0^t \bar{F}(x)dx,\quad \bar{G}=1-G.$$

则有

$$\bar{G}(t)=e^{-t}-\int_0^t e^{-(t-x)}[\bar{F}(x)-\bar{G}(x)]dx.$$

通过 F 与 G 之间的关系, 利用分析技巧证得了(8). 而 Daley([27])的证明较多地基于几何的方式.

对 NWUE 类,紧的界为(He 及 Cheng([32]), Daley([27]))

$$d^*(F,E)=\sqrt{\rho^2+2\rho}-\rho<1.$$

2.2 DFR 及 IMRL 类

对这两个类,Brown([16])获得了

$$d^*(F,\ E)=\rho/(1+\rho)<1.$$

两个较简单的证明可见 He 及 Cheng([32]), Cheng 及 He([20]).

2.3 DMRL 类

Cheng 及 He([21])获得了紧的界

$$d^*(F,\ E)=2\rho(1-e^{-1})\leqslant 1-e^{-1}.$$

2.4 HNBUE 及 HNWUE 类

Cheng 及 He([20]), He 及 Cheng([32])对这些类进行过讨论, 但最好的结果由 Daley([27])给出.

2.5 IFR 类

对 $F\in$IFR, Solovyev([43])得到

$$d(F,\ E)\leqslant 1-\sqrt{1-2\rho}=1-\sigma/\mu\leqslant 1$$

这里 σ 为 F 的标准差.

Brown([18])得到

$$d(F,\ E)\leqslant 2\rho\leqslant 1.$$

Cheng 及 He([20])得到略好些的结果

$$d(F,\ E)\leqslant 1-\exp\left(-\frac{\rho}{1-\rho}\right)\leqslant 1-e^{-1}.$$

其后进一步改进为: $\forall F\in\{\text{IFRA}\}\cap\{\text{DMRL}\}$,

$$1-\exp\{-1+\sqrt{1-2\rho}\}\leqslant d(F,\ E)\leqslant\{1-\exp(-2\rho)\}/[2(1-\rho)].$$

见 Cheng 及 He([22]). 最近,对 IFR 类获得了 $d(F,\ E)$的隐式表示,从而问题彻底解决.见 Cheng 及 He([23]). 一个有趣的结果是,若 $\rho\leqslant 0.4262$,则

$$d(F,\ E)=1-\exp\{-1+\sqrt{1-2\rho}\}.$$

数值计算的结果表明,当 $\rho\leqslant 0.485$ 时上式仍成立. 而当 $0.485<\rho<0.5$ 时, $d(F,\ E)$ 与其右端的上界的绝对误差小于 0.04.

2.6 离散分布与几何分布的贴近性

记 $\mathscr{D}$ 为离散寿命分布类.

$$\mathscr{D}=\{X: P(X=k)=f(k)\geqslant 0,\ k\in\mathscr{N},\ \sum_{k=1}^{\infty}f(k)=1\}.$$

$Y\in\mathscr{D}$,是一个几何分布的随机变量,即

$$P(Y=k)=pq^{k-1},\quad k\in\mathscr{N}.$$

$p,\ q>0,\ p+q=1$.

在离散寿命类中,几何分布的重要性如同指数分布在一般寿命类中的地位一样. Cheng 及 Ma([26])考虑了如下的贴近性问题: $\forall X\in\mathscr{D}$, $EX=\mu$(不妨约定 $1<\mu<\infty$),求

$$\Delta(X,\ Y)=\sup_{k\in\mathscr{N}}|P(X\geqslant k)-P(Y\geqslant k)|.$$

这里 Y 是均值为 μ 的几何分布随机变量. 我们采用

$$\alpha=\left|1-\frac{B_2}{\mu^2}\right|,\quad B_2=E\binom{X+1}{2}$$

来度量离散分布与几何分布之间的差异. 有如下简单事实

a)
$$\alpha=\begin{cases}1-\dfrac{B_2}{\mu^2}, & 0\leqslant\alpha<0.5,\text{若 } F\in\text{(D)HNBUE}\\ \dfrac{B_2}{\mu^2}-1, & 0\leqslant\alpha<\infty,\text{若 } F\in\text{(D)HNWUE},\text{且 } \mu_2<\infty.\end{cases}$$

b) 若 $F\in$(D)HNBUE(或(D)HNWUE),则 $\alpha=0$ 当且仅当 F 是几何分布.

对常见的离散寿命类,有如下初步结果.

定理 3

a) 若 $X\in$(D)IMRL,则 $\Delta(X,\ Y)\leqslant\alpha/(1+\alpha)$.

b) 若 $X\in$(D)NWUE, 则 $\Delta(X,\ Y)\leqslant\sqrt{\alpha^2+2\alpha}-\alpha$.

c) 若 $X\in$(D)NBUE,则 $\Delta(X,\ Y)\leqslant 2\alpha$.

对其它的类,如(D)DMRL, (D)HNBUE, (D)HNWUE 等也有一些初步的结果.

2.7 贴近性结果的应用

分布间贴近性研究有许多应用. 现用生灭过程首次进入时间的例来说明.

设 $\{N(t),\ t\geqslant 0\}$ 是一个生灭过程. 满足 $N(0)=0$,

$$P\{N(t+h)=k+1\,|\,N(t)=k\}=\lambda_k h+o(h),\quad k\geqslant 0$$

$$P\{N(t+h)=k-1\,|\,N(t)=k\}=\mu_k h+o(h),\quad k\geqslant 1$$

若记 $\tau=\tau(n)$ 为从 $t=0$ 开始,首次进入状态 n 的时间长度, $\phi(s)=E\exp(-s\tau)$, $s\geqslant 0$ 为其相应的 LS 变换. 由生灭过程理论知(王梓坤[1])

$$\phi(s)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{s+\beta_i}\tag{9}$$

其中 $\beta_i>0,\ i=1,\ \cdots,\ n$.

(9)表明 τ 的分布是 n 个参数分别为 $\beta_1,\ \cdots,\ \beta_n$ 的指数分布的卷积. 因此 $\tau\in$ IFR.

若记
$$L(s)=1/\phi(s)=1+c_1s+c_2s^2+\cdots+c_ns^n,$$

则有
$$\mu(n)=E\tau=c_1,\quad \frac{c_2}{c_1^2}=\rho(\tau),$$

这里 $$\rho(\tau)=1-\frac{E\tau^2}{2(E\tau)^2}.$$

由生灭过程理论知，

$$\mu(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\theta_k\lambda_k}\sum_{i=0}^{k}\theta_i,\tag{10}$$

其中

$$\theta_0=1,\ \theta_n=\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}},\quad n\geqslant 1\tag{11}$$

而

$$c_2=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\theta_k\lambda_k}\sum_{i=1}^{k}\mu(i)\theta_i,\tag{12}$$

由 IFR 分布与指数分布的贴近性结果.

$$P\{\tau(n)/\mu(n)>t\}-e^{-t}\leqslant\frac{1}{2}(1-e^{-2\rho})/(1-\rho),\tag{13}$$

这里 $\rho=\rho(\tau)$.

我们用一个简单的例子来说明(13)给出的界相当精确.

考虑一个 3-out-of-5(F)可修系统．系统由同型指数寿命的部件组成，部件失效率 $\lambda=1$，修复率 $\mu=20$．系统中有 2 个修理工．定义 $N(t)$ = 时刻 t 系统中失效的部件数．此时{3, 4, 5}是失效状态集，设 $N(0)=0$．故系统首次失效时间为 $\tau=\tau(3)$．此时按生灭过程模型有：$\lambda_0=5$, $\lambda_1=4$, $\lambda_2=3$, $\mu_1=20$, $\mu_2=40$, $\theta_0=1$, $\theta_1=0.25$, $\theta_2=0.025$, $\mu_1=0.2$, $\mu_2=1.45$, $\mu(3)=18.45$. $\rho(\tau)=3.525\times10^{-3}$. 因此按(13)

$$|P\{\tau/18.45>t\}-e^{-t}|\leqslant 3.525\times10^{-3}.$$

于是，例如有 $$0.8464\leqslant P\{\tau>3\}\leqslant 0.8534.$$

§3. 寿命类的可靠度界

对于某个寿命类中的任意分别函数 F，给出其可靠度 $\bar F$ 的上、下界具有理论和实用上的价值．在这类问题的讨论中，通常假定 F 的某些阶矩或分位点的值已知．

对于 IFR，IFRA 及其对偶类的可靠度界的结果可以参阅 Barlow 和 Proschan([8], [9])的书.典型的结果有

定理 4 若 $F\in$ IFR，均值为 μ，则有

$$\bar F(t)\geqslant\begin{cases}e^{-t/\mu}, & 0<t<\mu\\ 0, & t>\mu,\end{cases}\quad \bar F(t)\leqslant\begin{cases}1, & t\leqslant\mu\\ e^{-wt}, & t>\mu\end{cases}$$

其中 $w=w(t)>0$ 是下述关于 w 的方程之根

$$1-\mu w=\exp(-wt).\tag{14}$$

在已知 F 的均值及二阶矩的条件下，对 $F\in$ IFR 或 DFR 时亦已进行过研究．列出关于 DFR 的结果.

定理 5 设 $F\in$ DFR，均值为 μ，二阶矩为 μ_2. 则 $\forall t\geqslant 0$

$$e^{-\frac{t}{\mu}-\rho}\leqslant\bar F(t)\leqslant\begin{cases}e^{-\frac{t}{\mu}}, & t\leqslant\mu\\ \frac{\mu}{t}e^{-1}, & t\geqslant\mu\end{cases}$$

这里 $\rho=\frac{\mu_2}{2\mu^2}-1>0$.

对其它分布类有

定理 6 设 F 的均值为 μ，则

a) 若 $F\in$ IFRA，则

$$\begin{cases}\exp(-bt)\\0\end{cases}\leqslant\bar F(t)\leqslant\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant\mu\\ \exp(-wt), & t>\mu\end{cases}$$

其中 w 由(14)解出，$b=b(t)>\mu$ 由下式解出

$$b(\mu-t)=\exp(-bt).$$

b) 若 $F\in$ NBUE，则

$$\bar F(t)\geqslant 1-t/\mu,\ t\leqslant\mu.$$

c) 若 $F\in$ NWUE，则

$$\bar F(t)\leqslant\mu/(\mu+t),\ t\geqslant 0.$$

d) 若 $F\in$ HNBUE，则

$$\begin{cases}\exp(-\alpha/\mu)\\0\end{cases}\leqslant\bar F(t)\leqslant\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant\mu\\ \exp(1-t/\mu), & t\geqslant\mu\end{cases}$$

其中 $\alpha=\alpha(t)>0$ 是下述方程的最大正根

$$(\alpha-t+\mu)e^{-\alpha/\mu}-\mu+t=0.$$

e) 若 $F\in$ HNBUE，则 $\forall t\geqslant 0$

$$0<\bar F(t)\leqslant\frac{\mu}{t}(1-e^{-\frac{t}{\mu}}).$$

文献见 Marshall 和 Proschan([38])，Haines 和 Singpurwalla([31])，以及 Klefsjö([35])。

对 NBUE 及 NWUE 的可靠度界的改善见 Cheng 及 He([21])，对 k-HNBUE 及 k-HNWUE($0\leqslant k<\infty$)的结果见 Cheng, He 及 Hu([25])。已知头二阶矩情形下，IFRA 类中可靠度界的结果见 He 及 Cheng([33])。

§4. 结束语

在寿命类的研究中，本文未涉及到

1) 多维寿命类研究.

2) 寿命分布类中的统计问题. 例如，如何利用数据来自某个分布类的信息构造更合适的统计量；如何利用数据检验它来自哪个寿命分布等.

目前关于寿命类性质的研究还在深入进行. 例如，不断有新的类提出(曹晋华、吴燕鸿，[2]). 这些新的类提出后，往往总要回答它在原有结构中的地位(包含关系)，以及 §1 中列举的各类问题. 通过这些研究，大大地丰富了寿命类的内容.

参 考 文 献

[1] 王梓坤，生灭过程与马尔科夫链，科学出版社，北京，1980.

[2] 曹晋华，吴燕鸿，HDMRL 寿命分布类，应用概率统计，2(1986)，314—321.

[3] Abouammoh, A. M. and Ahmed, A. N., The new better than used failure rate class of life distribution, *Adv. Appl. Prob.* **20** (1988), 237—240.

[4] A-Hameed, M. S. and Proschan, F., Nonstationary shock models, *Stoch. Pro. Their Appl.* **1**(1973), 383—404.

[5] A-Hameed, M. S. and Proschan, F., Shock models with underlying birth processes, *J. App. Prob.* **12**(1975), 18—28.

[6] Barlow, R. E. and Campo, R. A., Total time on test processes and applications to failure data analysis. In

Reliability and Fault Tree Analysis, Barlow, R. E. eds., et al., pp. 451—481, 1975.

[7] Barlow, R. E. and Davis, B., Analysis of time between failures for repairable components. In *Nuclear Systems Reliability and Risk Assessment*, Fussell, J. B. et al eds. pp. 543—561, 1977.

[8] Barlow, R. E. and Proschan., F., *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley, New York, 1965.

[9] Barlow, R. E. and Proschan, F., Statistical Theory of Reliability and Life Testing, TO BEGIN WITH, Silver Spring MD 1981.

[10] Basu, A. P and Ebrahimi, N., On *k*-order harmonic new better than used in expectation distribution, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **36** (1984), Part A, 87—100.

[11] Basu, S. K. and Simons, G., Moment spaces of IFR distributions, applications and related materials In *Contributions to Statistics: Essays in Honour of Norman L. Johnson*, P. K. Sen, ed., North-Holland, Amsterdam, 1983.

[12] Basu, S K. and Bhattacharjee, M. C., On weak convergence within the HNBUE family of life distributions, *J. Appl. Prob.* **21**(1984), 654—660.

[13] Bergman, B., Some graphical methods for maintenance planning. In *Proc. 1977 Annual Reliability and Maintainability Symp.*, pp. 467—471, 1977.

[14] Block, H. W. and Savits, T. H., Shock models with NBUE survival, *J. Appl. Prob.*, **15** (1978), 621—628.

[15] Block, H. W. and Savits, T. H., Laplace transforms for classes of life distributions, *Ann. Prob.*, **8**(1980), 465—474.

[16] Brown, M., Approximating IMRL distributions by exponential distributions, with applications to first passage times, *Ann. Prob.*, **11**(1983), 419—427.

[17] Brown, M. and Ge, G. P., Exponential approximations for two classes of aging distributions, *Ann. Prob.*, **12** (1984), 869—875.

[18] Brown, M., Inequalities for distributions with increasing failure rate. In *Contributions to the Theory and Application of Statistics*, Gelfand, A. E. ed , pp. 1—13, Academic, Orlando, FL, 1987.

[19] Bryson M. C. and Siddique, M. M., Some criteria for aging, *JASA* **64**(1969), 1272—1283

[20] Cheng, K. and He, Z. F., Exponential approximations in the classes of life distributions, *Acta Math. Appl. Sinica* (English series) **4**(1988), 277—285.

[21] Cheng, K. and He, Z. F , On proximity between exponential and DMRL distributions, *Statist. and Prob. Letters* **8**(1989), 55—57.

[22] Cheng, K. and He, Z. F , A note on the exponentional approximations of IFR distrbutions,*Statist. and Prob. Letrers*, **12**(1991), 341—344, 1989.

[23] Cheng, K. and He, Z. F., On exponential approximations of IFR distributions, Technical report No. 35, Inst. of Appl. Math. Academia Sinica, 1989

[24] Cheng, K. and He, Z. F., Reliability bounds for NBUE and NWUE distributions, *Acta Math. Appl. Sinica* (English Series) **5**(1989), 81—88.

[25] Cheng, K., He, Z. F. and Hu, Y. M., On the reliability bounds in *k*-HNBUE and *k*- HNWUE classes, *Acta Math. Appl. Sinica*(English Series) **7** (1991), 38—52.

[26] Cheng, K. and Ma, B. C., On proximity between Geometric and some discrete life distributions. In *Proc. of Inter. Symp. on Reliability and Maintainability* 1990-*Tokyo*, pp. 249—254, 1990.

[27] Daley, D. J., Tight bounds on the exponential approximation of some aging distributions, *Ann. Prob.* **16** (1988), 414—423.

[28] Deshpande, J. V , Kochar, S. C. and Singh, H., Aspects of positive aging, *J. Appl. Prob.* **23** (1986), 748—758.

[29] Epstein, B. and Sobel, M., Life testing, *JASA* **48**(1953), 486—502.

[30] Esary, J. D., Marshall, A. W. and Proschan, F., Shock models and wear processes, *Ann. of Prob.* **1**(1973), 627—649.

[31] Haines, A. L. and Singpurwalla, N. D., Some contributions to the stochastic characterization of wear. In *Reliability and Biometry*, Proschan, F. et al., eds., pp. 47—80, SIAM, Pennsylvania, 1974.

[32] He, Z. F. and Cheng, K., Exponential approximations for some classes of life distributions. In *Reliability Theory and Applications*, Osaki, S. et al. eds., pp. 113—126, World Scientific, Singapore, 1987.

[33] He, Z. F. and Cheng, K., Reliability bounds for IFRA class with known mean and variance. In *Proc. of Inter. Symp. on Reliability and Maintainability* 1990—*Tokyo*, pp. 439—444, 1990.

[34] Klefsjö, B., Survival under some shock models, *Scand. J. Statist.* **8**(1981), 39—47.

[35] Klefsjö, B., The HNBUE and HNWUE classes of life distributions, *Naval Res. Log. Quart.* **29**(1982), 331—344.

[36] Klefsjö, B., Some tests against aging based on the total time on test transforms, *Comm. Statist. A-Theory Methods* **12** (1983), 907—927.

[37] Kleijsj5, B., Reliability interpretations of some concepts from economics, *Naval Res. Log. Quart.* **31**(1984), 301—308.

[38] Marshall, A. W. and Proschan, F., Classes of distributions applicable in replacement with renewal theory implications. In *Proc. of the 6th Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.*, Vol I, 395—415 Le Cam et al. eds., University of California Press, 1972.

[39] Neuts, M. F., Shock models with phase type survival and shock resistance, *Naval. Res. Log. Quart.* **25**(1978), 213—219.

[40] Rolski, T., Mean residual life, *Bull of Inter. Statist. Inst.* **46**(1975), 266—270.

[41] Shanthikumar, J. G. and Sumita, U., General shock models associated with correlated renewal sequences, *J. Appl. Prob.* **20**(1983), 600—614.

[42] Shanthikumar, J. G. and Sumita, U., Distribution properties of system failure time in a general shock model, *Adv. Appl. Prob.* **16**(1984), 363—377.

[43] Solovyev, A. D., Limiting theorems. In *Problems of Mathematical reliability* (in Russian), Gnedenko, B. V. ed., Radio i Svyaz Press, Moscow, 1983.

[44] Vinogradov, O. P., The definition of distribution functions with increasing hazard rate in terms of the Laplace transform, *Theor. Prob. Appl.* **18**(1973), 811—814.

STUDY ON LIFE DISTRIBUTION CLASSES

CHENG KAN

(*Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing* 100080)

HE ZONGFU

(*Air Force Engineering College, Xian* 710038)

In this paper we investigate basic properties of various life distribution classes: IFR, IFRA, NBU, DMRL, NBUE, HNBUE and their dual. 1. closureness under various reliability operations; 2. closureness under shock models; 3. closureness under weak convergence; 4. characterizations of L-S transforms of life distribution classes; 5. characterizations of total time on test transforms of life distribution classes; 6. proximity between the exponential distribution and an arbitrary distribution in a certain life class; 7. reliability bounds in a certain life class. Many of results are obtained recently.